Економічний зміст похідної.

Використання поняття похідної в економіці

Продуктивність праці є похідною об'єму виробленої продукції за часом, а похідна дорівнює $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta K(x)}{\Delta x}$, виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові затрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва (кількість продукції, що виробляється) x і визначаються не сталими виробничими витратами, а лише змінними (на сировину, паливо і т.д.). Аналогічним чином можуть бути визначені гранична виручка, граничний доход, граничний продукт, гранична корисність та інші граничні величини.

Граничні величини характеризують не стан (як сумарна або середня величини), а процес, зміни економічного об'єкту. Таким чином, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкту (процесу) за часом або відносно іншого досліджуваного фактору. Необхідно врахувати все ж таки, що економіка не завжди дозволяє використовувати граничні величини в силу неподільності багатьох об'єктів економічних розрахунків і дискретності економічних показників за часом (наприклад, річних, квартальних, місячних і т.д.). Разом з тим у ряді випадків можливо відвернути увагу від дискретності показників і ефективно використати граничні величини.

Для дослідження економічних процесів і розв'язку інших прикладних задач часто використовують поняття еластичності функції.

Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'$$

Еластичність функції показує наближено, на скільки процентів зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1%.

Відмітимо властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної x на темп зміни функції

$$T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

Тобто $E_x(y)=xT_y$

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій

$$E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v)$$

Еластичність функцій застосовується при аналізі попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або доходу x) – коефіцієнт, що визначається за формулою (1), який показує наближено, на скільки процентів зміниться попит (обсяг споживання) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (по абсолютній величині) $E_x(y)>1$, тоді попит вважають еластичним, якщо $E_x(y)=1$, -нейтральним, якщо $E_x(y)<1$, - нееластичним відносно ціни (або доходу).

Приклад 1. Залежність між витратами виробництва k і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $k=50x-0,05x^3$ (грошових од.). Визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції 10 одиниць.

Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням $k_1=\dfrac{k}{x}=50-0,05x^2$, при $x=10$. Середні витрати (на одиницю продукції) дорівнюють

$$k_1(10)=50-0,05\cdot 10^2=45 \text{ (грошових од.)}$$

Функція граничних витрат виражається похідною

$$k'(x)=\left(50x-0,05x^3\right)=50-0,15x^2;$$

При $x=10$ граничні витрати складають

$$k'(x)=50-0,15\cdot 10^2=35 \text{ (грошових од.)}$$

Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грошових одиниць, тоді граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (обсязі продукції, що випускається, 10 од.) складає 35 грошових од.

Приклад 2. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. гривень) і випуском продукції x (тис. гривень) виражається функцією

$$y = -0,5x + 80$$

Знайти еластичність собівартості при випуску продукції, що дорівнює 60 тис. гривень.

Згідно формули еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x + 80} = \frac{x}{x - 160}$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0,6$, тобто при випуску продукції, що дорівнює 60 тис. гривень, збільшення його на 1% приведе до зниження собівартості на 0,6%.

Приклад 3. Обсяг продукції u, виробленої бригадою робітників, може бути описаний рівнянням

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\ (од.)$$

$1 \le t \le 8,$

де t –робочий час в годинах. Обчислить продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення.

Продуктивність праці виражається похідною

$$z(t) = u'(t) = \left(-\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\right)' = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100\ (од./год),$$

а швидкість і темп зміни продуктивності – відповідно похідною $z'(t)$ і логарифмічною похідною $T_x(t) = (\ln z(t))'$:

$$T_x(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}\ (од./год),$$

Де $z'(t) = -5t + 15\ (од./год^2)$

В задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:

$z(1)=112,5\ (од./год)$

$z'(1)=10\ (од./год^2)$

$T_x(1)=0,09\ (од./год)$

І

$z(7)=82,5\ (од./год)$

$z'(7)=-20\ (од./год^2)$

$T_x(7)=-0,24\ (од./год)$

Отже, на кінець роботи продуктивність праці суттєво знижується; при цьому зміна знаку $z'(t)$ і $T_x(t)$ із плюса на мінус свідчить про те, що підвищення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Приклад 4. Дослідним шляхом встановлені функції попиту $g=\dfrac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s=p+0,5$, де g і s - кількість товару, відповідно купленого і пропонованого на продаж в одиницю часу, p - ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиції урівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при підвищені ціни на 5% від рівноважної.

а) Рівноважна ціна визначається із умови $g=1$: $\dfrac{p+8}{p+2}=p+0,5$, звідки $p=2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 грошовим одиницям.

б) Знайдемо еластичності по попиту і пропозиції за формулою $E_x(y)=\dfrac{x}{y}y'$:

$$E_p(g)=-\frac{6p}{(p+2)(p+8)};\quad E_p(s)=\frac{2p}{2p+1};$$

Для рівноважної ціни $p=2$ маємо

$E_{p=2}(g) = -0,3; \quad E_{p=2}(s) = 0,8$

Оскільки отримані значення еластичності по абсолютній величині менше 1, тоді і попит і пропозиції даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни р на 1% попит зменшиться на 0,3%, а пропозиція підвищиться на 0,8%.

в) При підвищенні ціни р на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0,3 = 1,5\%$, отже, доход зростає на 3,5%.

Приклад 5. Як пов'язані граничні і середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1?

Нехай повні витрати підприємства у виражаються функцією $y = f(x)$, де x - обсяг продукції, що випускається. Тоді середні витрати y_1 на виробництво одиниці продукції $y_1 = \frac{y}{x}$. Еластичність частки двох функцій дорівнює різниці їх еластичностей, тобто:

$$E_x(y_1) = E_x\left(\frac{y}{x}\right) = E_x(y) - E_x(x) = E_x(y) - 1$$

З умови $E_x(y) = 1$, отже, $E_x(y_1) = 1 - 1 = 0$.

Це означає, що зі зміною обсягу продукції x середні витрати на одиницю продукції не змінюються, тобто $y_1 = \frac{y}{x} = c$, звідки $y = cx$. Граничні витрати підприємства визначаються похідною $y' = c$. Отже, $y' = y_1$, тобто граничні витрати дорівнюють середнім витратам (зауважимо, що отримане твердження справедливе лише тільки для лінійних функцій витрат).