Оглавление

Введение

Система MATLAB является мощным и универсальным средством решения инженерно-технических задач, возникающих в той или иной областях деятельности человека. По мнению специалистов, работающих с этой системой, благодаря библиотеке численных методов, содержащейся в MATLAB, ни одна из систем визуального программирования на базе универсальных алгоритмических языков типа Basic, C++, Java не может сравниться с MATLAB ни по объему, ни по качеству[1].

В MATLAB реализованы классические численные алгоритмы решения уравнений, различных задач линейной алгебры, вычисления определенных интегралов, решения дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений.

В данных методических указаниях рассматриваются примеры вычисления определенных интегралов и нахождения неопределенных интегралов при помощи как численных, так и символьных методов интегрирования.

[1]см.Ю.Кетков,А.Кетков,М.Шульц. MATLAB 6.X: программирование численных методов. — СПб.: БХВ-Петербург,2004.

Глава 1

Символьное вычисление интегралов

Символьное интегрирование применяется, если подынтегральная функция имеет первообразную, выражающуюся через элементарные или специальные функции.

1.1 Нахождение неопределенных интегралов.

Для нахождения неопределенных интегралов в символьном виде используется функция int, имеющая следующий синтаксис:

$$int(f, x),$$

где

- $f(x)$ – подынтегральная функция;
- x – переменная интегрирования.

Рассмотрим несколько примеров нахождения неопределенных интегралов:

Пример 1.1.1 $\int \frac{dx}{a^2 - (bx)^2}$

Объявляем символьные переменные и находим интеграл

```
>> syms a b x
>> int(1/(a^2-(b*x)^2))

ans =

-1/2/a/b*log(a-b*x)+1/2/a/b*log(a+b*x)
```

Ответ: $\int \frac{dx}{a^2 - (bx)^2} = -\frac{1}{2ab}\ln(a - bx) + \frac{1}{2ab}\ln(a + bx)$

Пример 1.1.2 $\int \frac{lnx}{x^3}dx$

```
>> syms x
>> I=int(log(x)/x^3)
I =

-1/2*log(x)/x^2-1/4/x^2
```

Ответ: $\int \frac{lnx}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$

1.2 Вычисление определенных интегралов.

Для вычисления определенных интегралов в символьном виде используется функция int, имеющая следующий синтаксис:

$$int(f, x, a, b),$$

где

- $f(x)$ – подынтегральная функция;
- x – переменная интегрирования;
- a – нижний предел интегрирования;
- b – верхний предел интегрирования.

Рассмотрим несколько примеров вычисления определенных интегралов:

Пример 1.2.1 $$\int\limits_a^b \frac{dx}{a^2+(bx)^2}$$

```
>> syms a b x
>> int(1/(a^2+(b*x)^2),a,b)
ans =

-(-atan(b^2/a)+atan(b))/a/b
```

Получили ответ в символьном виде:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{a^2+(bx)^2} = -\frac{(-\operatorname{arctg}\frac{b^2}{a}+\operatorname{arctg} b)}{ab}$$

Пример 1.2.2 $$\int\limits_3^7 \frac{x\ dx}{1+x^2}$$

```
>> syms x
>> y=x/(1+x^2);
>> int(y,3,7)
ans =
1/2*log(5)
```

Чтобы получить приближенное значение интеграла, можно выполнить команду *vpa*, либо просто выделить полученное выражение и нажать <Enter>:

```
>> vpa(ans,16)
ans =

.8047189562170500
>> format long
>> 1/2*log(5)
ans =

   0.80471895621705
```

Пример 1.2.3 $\int\limits_1^2 \ln x dx$

```
>> syms x
>> y=log(x);
>> I=int(y,1,2)
I =

2*log(2)-1
>> format long
>> 2*log(2)-1

ans =

   0.38629436111989
```

1.3 Вычисление двойных интегралов.

Функцию *int* можно использовать для вычисления двойных интегралов. Сначала необходимо перейти к повторному интегралу, определить пределы интегрирования внутреннего и внешнего интегралов и последовательно их вычислить.

Пример 1.3.1 $$\iint\limits_D y\exp x \ dxdy$$

Область интегрирования D ограничена кривыми

$$D: \ y = 1, \ y = 2, \ x = 0, \ x = \ln y.$$

```
>> syms x y
>> z=y*exp(x);
>> I=int(int(z,x,0,log(y)),y,1,2)

I =

5/6
```

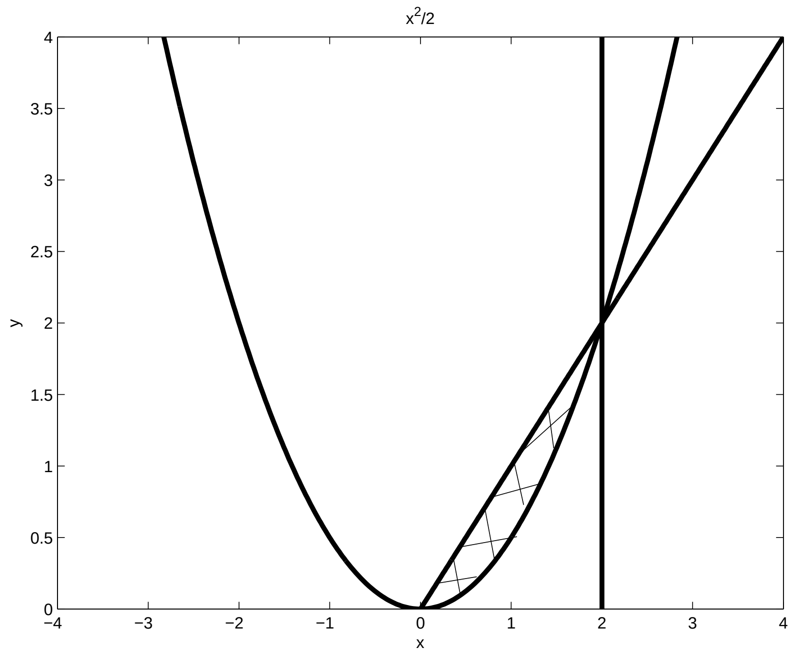
Пример 1.3.2 $$\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2} \ dxdy$$

Область интегрирования D ограничена кривыми

$$D: \ y = \frac{x^2}{2}, \ y = x, \ x = 0, \ x = 2.$$

Построим область интегрирования:

```
>> ezplot('x-y*0-2',[-4 4 0 4])
>> hold on
>> ezplot('x^2/2',[-4 4 0 4])
>> hold on
>> ezplot('x',[-4 4 0 4])
```




```
>> syms x y
>> z=x/(x^2+y^2);
>> I=int(int(z,y,x^2/2,x),x,0,2)

I =

log(2)
```

1.4 Вычисление тройных интегралов.

Аналогично вычисляются и тройные интегралы. Необходимо последовательно вычислить три интеграла.

Пример 1.4.1 $$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

Область интегрирования V ограничена координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$, то есть

$$V:\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1.$$

Прежде всего, надо определить пределы интегрирования и перейти к повторному интегралу.

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z)^3} = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dy \int\limits_0^{1-y-z} \frac{dx}{(x+y+z+1)^3}$$

```
>> syms x y z
>> w=1/(x+y+z+1)^3;
>> I=int(int(int(w,x,0,1-y-z),y,0,1-z),z,0,1)
I =

-5/16+1/2*log(2)

>> -5/16+1/2*log(2)
>> vpa(I,14)
ans =

.3407359027998e-1
```

Глава 2

Методы приближенного вычисления определенных интегралов

В основе методов приближенного вычисления интегралов лежит суммирование значений подынтегральной функции, вычисленных для ряда равностоящих значений независимой переменной. Истолковывая определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

как площадь криволинейной трапеции, расположенной под графиком функции $y = f(x)$, ставится задача о нахождении этой площади. Вспомним некоторые методы приближенного вычисления интегралов.

2.1 Формула прямоугольников.

В этом случае искомая площадь криволинейной трапеции заменяется площадью некоторой ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников (или определенный интеграл заменяется интегральной суммой). Формула прямоугольников имеет вид:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) \ ,$$

где $\quad y_i = f(\xi_i),\ x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1},\ i = 1, 2, 3, ..., n-1$

Остаточный член формулы прямоугольников:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24n^2} \ , \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства формулы прямоугольников оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}$$

где $\quad M_2$ – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

2.2 Формула трапеций.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, заменяется вписанной в нее ломаной с вершинами в точках (x_i, y_i), где $y_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., n-1$. Отрезок $[a, b]$ разбит на равные части, и площадь криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей обычных трапеций с основаниями y_i и y_{i+1} и высотой $h = \frac{b-a}{n}$:

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right).$$

Данное выражение носит название формулы трапеций.
Остаточный член формулы трапеций:

$$R_n = -\frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{12n^2} \ , \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства формулы трапеций оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2} \ ,$$

где M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

2.3 Формула Симпсона.

На этот раз кривая $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения заменяется дугами парабол. В итоге получается приближенное равенство:

$$\int\limits_a^b f(x) \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right),$$

где

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Выражение называется формулой Симпсона. Ею пользуются для приближенного вычисления интегралов чаще, чем формулами прямоугольников и трапеций, потому что она дает более точный результат.

Остаточный член формулы Симпсона:

$$R_n = -\frac{(b-a)^5 f^{IV}(\xi)}{180(2n)^4} \ , \quad a \leqslant \xi \leqslant b$$

Абсолютная погрешность приближенного равенства формулы Симпсона оценивается следующим образом:

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5 M_4}{180(2n)^4} \ ,$$

где M_4 – наибольшее значение $|f^{IV}(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Все приведенные формулы приближенного вычисления интегралов называются квадратурными формулами.

Глава 3

Вычисление определенных интегралов численными методами

3.1 Вычисление интегралов методом трапеций.

Для вычисления интеграла методом трапеций в MATLAB используется функция $trapz$, имеющая следующий синтаксис:

$$trapz(x, y)$$

где

- x – вектор, содержащий дискретные значения аргументов подынтегральной функции;
- y – вектор,содержащий соответствующие значения подынтегральной функции.

Длины векторов x и y одинаковы.

Пример 3.1.1 $\displaystyle\int\limits_1^2 ln(x)\ dx$

Отрезок $[1,2]$ разбивается на равные промежутки с шагом $h = 0.1$, получаем вектор, содержащий дискретные значения аргумента, затем получаем вектор, содержащий соответствующие значения подынтегральной функции.

```
>> x=1:0.1:2
x =
    Columns 1 through 4
    1.0000    1.1000    1.2000    1.3000
    Columns 5 through 8
    1.4000    1.5000    1.6000    1.7000
    Columns 9 through 11
    1.8000    1.9000    2.0000

>> y=log(x)
y =
    Columns 1 through 4
    0.0000    0.0953    0.1823    0.2624
    Columns 5 through 8
    0.3365    0.4055    0.4700    0.5306
    Columns 9 through 11
    0.5878    0.6419    0.6931

>> trapz(x,y)

ans =

   0.38587793674575
```

Для оценки точности значения интеграла вычислим этот же интеграл, используя меньший шаг разбиения отрезка.
Шаг $h = 0.05$.

```
>> x=1:0.05:2;
>> y=log(x);
>> trapz(x,y)
ans =

   0.38619020963221
```

Точное значение этого интеграла $I = 2\ln 2 - 1$,
а приближенное 0.38629436111989 [1].
Можно заметить, что с уменьшением шага разбиения отрезка увеличилась точность вычисления интеграла.
Уменьшим еще раз шаг интегрирования ($h = 0.01$):

```
>> x=1:0.01:2;
>> y=log(x);
>> trapz(x,y)
ans =

   0.38629019447753
```

Таким образом, применяя метод трапеций, необходимо подбирать такой шаг интегрирования h, чтобы погрешность полученного значения интеграла была как можно меньше.

3.2 Вычисление интегралов методом Симпсона.

В MATLAB методы интегрирования более высоких порядков точности реализуются функциями *quad* и *quad*8. Для вычисления интеграла методом Симпсона в MATLAB используется функция *quad*. При обращении к ней шаг интегрирования не задается, а вместо этого используется (задаваемая явно или по умолчанию) требуемая точность вычисления интеграла.

[1] см. пример 1.2.3

Функция $quad$ имеет следующий синтаксис:

$$quad(fun, a, b, tol, trace)$$

Обязательными аргументами $quad$ являются:

- fun — указатель на подынтегральную функцию;
- a, b — пределы интегрирования.

Указатель fun может быть задан одним из трех способов:

- именем M-функции, заключенным в одинарные кавычки;
- указателем $@fun$, где fun — имя функции;
- строкой, содержащей формулу.

Дополнительно можно задать следующие параметры:

- tol — погрешность вычисления интеграла (по умолчанию $tol = 1.e - 6$);
- $trace$ — параметр, позволяющий детально проследить за последовательными вычислениями.

Если $trace = 1$, то в процессе работы выдается последовательность строк, в которых показаны текущие значения соответствующих переменных на каждом шаге вычисления:

- количество вычислений интегрируемой функции;
- левый конец промежутка;
- длина этого промежутка;
- найденное значение интеграла по этому промежутку

(по умолчанию $trace = 0$).
Рассмотрим примеры использования функции $quad$.

Пример 3.2.1 $\displaystyle\int_1^2 ln(x)\ dx$

```
>> format long
>> quad('log(x)',1,2)
ans =

   0.38629433433642
```

Сравнив с результатом 0.38629436111989, мы можем сделать вывод, что в этом случае погрешность полученного значения довольно мала.
Теперь зададим точность вычисления $tol = 1.e - 24$:

```
>> quad('log(x)',1,2,1.e-24)
ans =

   0.38629436111989
```

Интеграл вычисляется медленнее, но с еще меньшей погрешностью.

Пример 3.2.2

Вычислить интеграл от функции

$$f(x) = e^x + x + 2sinx - 5$$

с погрешностью 10^{-7} , где $1 \leqslant x \leqslant 5$.
Создадим М-файл fun, в котором определяется подынтегральная функция.

```
function y=fun(x)
y=exp(x)+x.^2+2*sin(x)-5;
```

Далее находим интеграл по одному из двух вариантов:

1. первым аргументом *quad* указываем имя файла в одинарных кавычках;

```
>> quad('fun',1,5,1.e-7)
ans =

    1.675414908484830e+002
```

2. первым аргументом quad задается указатель @fun.

```
>> quad(@fun,1,5,1.e-7)
ans =

  1.675414908484830e+002
```

3.3 Вычисление двойных интегралов.

В MATLAB двойные интегралы вычисляются функцией *dblquad*, имеющей следующий синтаксис:

$$dblquad(fun, a, b, c, d, tol, trace)$$

Обязательными аргументами для *dblquad* являются пять:

- fun — указатель на подынтегральную функцию;
- a, b — пределы интегрирования внутреннего интеграла;
- c, d — пределы интегрирования внешнего интеграла.

Указатель на подынтегральную функцию задается как и для *quad* [2].

[2] см.раздел 3.2

Пример 3.3.1 $$\iint\limits_D (xsiny + ysinx)dxdy$$

Область интегрирования D ограничена прямыми

$$D: \; y = 0, \; y = 1, \; x = 1, \; x = 2.$$

```
>> format long
>> z='x.*sin(y)+y.*sin(x)';
>> dblquad(z,1,2,0,1)
ans =
   1.1677110966887
```

Пример 3.3.2 $$\iint\limits_D (y^2 \sin x)dxdy$$

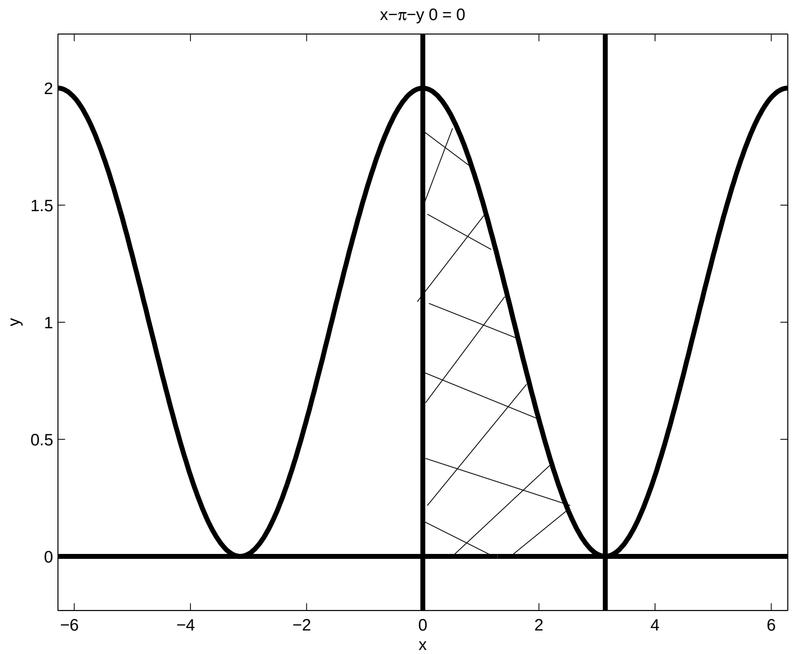
Область интегрирования D ограничена кривыми

$$D: \; y = 0, \; y = 1 + \cos x, \; x = 0, \; x = \pi.$$

Построим область интегрирования:

```
>> ezplot('1+cos(x)')
>> hold on
>> ezplot('x*0-y')
>> hold on
>> ezplot('y*0-x')
>> hold on
>> ezplot('x-pi-y*0')
```

Мы видим, что область интегрирования – не прямоугольник. В таких случаях берется прямоугольная область и отсекается все ненужное при помощи логических выражений, которые могут принимать только два значения: $true$ (истина) – 1 или $false$ (ложь) – 0. Чтобы получить нужную область, надо подынтегральную функцию $f(x, y)$ умножить на 1, когда x и y принадлежат D, и умножить на 0, когда x и y не принадлежат D.



В нашем примере $0 \leqslant y \leqslant (1+\cos x),\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.
Создадим М-файл, в котором определим новую подынтегральную функцию:

```
function w= z(x,y)
w=(y.^2.*sin(x)).*((y<=(1+cos(x))));
```

И дальше вычисляем интеграл по прямоугольной области:

```
>> format long
>> dblquad('z',0,pi,0,2)
ans =
   1.33332811668523
```

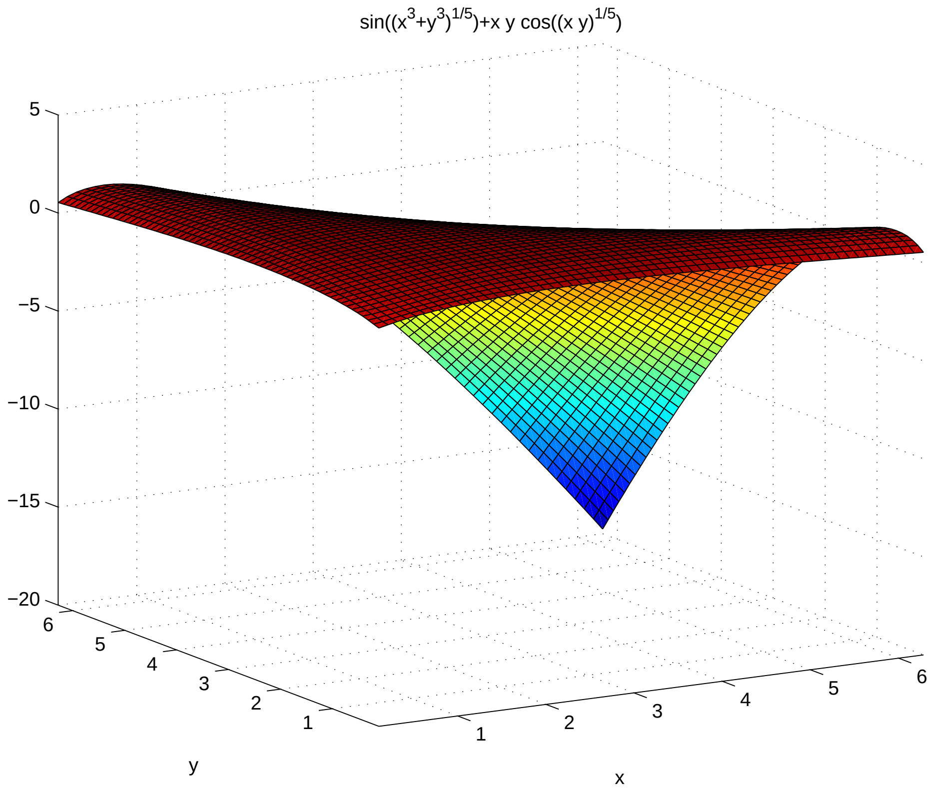
Пример 3.3.3

Вычислить площадь поверхности, заданной функцией

$$z(x,y) = \sin\sqrt[5]{x^3+y^3} + xy\cos\sqrt[5]{xy},$$

где $3 \leqslant x \leqslant 4$, $\quad 2 \leqslant y \leqslant 4$.
Строим график функции

```
>>ezsurf('sin((x^3+y^3)^(1/5))+x*y*cos((x*y)^(1/5))')
```



Площадь поверхности, заданной функцией $z(x,y)$ можно вычислить по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy.$$

Найдем частные производные z'_x и z'_y. Для этого используем символьное дифференцирование:

```
>> syms x y
>> z=sin((x^3+y^3)^(1/5))+cos((x*y)^(1/5))*x*y;
>> zx=diff(z,x)
zx =

    3/5*cos((x^3+y^3)^(1/5))/(x^3+
    y^3)^(4/5)*x^2-1/5*sin((x*y)^(1/5))/
    (x*y)^(4/5)*y^2*x+cos((x*y)^(1/5))*y

>> zy=diff(z,y)
zy =
```

```
3/5*cos((x^3+y^3)^(1/5))/(x^3+
y^3)^(4/5)*y^2-1/5*sin((x*y)^(1/5))/
(x*y)^(4/5)*x^2*y+cos((x*y)^(1/5))*x
```

Подставим z'_x и z'_y и все действия (умножение, возведение в степень, деление) произведем поэлементно (`a.*b, a.^b, a./b`):

```
>> z1='sqrt(1+(3/5.*cos((x.^3+
        y.^3).^(1/5))./(x.^3+
        y.^3).^(4/5).*x.^2-
        1/5.*sin((x.*y).^(1/5))./
        (x.*y).^(4/5).*y.^2.*x+
        cos((x.*y).^(1/5)).*y).^2+
        (3/5.*cos((x.^3+...
        y.^3).^(1/5))./(x.^3+
        y.^3).^(4/5).*y.^2-
        1/5.*sin((x.*y).^(1/5))./
        (x.*y).^(4/5).*x.^2.*y+
        cos((x.*y).^(1/5)).*x).^2)';
```

Наконец, вычислим площадь поверхности. В нашем случае область интегрирования D ограничена прямыми

$$D:\ y=2,\ y=4,\ x=3,\ x=4$$

```
>> format long
>> S=dblquad(z1,3,4,2,4)
S =

   4.18932448175145
```

3.4 Вычисление тройных интегралов.

Вычисление тройного интеграла возможно в MATLAB с помощью функции *triplequad*. Синтаксис *triplequad* аналогичен синтаксису *quad* и *dblquad* [3], добавляются только еще два пре-

[3] см.разделы 3.2 и 3.3

дела интегрирования:

$$triplequad(f, a, b, c, d, n, m, tol, trace).$$

Пример 3.4.1 $$\iiint\limits_V (x^2 y^2 z) dxdydz$$

Область интегрирования

$$V: \; x = 1, \; x = 3, \; y = 0, \; y = 2, \; z = 2, \; z = 5.$$

```
>> format long
>> triplequad('x.^2.*y.^2.*z',1,3,0,2,2,5)
ans =

    2.426666666666667e+002
```

Заметим, что вычисление тройного интеграла с помощью функции *triplequad* возможно по любой области V.

Пример 3.4.2 $$\iiint\limits_V \left(5x + \frac{3z}{2}\right) dxdydz$$

Область интегрирования

$$V: \; x = 1, \; x = y, \; y = 0, \; z = 0, \; z = x^2 + 15y^2.$$

Поступим так, как вычисляли двойной интеграл [4]. Зададим подынтегральную функцию, используя логические выражения, а затем интегрируем уже по области, ограниченной плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

```
>> triplequad('(5.*x+3.*z./2).*((y<=x)&(z<=x.^2+15.*
                y.^2))',0,1,0,1,0,16)
ans =

  12.96295711771103
```

[4] см.пример 3.3.2

Пример 3.4.3 $$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$$

Область интегрирования

$$V: \; x=0, \; y=0, \; z=0, \; x+y+z=1.$$

```
>> format long
>> triplequad('(1./(x+y+z+1).^3).*
          (x+y+z<=1)',0,1,0,1,0,1)
ans =
   0.03407615322804
```

Можно сравнить полученный результат со значением интеграла в примере 1.4.1[5].

[5] см.стр.9

Глава 4

Задания для самостоятельной работы

4.1 Примеры выполнения заданий.

Пример 1. Построить график функции, вычислить длину кривой на заданном отрезке.

$$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2} \quad , \quad 1 \leqslant x \leqslant 2.$$

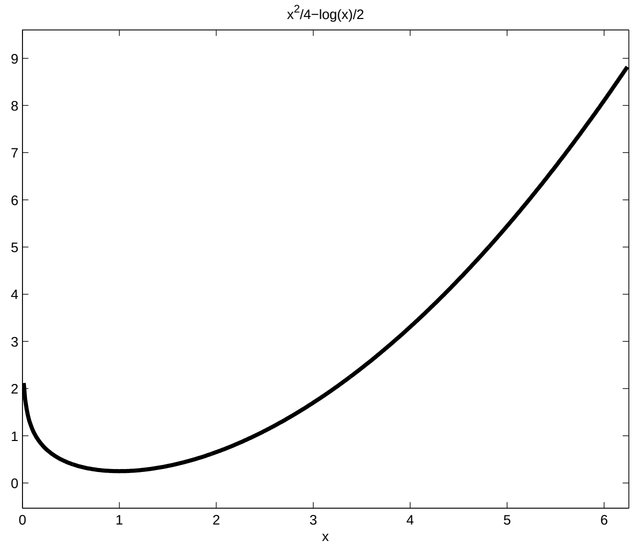
Строим график функции:

```
>> ezplot('x^2/4-log(x)/2')
```

Длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

В данном случае у функции $z = \sqrt{1 + y'^2}$ существует вычисляемая первообразная, поэтому для вычисления интеграла воспользуемся функцией *int*:




```
>> syms x
>> y=x^2/4-log(x)/2;
```

Находим y'_x:

```
>> yx=diff(y)
yx =

1/2*x-1/2/x
```

Задаем подынтегральную функцию $z = \sqrt{1 + y'^2}$:

```
>> z=sqrt(1+yx^2)
z =

(1+(1/2*x-1/2/x)^2)^(1/2)
```

Вычисляем длину дуги:

```
>> L=int(z,1,2)
L =

3/8*4^(1/2)+1/4*4^(1/2)*log(2)

>> 3/8*4^(1/2)+1/4*4^(1/2)*log(2)

ans =
```

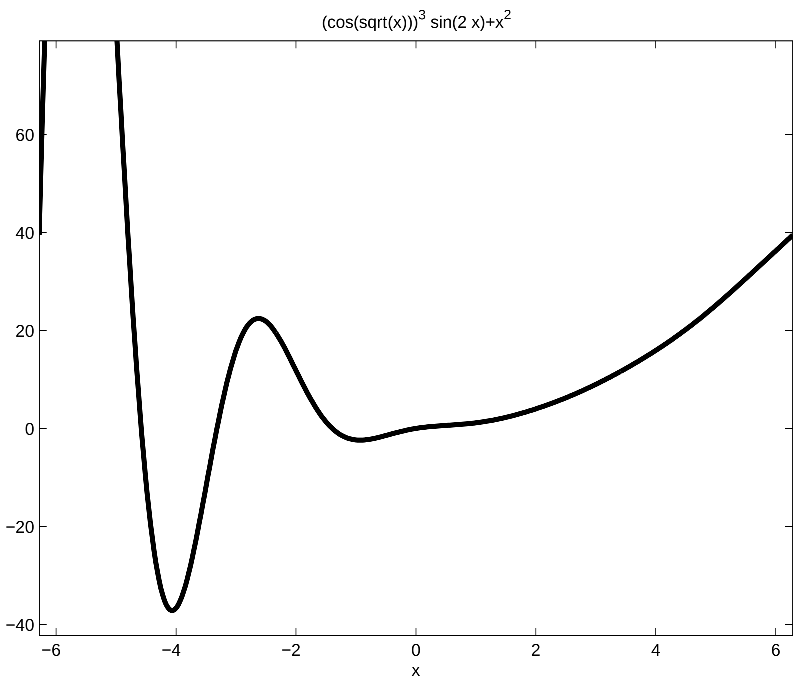
```
1.09657359027997
```

Пример 2. Построить график функции, вычислить длину кривой на заданном отрезке.

$$y = \cos^3\sqrt{x}\cdot\sin 2x + x^2 \quad , \quad 2 \leqslant x \leqslant 4$$

Строим график функции:

```
>> ezplot('(cos(sqrt(x)))^3*sin(2*x)+x^2')
```



Длина кривой вычисляется по формуле:

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}dx \quad , \quad a \leqslant x \leqslant b$$

Не будем пытаться находить первообразную для подынтегральной функции, просто для вычисления интеграла воспользуемся функцией *quad*.

Сначала найдем в символьном виде $y'_x = yx$:

```
>> syms x
>> y=cos(sqrt(x))^3*sin(2*x)+x^2;
>> yx=diff(y)
yx =

    -3/2*cos(x^(1/2))^
    2*sin(2*x)*sin(x^(1/2))/
    x^(1/2)+2*cos(x^(1/2))^3*cos(2*x)+2*x
```

Далее задаем подынтегральную функцию

$$z = \sqrt{1 + y'^2},$$

не забывая все действия производить поэлементно (a.*b, a.^b, a./b):

```
>> z='sqrt(1+(-3/2.*cos(x.^(1/2)).^
      2.*sin(2.*x).*sin(x.^(1/2))./x.^
      (1/2)+2.*cos(x.^(1/2)).^3.*cos(2.*x)+
      2.*x).^2)';
>> format long
>> L=quad(z,2,4)

L =

  12.10400926317780
```

Пример 3. Вычислить двойной интеграл.

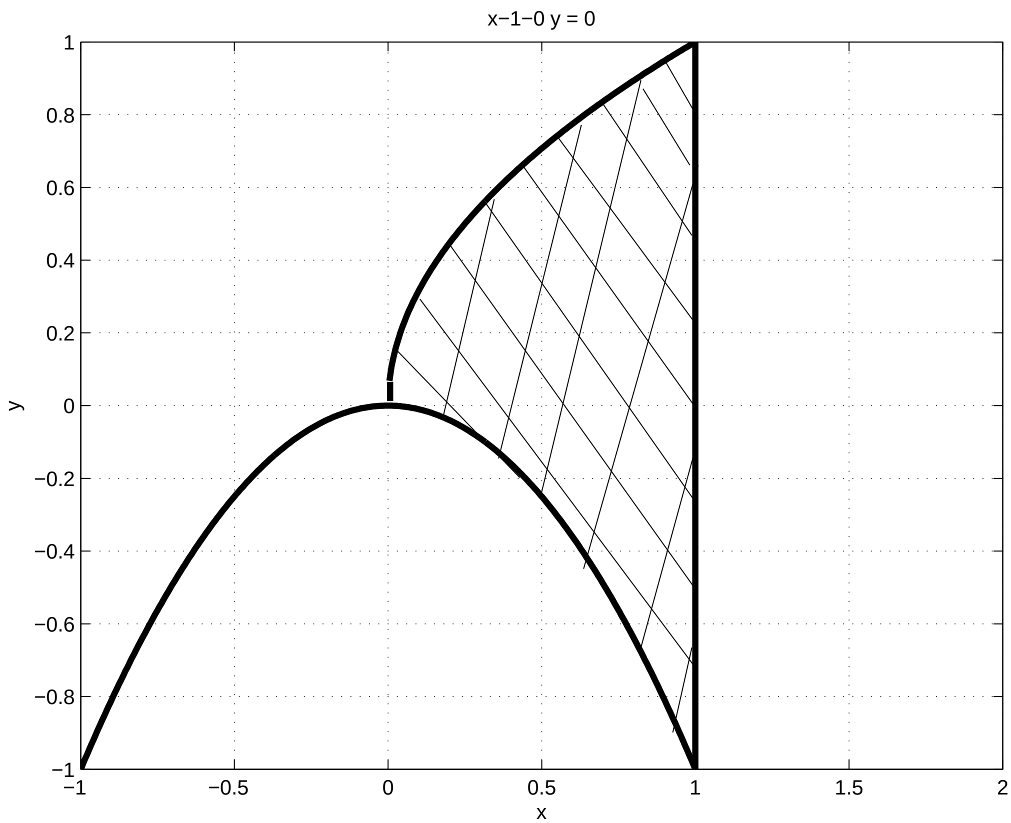
$$\iint\limits_D (9x^2 \cos y + 48y^3 \sin x)dxdy$$

Область D : $x = 1$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$.

Построим область интегрирования:

```
>> ezplot('x-1-0*y',[-1 2 -1 1])
```

```
>> hold on
>> ezplot('sqrt(x)',[-1 2 -1 1])
>> hold on
>> ezplot('-x^2',[-1 2 -1 1])
>> grid on
```




```
function w=db(x,y)
w=(9.*x.^2.*cos(y)+48.*sin(x).*y.^3).*((y>=-x.^2)&
  (y<=sqrt(x)));

>> dblquad('db',0,1,-1,1)
ans =

   5.52915363090841
```

Пример 4. Найти массу тела.

Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ — плотность:

$$64(x^2 + y^2) = z^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = 0,\ z = 0,\ (y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$$

$$\mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}$$

Подынтегральную функцию задаем, используя логические выражения
$(\sqrt{(}64(x^2 + y^2)) <= z)$ и $((x^2 + y^2) <= 4)$
Далее находим границы области – прямоугольного параллелепипеда:
$x = -2,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 0,\ z = 16$

```
>> format long
>> triplequad('(5.*(x.^2+y.^2)./4).*((x.^2+y.^2<=4)&
            (8.*sqrt(x.^2+y.^2)<=z))',-2,2,0,2,0,16)

ans =

  50.26504685694752
```

Надо заметить, что вычисление занимает довольно ощутимый промежуток времени.

Пример 5. Найти неопределенные интегралы.

1. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3 + 5}dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{a\sin x + b\cos x}dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)}dx$

Для нахождения неопределенных интегралов используем функцию *int*:

1. ```
   >> syms x
   >> y=x^2*sqrt(x^3+5);
   >> I=int(y)
   I =
   2/9*(x^3+5)^(3/2)
   ```

2. ```
   >> syms x a b
   >> y=1/(a*sin(x)+b*cos(x));
   >> I=int(y)
   I =
   -2/(b^2+a^2)^(1/2)*atanh(1/2*(-2*b*...
   tan(1/2*x)+2*a)/(b^2+a^2)^(1/2))
   ```

3. ```
   >> syms x
   >> y=(x^2-2*x+3)/((x-1)*(x^3-4*x^2+3*x));
   >> I=int(y)
   I =
   1/(x-1)+1/2*log(x-1)-log(x)+1/2*log(x-3)
   ```
   ```

4.2 Варианты заданий для самостоятельной работы.

1. Построить график функции и вычислить длину полученной кривой на отрезке.

1. $y = \cos^2(\sqrt{x})\sin 2x + x^2, \;\; 2 \leqslant x \leqslant 3$
2. $y = \ln(3x^2) - \sin^2 5x \cos x, \;\; 1 \leqslant x \leqslant 2$
3. $y = \operatorname{arctg} \sqrt[5]{x} \cos^3 \dfrac{x}{2} \sin x, \;\; 2 \leqslant x \leqslant 4$
4. $y = \dfrac{1}{x}\cos x^3 - \ln x^4 + \dfrac{x^2}{2}, \;\; -2 \leqslant x \leqslant -1$
5. $y = \sin 2x \cos \dfrac{x}{2} - e^{-\sqrt{x}}, \;\; 4 \leqslant x \leqslant 5$
6. $y = \cos 2x \sin^2 3x + \ln(x^2 + 13), \;\; -2 \leqslant x \leqslant 2$
7. $y = -\cos x \sin 15x^3 + \sqrt[3]{x}, \;\; 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$
8. $y = \operatorname{arctg}(5x^4) - \ln\sqrt{x} + \sin^3 x^3, \;\; 1 \leqslant x \leqslant \dfrac{15}{10}$
9. $y = \operatorname{arctg} \sqrt[5]{x^2} + \cos \dfrac{x}{2} \sin x^7, \;\; \dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$
10. $y = x^3 \cos 2x \sin x^3, \;\; -1 \leqslant x \leqslant 1$
11. $y = x^{-5} \cos \sqrt[3]{x} - \ln x^2 - x^{-3} \sin x^{\frac{2}{5}}, \;\; 1 \leqslant x \leqslant 4$
12. $y = e^{-x} + \sin^2 3x + \cos \dfrac{x}{2} \sin x, \;\; -2 \leqslant x \leqslant 2$
13. $y = \dfrac{\sin^2 2x}{\ln x^2} + \cos^3 x + \sqrt{x^3 + 134}, \;\; 2 \leqslant x \leqslant 3$
14. $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}} + \cos^3 5x^2 + \dfrac{x^2}{2}, \;\; 1 \leqslant x \leqslant 3$

15. $y = \sqrt[5]{x^3+16} - e^{\cos\frac{x}{2}} + \sin^7\dfrac{x}{2}, \ \ -1 \leqslant x \leqslant 5$

16. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^4+13}\sin^2 x^2 \cdot e^{-x}, \ \ -2 \leqslant x \leqslant 0$

17. $y = e^{-\operatorname{arctg} x^3} + \cos\sqrt[3]{x^7 - x + 1} + \sin^2\dfrac{x}{2}, \ \ 1 \leqslant x \leqslant 3$

18. $y = \cos^3 14x^2 \sin^2 x + \sqrt{4 - x^2}, \ \ -1 \leqslant x \leqslant 1$

19. $y = -\sqrt{123 - x^3} + e^{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}\cos^2 5x, \ \ -2 \leqslant x \leqslant 4$

20. $y = \cos^2 x + \dfrac{\sin^7\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2-3}}, \ \ 3 \leqslant x \leqslant 5$

21. $y = e^{-\operatorname{arctg}(x^2+8)} - \cos^2 x + x^2\sin x, \ \ -4 \leqslant x \leqslant 4$

22. $y = \dfrac{x^2}{5} + \cos^3\dfrac{x}{2} - \sin^2 5x\cos x, \ \ -2 \leqslant x \leqslant 2$

23. $y = \sqrt{\cos^2 x + \sin^3 x}, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 2$

24. $y = \cos(x^4 + 4x^3 + \dfrac{x}{2} - 105) + \cos 5x \sin^3\dfrac{x}{2} - x^2,$

$$-2 \leqslant x \leqslant 2$$

25. $y = \cos\sqrt[3]{x^6 + 16x - 1021}\sin x + e^{\cos 3x}, \ \ -1 \leqslant x \leqslant 1$

26. $y = -\sin^5 2x + \cos x \sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^4}{4}\sin x^2, \ \ 0 \leqslant x \leqslant 4$

2. Вычислить $\iint\limits_D z(x,y)\ dxdy.$

1. $z = 12x^2 \cos y + 16x^3 \sin^2 y$

$$D:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$$

2. $z = 36x^2 \sin y - 96x^3 \cos^2 y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$$

3. $z = 18x^3 \sin y^2 + 32y^3 \cos^2 y$

$$D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$$

4. $z = 27y^2 \sin yx + 48x^3 \sin y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^2,\ y = -\sqrt[3]{x},\ x \geqslant 0$$

5. $z = y^2 \sin \dfrac{xy}{2} \cos(xy)$

$$D:\ x = 0,\ y = \frac{\pi}{2},\ y = \pi,\ y = \frac{x}{2}$$

6. $z = 4y^2 \sin(2xy) \sin x$

$$D:\ x = 0,\ y = \sqrt{2\pi},\ y = x^2$$

7. $z = \dfrac{4}{5} y^2 \sin x + \dfrac{9}{11} x^3 \sin^2 2y$

$$D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$$

8. $z = 4y^2 x + 176x^3 \cos^3 3y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x},\ x \geqslant 0$$

9. $z = y^2 e^{-\frac{xy}{4}} x^3$

$$D:\ x = 0,\ y = 2x,\ y = x^2$$

10. $z = 54x^2 \cos(xy) + 150y^4 \sin^3 2x$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^3,\ y = -\sqrt{x}$$

11. $z = 3y^2x^2 + \dfrac{50}{3}x^3 \cos^3 3y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$$

12. $z = xy\cos(xy) - 9x^5 \sin y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x},\ x \geqslant 0$$

13. $z = 9y^2x^2 + 25x^4 \cos^2 5y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$$

14. $z = 24x^2y - 48x^3 \sin^3 6y$

$$D:\ x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$$

15. $z = 6y^2 \sin x + 24x^3y^3 \cos^3 y$

$$D:\ x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$$

16. $z = 4yx\cos(xy) + 16x^3 \sin^3 y$

$$D:\ x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$$

17. $z = y^2 e^{-\frac{x^2y}{8}}$

$$D:\ x = 0,\ y = 4x,\ y = x^2$$

18. $z = y^2 \cos \dfrac{xy^2}{2}$

$$D: \; x = 0, \; y = 2x^2, \; y = 2x$$

19. $z = 3y^2 \cos x - 9x^5 \sin^5 y$

$$D: \; x = 1, \; y = -x^2, \; y = \sqrt[3]{x}, \; x \geqslant 0$$

20. $z = 3y^2 \sin \dfrac{x^2y^2}{2}$

$$D: \; x = 0, \; y = \frac{3}{2}x^2, \; y = x$$

21. $z = 4y^2x^3 + 3x^3 \cos^2 2y$

$$D: \; x = 1, \; y = x^2, \; y = -\sqrt{x}$$

22. $z = 8y^3 \cos x + 18x^2 \sin^2 5y$

$$D: \; x = 1, \; y = -x^2, \; y = \sqrt[3]{x}, \; x \geqslant 0$$

23. $z = \dfrac{4}{5}y^2x + 9x^2 \cos^2 2y$

$$D: \; x = 1, \; y = -x^3, \; y = \sqrt{x}$$

24. $z = y \cos(x^2y)$

$$D: \; x = 1, x = \frac{1}{2}, \; y = \pi x, \; y = 3\pi x$$

25. $z = 6y^2 e^{\frac{xy}{3}}$

$$D: \; x = 3, \; x = 6, \; y = (\ln 2)x, \; y = (\ln 3)x$$

26. $z = 12 \cos(y^2)x + 27x^2 \sin^2 y$

$$D: \; x = 1, \; y = x^2, \; y = -\sqrt[3]{x}, \; x \geqslant 0$$

3. Вычислить $\iiint\limits_V w(x, y, z)\ dxdydz$.

Область интегрирования V ограничена плоскостями:

$$V : x = x_1,\ x = x_2,\ y = y_1,\ y = y_2,\ z = z_1,\ z = z_2.$$

1. $w = \cos^2 xy - z \sin x + z^2$

$$V : x = -1,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -2,\ z = -1$$

2. $w = z^3 xy + \operatorname{arctg} z - \cos xy \sin z$

$$V : x = -3,\ x = -2,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 1,\ z = 2$$

3. $w = x^2 y^2 z^2 \cos(xyz) + \sin(xy)$

$$V : x = -1,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 2,\ z = 1,\ z = 2$$

4. $w = \operatorname{arctg}(xyz) - x^2 y^2 z$

$$V : x = 0,\ x = 1,\ y = -2,\ y = -1,\ z = -2,\ z = -1$$

5. $w = z - \cos xy \sin yz$

$$V : x = -1,\ x = 1,\ y = 4,\ y = 5,\ z = 0,\ z = 1$$

6. $w = \operatorname{arctg}(xyz) + \cos(x^2 z) \sin(yz)$

$$V : x = -1,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -2,\ z = -1$$

7. $w = -\sin x \cos y \sin z$

$$V : x = -2,\ x = -1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 2,\ z = 3$$

8. $w = z^2 y + \cos^2(xyz)$

$$V : x = -1,\ x = 1,\ y = -3,\ y = -2,\ z = -2,\ z = -1$$

9. $w = xyz\cos x - \sin(yz)$

$$V: x = -1,\ x = 0,\ y = -2,\ y = -1,\ z = -2,\ z = 0$$

10. $w = \operatorname{arctg}(x^2yz) + x^2\cos(yz)$

$$V: x = -2,\ x = -1,\ y = 4,\ y = 5,\ z = -3,\ z = -2$$

11. $w = -\cos(x^2z) + \sin(2zx^3y)$

$$V: x = -1,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -2,\ z = -1$$

12. $w = \sin(xyz) + x^3z$

$$V: x = 3,\ x = 4,\ y = -2,\ y = -1,\ z = -2,\ z = -1$$

13. $w = \cos(x^2z)\sin(yx) + e^{-xyz}$

$$V: x = -2,\ x = -1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -2,\ z = -1$$

14. $w = zxy - \cos(y^2z)\sin 5x$

$$V: x = 0,\ x = 1,\ y = -1,\ y = 0,\ z = -2,\ z = -1$$

15. $w = z^3x + \cos^2(y^5zx)$

$$V: x = -1,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -2,\ z = -1$$

16. $w = \operatorname{arcctg}(x^2y^2z^2) + \cos z\sin(yx)$

$$V: x = 2,\ x = 3,\ y = 4,\ y = 5,\ z = 6,\ z = 7$$

17. $w = \cos(yx)\sin^2(yz)$

$$V: x = -1,\ x = 1,\ y = 4,\ y = 5,\ z = -2,\ z = -1$$

18. $w = z^3x^2y - \sin(xy) + z^2$

$$V : x = -3,\ x = -2,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -1,\ z = 0$$

19. $w = xyz\sin^5(2xz) - \sin(xyz)$

$$V : x = -1,\ x = 0,\ y = 2,\ y = 3,\ z = 1,\ z = 2$$

20. $w = \cos^2(xz)\sin(zy) + x^2$

$$V : x = -1,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -1,\ z = 0$$

21. $w = x\sin(xyz^2) + y^3$

$$V : x = 3,\ x = 4,\ y = 0,\ y = 1,\ z = -2,\ z = -1$$

22. $w = -x\cos^3(xy)\sin(z^2y)$

$$V : x = 1,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2,\ z = -1,\ z = 0$$

23. $w = \operatorname{arctg}(x^3\sqrt{y}z) - \cos\sqrt{x}$

$$V : x = -1,\ x = 1,\ y = 2,\ y = 3,\ z = -2,\ z = -1$$

24. $w = x^2\cos(zy)\sin x$

$$V : x = 2,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 6,\ z = 7$$

25. $w = \operatorname{arctg}(x + y + z) - \cos z^2$

$$V : x = 1,\ x = 2,\ y = -2,\ y = -1,\ z = 3,\ z = 4$$

26. $w = \cos^7(xyz) - x\sin(yz) + y\cos(zx)$

$$V : x = 0,\ x = 1,\ y = 1,\ y = 2,\ z = -1,\ z = 0$$

4. Построить график функции и вычислить площадь полученной поверхности.

1. $z = \sin^3 2x - \cos^2 y + \dfrac{xy}{2}$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

2. $z = \sin^3 x \cos^3 y + \mathrm{arctg}(xy)$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

3. $z = \dfrac{x}{4} + \cos^2 xy$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

4. $z = \ln(yx) + \cos^2 2xy$; $1 \leqslant x \leqslant 2$, $1 \leqslant y \leqslant 2$

5. $z = \cos 2x + \sin xy + \ln x^2$; $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant y \leqslant 3$

6. $z = x^2 + y^3 - \mathrm{arctg}(xy)$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

7. $z = \dfrac{\sin^2(xy)\cos x}{x^2 - 1}$; $-4 \leqslant x \leqslant -2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

8. $z = \mathrm{arcctg}(xy) - \ln x^2 + \cos(xy)$;
$$-1 \leqslant x \leqslant -0.5\ ,\ 1 \leqslant y \leqslant 2$$

9. $z = 4x^2 + \cos(xy) - \sin^2(y^2)$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

10. $z = \ln(x^2 + y^2) + \cos(xy)\sin(xy)$;
$$-3 \leqslant x \leqslant -1\ ,\ 1 \leqslant y \leqslant 3$$

11. $z = x^3 y - \ln(x^4 y^2) + \cos 2x$; $-3 \leqslant x \leqslant -1$, $1 \leqslant y \leqslant 5$

12. $z = \sin^5(xy) + \cos^3(3x) - e^{\sqrt{x}}$; $1 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$

13. $z = \dfrac{15y}{x}\cos x \sin y - 6\sin(xy)$;
$$-2 \leqslant x \leqslant -1\ ,\ -2 \leqslant y \leqslant 2$$

14. $z = \dfrac{x^2}{y^3}\cos^3(xy) + \sqrt{x^2 + y^2}$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-4 \leqslant y \leqslant -2$

15. $z=\sqrt{x^2y}\sin^3(x^2y^2)-\cos^5(x^3y^3);$

$$-1\leqslant x\leqslant 1\ ,\ 0\leqslant y\leqslant 1$$

16. $z=\cos^2(xy)+2\ln(x^2y^2)-x^3y;$

$$-2\leqslant x\leqslant -1\ ,\ -2\leqslant y\leqslant -1$$

17. $z=20x^3\sqrt{y}-\cos^6\sqrt{x}\sin^2(xy);\ 0\leqslant x\leqslant 2\ ,\ 0\leqslant y\leqslant 2$

18. $z=\dfrac{1}{3}\cos^2 y\sin(xy)+x^2y^3+\sqrt{x^2+y^2};$

$$-1\leqslant x\leqslant 1\ ,\ -1\leqslant y\leqslant 1$$

19. $z=\sin\sqrt[5]{x^3+y^3}+\cos(\sqrt[5]{xy})xy;\ 3\leqslant x\leqslant 4\ ,\ 2\leqslant y\leqslant 4$

20. $z=\ln(x^4+2y^2)+x^3-y^3+\cos^6(xy);$

$$-3\leqslant x\leqslant -1\ ,\ 1\leqslant y\leqslant 2$$

21. $z=\sin^3(x^2y)-x^4y^2+\ln(x^2+y^2);$

$$1\leqslant x\leqslant 3\ ,\ 1\leqslant y\leqslant 3$$

22. $z=\mathrm{arcctg}(xy)+\cos x\sin y+\cos^6(xy);$

$$1\leqslant x\leqslant 2\ ,\ 1\leqslant y\leqslant 3$$

23. $z=xy\ln x^4+\cos^5(xy);\ 1\leqslant x\leqslant 3\ ,\ -1\leqslant y\leqslant 1$

24. $z=e^{-x}\cos(xy)\cos(\sqrt[3]{xy})\sin^2(\sqrt[5]{y});$

$$2\leqslant x\leqslant 4\ ,\ 2\leqslant y\leqslant 4$$

25. $z=\ln(x^2+y^2)+\cos\dfrac{3x}{2}-x^3y\sin(xy);$

$$0.5\leqslant x\leqslant 1\ ,\ 0.5\leqslant y\leqslant 2$$

26. $z=\cos^2(xy)+2\ln(x^6y^2);\ -4\leqslant x\leqslant -2\ ,\ -4\leqslant y\leqslant -2$

5. Построить график функции и вычислить длину дуги полученной кривой [1].

1. $y = -x^2 + 2x$, от вершины до точки с абсциссой $x = 2$
2. $y = \dfrac{x^3}{6}$, $x \in [0; 6]$
3. $y = \ln x$, $x \in \left[\sqrt{8}; \sqrt{15}\right]$
4. $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + \dfrac{15}{12}$, отсеченной осью OX
5. $y = \dfrac{x^2}{16}$, отсеченной прямой $y = 4$
6. $y = 9 - x^2$, $x \in [-3; 0]$
7. $y = 1 - \sin t$, $x = t - \sin t$, $t \in [0; \pi]$
8. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$, $t \in [0; \pi]$
9. $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$
10. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [0; 1]$
11. $r = \sqrt{2} \sin \varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$
12. $r = 3.5(1 - \cos \varphi)$, $\varphi \in [0; \pi]$
13. $r = \dfrac{1}{\varphi}$, $\varphi \in \left[\dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{3}\right]$
14. $r = 6(1 + \sin \varphi)$, $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$
15. $r = \sqrt{2} e^{\varphi}$, $\varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

---

[1] Применить функцию $int(y, a, b)$

16. $y = \ln \dfrac{e}{\cos x}$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$

17. $y = \arcsin e^{-x}$, $x \in [0; 1]$

18. $y = 1 - \ln \sin x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$

19. $y = \ln \cos x$, $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$

20. $y = 4 - x^2$, $x \in [-2; 2]$

21. $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$

22. $y = \sqrt{x - 1}$, от точки A(1,0) до точки B(2,1)

23. $2y = x^2 - 3$, отсеченной прямой $y = 0$

24. $y = \ln \sin x$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$

25. $x = 256 + \ln \cos y$, $y \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$

26. $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$, $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Литература.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : В 3-х т.Т.2 8-е изд.– М.: ФИЗМАТЛИТ, Лаборатория Знаний, 2003.

2. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 6.х.: программирование численных методов. – СПб.: БХВ – Петербург,2004.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. Т.1,2.-М.: Наука,1996.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие для студентов высших технических учебных заведений / Г.С.Бараненков, Б.П.Демидович, В.А.Ефименко и др.;под редакцией Б.П.Демидовича.–М.АСТ: Астрель,2006

5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. 3-е изд., испр. — СПб.: Издательство "Лань",2005.