Види з’єднань елементів в теорії надійності та методи їх розрахунку.

Системи з послідовним з'єднанням елементів

Структурна надійність – результуюча надійність системи при заданій структурі і відомих значеннях надійності всіх вхідних в неї блоків.

Розрахунки показників безвідмовності ТО зазвичай проводяться в припущенні, що вся система, так і будь-який її елемент можуть перебувати лише в одному з двох можливих станів – працездатному і непрацездатному, а відмови елементів незалежні один від одного. Стан системи (працездатний або непрацездатний) визначається станом елементів та їх поєднанням. Тому теоретично можливо розрахунок безвідмовності будь ТО звести до перебору всіх можливих комбінацій станів елементів, визначення ймовірності кожного з них і складання ймовірностей працездатних станів системи. Це метод прямого перебору. Він практично універсальний і може використовуватися при розрахунку будь-яких ТО. Однак при великій кількості елементів системи n такий шлях стає нереальним з-за великого обсягу обчислень (наприклад, при n=10 число можливих станів системи становить $N = 2^n =$ 1024, при n=20 перевищує 10^6). Тому на практиці використовують більш ефективні і економічні методи розрахунку, не пов'язані з великим обсягом обчислень. Можливість застосування таких методів пов'язана зі структурою ТО.

При розрахунку структурної надійності, структура системи замінюється логічною схемою.

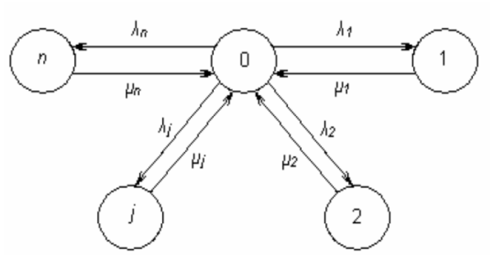


Рис. 3.3

Розрізняють системи з такими типами з'єднання

Системи з послідовним з'єднанням елементів

Системою з послідовним з'єднанням елементів називається система, в якій відмова будь-якого елементу призводить до відмови всієї системи. Таке з'єднання елементів в техніці зустрічається найбільш часто, тому його називають основним з'єднанням.

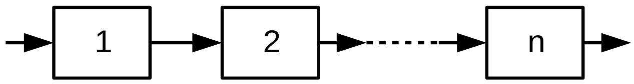


Рис. 3.4. Послідовне з’єднання елементів на логічній схемі надійності

В системі з послідовним з'єднанням для безвідмовної роботи протягом деякого напрацювання *t* необхідно і достатньо, щоб кожен з *n* елементів працював безвідмовно протягом цього напрацювання. Вважаючи відмови елементів незалежними, імовірність одночасної безвідмовної роботи *n* елементів визначається за теоремою множення імовірності: імовірність спільної появи незалежних подій дорівнює добутку імовірностей цих подій:

$$P(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_n(t) = \prod_{i=1}^{n} p_i(t) = \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i(t)) .$$

Відповідно, імовірність відмови такого ТО

$$Q = 1 - P = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - q_i).$$

Середній час безвідмовної роботи

$$T = 1 / \sum_{i=1}^{n} \lambda .$$

Якщо система складається з рівнонадійних елементів ($p_i = p$), то

Рівними за надійністю називають елементи інтенсивності відмов або імовірності відмов у яких однакові.

$$P = p_i^n, \quad Q = 1 - (1 - q)^n .$$

З формул видно, що навіть при високій надійності елементів надійність системи при послідовному з'єднанні зменшується зі збільшенням числа елементів. Крім того, оскільки всі співмножники в правій частині першого виразу не перевищують одиниці, імовірність безвідмовної роботи ТО при послідовному з'єднанні не може бути вищою імовірності безвідмовної роботи самого ненадійного з її елементів (принцип "гірше гіршого"). Із малонадійних елементів не можна створити високонадійної системи з послідовним з'єднанням.

Якщо всі елементи системи працюють в періоді нормальної експлуатації і має місце найпростіший потік відмов, напрацювання елементів і системи підкоряються експоненціальному розподілу і можна записати

$$P = \prod_{i=1}^{n} \exp(-\lambda_{\mathrm{i}} t) = \exp\left[-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{\mathrm{i}})t \right] = \exp(-\Lambda\, t),$$

де

$$\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{\mathrm{n}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\mathrm{i}} = const$$

є сумарна інтенсивність відмов системи. Таким чином, інтенсивність відмов системи при послідовному з'єднанні елементів і найпростішому потоці відмов дорівнює сумі інтенсивностей відмов елементів. Для системи з *n* рівнонадійних елементів

$$\Lambda = n\lambda, \qquad T_0 = \frac{T_{0i}}{n},$$

тобто інтенсивність відмов в *n* разів більше, а середнє напрацювання в *n* разів менше, ніж у окремого елемента.

3.8. Системи з паралельним з'єднанням елементів

Системою з паралельним з'єднанням елементів називається система, відмова якої відбувається тільки у випадку відмови всіх її елементів. Такі схеми надійності характерні для технічних систем, в яких елементи дублюються або резервуються, тобто паралельне з'єднання використовують як метод підвищення надійності. Однак такі системи зустрічаються і самостійно.

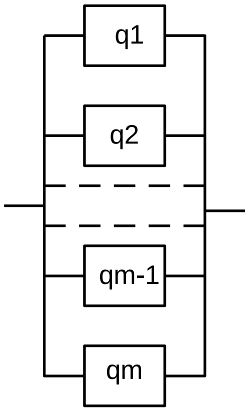


Рис. 3.5. Паралельне з’єднання елементів

Для відмови системи з паралельним з'єднанням елементів протягом напрацювання *t* необхідно і достатньо, щоб всі її елементи відмовили протягом цього напрацювання. Так що відмова системи полягає в спільній відмові всіх елементів, імовірність чого (при допущенні незалежності відмов) може бути знайдена за теоремою множення імовірності як добуток імовірностей відмови елементів:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_n = \prod_{i=1}^{n} q_i = \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Відповідно, імовірність безвідмовної роботи

$$P = 1 - Q = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

Для систем з рівнонадійними елементами

$$Q = q^n = (1-p)^n \quad , \quad P = 1 - (1 - p)^n ,$$

тобто надійність системи з паралельним з'єднанням підвищується при збільшенні числа елементів.

Оскільки $q_i < 1$ добуток у правій частині завжди менше будь-якого із співмножників, тобто імовірність відмови системи не може бути вище імовірності самого надійного її елемента ("краще кращого") і навіть з порівняно ненадійних елементів цілком можлива побудова надійної системи.

При експоненціальному розподілі напрацювання

$$P = 1 - [1 - \exp(-\lambda t)]^n ,$$

звідки визначається середнє напрацювання до відмови системи

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = T_{0i} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} ,$$

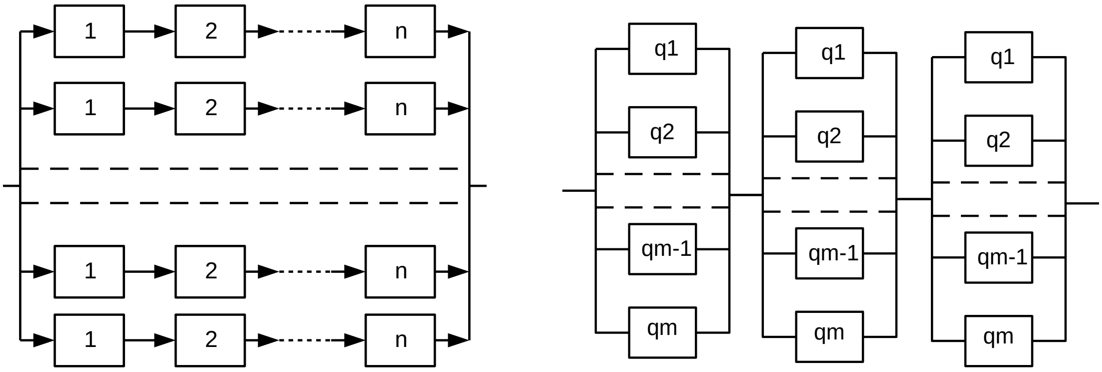
де $T_{0i} = 1/\lambda_i$ – середнє напрацювання елемента. При великих значеннях *n* справедлива наближена формула

$$T_0 = T_{0i} (\ln n + \frac{1}{2n} + 0.577).$$

Таким чином, середнє напрацювання системи з паралельним з'єднанням більше середнього напрацювання її елементів.

3.9. Системи з паралельно-послідовним з'єднанням

Часто зустрічаються складні схеми, в яких поєднано паралельне та послідовне з’єднання. Більш поширені два типи таких систем (рис. 3.6):



а) б)

Рис. 3.6. Паралельно-послідовне та послідовно-паралельне з'єднання

У першому випадку є m паралельних ланок з n однаковими по надійності частинами. Надійність ланки $p'_{\sum} = p^n, q' = 1 - p^n$. Надійність всієї системи:

$$p_{\sum} = 1 - \left(1 - p^n\right)^m = 1 - \left(q'\right)^m .$$

Збільшуючи число паралельних ланок отримаємо, що $m \to \infty, p \to 1$, тобто паралельне з'єднання ланок з однакових частин збільшує надійність схеми. При $n \to \infty, p \to 0; n \to \infty, m \to \infty, p \to 0$.

У другому випадку пов'язано n груп з m однакових частин. Надійність групи:

$$p'_{\sum} = 1 - \left(1 - p\right)^m \quad p_{\sum} = \left(p'_{\sum} \right) = \left[1 - \left(1 - p\right)^m\right]^n .$$

$$m \to \infty, p \to 1, \; n \to \infty, p \to 0; n \to \infty, m \to \infty, p \to 1.$$

У загальному випадку, коли кількість елементів з'єднаних не однакова, то надійність буде різна і звідси:

$$q_i = \prod_{j=1}^{m} q_j = \prod_{j=1}^{m} \left(1 - p_j\right)$$

$$p_i = 1 - q_i = 1 - \prod_{j=1}^{m} \left(1 - p_j\right)$$

$$p_{\sum} = \prod_{i=1}^{n} p_i = \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \prod_{j=1}^{m} \left(1 - p_j\right)\right]$$

3.10. Системи типу "*m* з *n*"

Систему типу "m з n" можна розглядати як варіант системи з паралельним з'єднанням елементів, відмова якої відбудеться, якщо з n елементів, з'єднаних паралельно, працездатними виявляться менш m елементів ($m < n$). Особливістю даної системи є те, що всі елементи що входять до її складу рівні за надійністю. Число m елементів виділено штрих пунктиром, n – загальна кількість елементів (рис. 3.7).

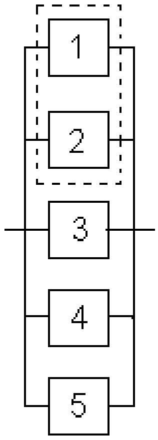


Рис.3.7. Система типу "2 з 5"

На рис. 3.7 представлено систему "2 з 5", яка працездатна, якщо з п'яти її елементів працюють будь-які два, три, чотири або п'ять (на схемі пунктиром виділені функціонально необхідні два елементи, причому виділення елементів 1 і 2 зроблено умовно, оскільки всі п'ять елементів рівнозначні). Системи типу "m з n" найбільш часто зустрічаються в електричних і телекомунікаційних системах, технологічних лініях, а також при структурному резервування.

Для розрахунку надійності систем типу “m з n“ при порівняно невеликій кількості елементів можна скористатися методом прямого перебору. Він полягає у визначенні працездатності кожного з можливих станів системи, які визначаються різними поєднаннями працездатних і непрацездатних станів елементів.

Табл.3.8.

Таблиця станів системи “2 з 5”

N стану	Стан елементів					Стан системи	Імовірність стану системи
	1	2	3	4	5		
1	+	+	+	+	+	+	p^5
2	+	+	+	+	-	+	$p^4q^1 = p^4(1-p)$
3	+	+	+	-	+	+	
4	+	+	-	+	+	+	
5	+	-	+	+	+	+	
6	-	+	+	+	+	+	
7	+	+	+	-	-	+	$p^3q^2 = p^3(1-p)^2$

8	+	+	-	+	-	+	
9	+	-	+	+	-	+	
10	-	+	+	+	-	+	
11	+	+	-	-	+	+	
12	+	-	+	-	+	+	
13	-	+	+	-	+	+	
14	+	-	-	+	+	+	
15	-	+	-	+	+	+	
16	-	-	+	+	+	+	
17	+	+	-	-	-	+	$p^2q^3 = p^2(1-p)^3$
18	+	-	+	-	-	+	
19	-	+	+	-	-	+	
20	+	-	-	-	+	+	
21	-	+	-	-	+	+	
22	-	-	-	+	+	+	
23	+	-	-	+	-	+	
24	-	+	-	+	-	+	
25	-	-	+	-	+	+	
26	-	-	+	+	-	+	
27	+	-	-	-	-	-	$p^1q^4 = p^1(1-p)^4$
28	-	+	-	-	-	-	
29	-	-	+	-	-	-	
30	-	-	-	+	-	-	
31	-	-	-	-	+	-	
32	-	-	-	-	-	-	$q^5 = (1-p)^5$

Всі стани системи “2 з 5“ занесені в табл. 3.8. (в таблиці працездатні стани елементів і системи відзначені знаком “+“, непрацездатні – знаком “–“).

Для даної системи працездатність визначається лише кількістю працездатних елементів. По теоремі множення ймовірностей імовірність будь-якого стану визначається як добуток ймовірностей станів, у яких перебувають елементи. Наприклад, у рядку 9 описано стан системи, в якій відмовили елементи 2 і 5, а інші працездатні. При цьому умова “2 з 5“ виконується, так що система в цілому працездатна.

Імовірність такого стану

$$P_9 = p_1 q_2 p_3 p_4 q_5 = p^3 q^2,$$

(передбачається, що всі елементи рівнонадійні). З урахуванням всіх можливих станів імовірність безвідмовної роботи системи може бути знайдена за теоремою додавання ймовірностей всіх працездатних станів. Оскільки в табл. 3.8 кількість непрацездатних станів менше, ніж працездатних (відповідно 6 і 26), простіше обчислити імовірність відмови системи. Для цього додамо імовірності непрацездатних станів (де не виконується умова “ 2 з 5 “)

$$Q = P_{32} + P_{27} + P_{28} + P_{29} + P_{30} + P_{31} = q^5 + 5pq^4 =$$
$$= (1-p)^5 + 5p(1-p)^4 = 1 - 10p^2 + 20p^3 - 15p^4 + 4p^5.$$

Тоді імовірність безвідмовної роботи системи

$$P = 1 - q = 10p^2 - 20p^3 + 15p^4 - 4p^5.$$

Розрахунок надійності системи “m з n“ може проводитися *комбінаторним методом*, в основі якого лежить формула біноміального розподілу. Біноміальному розподілу підпорядковується дискретна випадкова величина m – число появ деякої події в серії з n дослідів, якщо в окремому досвіді імовірність появи події дорівнює p. При цьому імовірність появи події рівно m раз визначається

$$P_n(m) = C_n^m P^m (1-P)^{n-m},$$

де C_n^m – біноміальний коефіцієнт, званий "числом сполучень по m з n" (тобто скількома різними способами можна реалізувати ситуацію "m з n"):

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Значення біноміальних коефіцієнтів наведені в табл. 3.9.

Оскільки для відмови системи "m з n" досить, щоб кількість справних елементів було менше m, імовірність відмови може бути знайдена по теоремі додавання ймовірностей для m= 0, 1, ... (m-1), а імовірність безвідмовної роботи для m = m, m + 1, ..., n::

$$\sum_{m=0}^{n} P_m = \sum_{m=0}^{n} C_n^m P^m (1-P)^{n-m}$$

Очевидно, що $Q + P = 1$, тому в розрахунках слід вибирати ту з формул, яка в даному конкретному випадку містить меншу кількість доданків.

Для системи "2 з 5" отримаємо:

$$P = C_5^2 p^2 (1-p)^3 + C_5^3 p^3 (1-p)^2 + C_5^4 p^4 (1-p) + C_5^5 p^5 = 10p^2(1-p)^3 +$$
$$+ 10p^3(1-p)^2 + 5p^4(1-p) + p^5 = 10p^2 - 20p^3 + 15p^4 - 4p^5.$$

Імовірність відмови тієї ж системи:

$$Q = C_5^0 (1-p)^5 + C_5^1 p(1-p)^4 = (1-p)^5 + 5p(1-p)^4 =$$
$$= 1 - 10p^2 + 20p^3 - 15p^4 + 4p^5,$$

що, як видно, дає той же результат для імовірності безвідмовної роботи.

У табл. 3.10 наведені формули для розрахунку імовірності безвідмовної роботи систем типу "*m* з *n*" при *m* <= *n* <= 5. Очевидно, при *m* = 1 система перетворюється в звичайну систему з паралельним з'єднанням елементів, а при *m* = *n* – з послідовним з'єднанням.

Табл.3.9

Біноміальні коефіцієнти $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

n	m										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003
16	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008
17	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448
18	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758
19	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378
20	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756

Табл.3.10

	Загальне число елементів , n				
m	1	2	3	4	5
1	p	$2p-p^2$	$3p-3p^2+p^3$	$4p-6p^2+4p^3-p^4$	$5p-10p^2+10p^3-5p^4+p^5$
2	-	p^2	$3p^2-2p^3$	$6p^2-8p^3+3p^4$	$10p^2-20p^3+15p^4-4p^5$
3	-	-	p^3	$4p^3-3p^4$	$10p^3-15p^4+6p^5$
4	-	-	-	p^4	$5p^4-4p^5$
5	-	-	-	-	p^5

3.11. Мостові схеми

Мостова структура (рис. 3.8, а, б) не зводиться до паралельного або послідовного типу з'єднання елементів, а являє собою паралельне з'єднання послідовних ланцюгів елементів з діагональними елементами, включеними між вузлами різних паралельних гілок (елемент 3 на рис. 3.8, а, елементи 3 і 6 на рис. 3.8, б). Працездатність такої системи визначається не тільки кількістю елементів, що відмовили, але і їх розміщенням на структурній схемі. Наприклад, працездатність ТО, схема якого наведена на рис. 3.8, а, буде втрачена при одночасній відмові елементів 1 і 2, або 4 і 5, або 2, 3 і 4 і т. д.. У той же час відмова елементів 1 і 5, 2 і 4, або 1, 3 і 4, або 2, 3 і 5 до відмови системи не приводить.

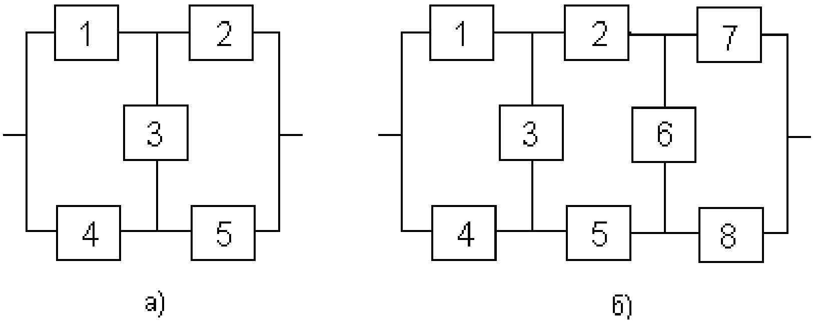


Рис. 3.8. Структура мостової схеми

Для розрахунку надійності мостових систем можна скористатися методом прямого перебору, але при аналізі працездатності кожного стану системи необхідно враховувати не тільки число елементів, що відмовили, але і їх положення в схемі (табл. 3.11).

Табл.3.11

Таблиця станів мостових схем

N сост.	Стан елементів					Стан системи	Імовірність стану	
	1	2	3	4	5		В загальному випадку	При рівнонадійних елементах
1	+	+	+	+	+	+	$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$	p^5
2	+	+	+	+	-	+	$p_1 p_2 p_3 p_4 q_5$	$p^4 q = p^4(1-p)$
3	+	+	+	-	+	+	$p_1 p_2 p_3 q_4 p_5$	
4	+	+	-	+	+	+	$p_1 p_2 q_3 p_4 p_5$	
5	+	-	+	+	+	+	$p_1 q_2 p_3 p_4 p_5$	
6	-	+	+	+	+	+	$q_1 p_2 p_3 p_4 p_5$	
7	+	+	+	-	-	+	$p_1 p_2 p_3 q_4 q_5$	$p^3 q^2 = p^3(1-p)^2$
8	+	+	-	+	-	+	$p_1 p_2 q_3 p_4 q_5$	
9	+	-	+	+	-	-	$p_1 q_2 p_3 p_4 q_5$	
10	-	+	+	+	-	+	$q_1 p_2 p_3 p_4 q_5$	
11	+	+	-	-	+	+	$p_1 p_2 q_3 q_4 p_5$	

12	+	-	+	-	+	+	$p_1q_2p_3q_4p_5$	
13	-	+	+	-	+	-	$q_1p_2p_3q_4p_5$	
14	+	-	-	+	+	+	$p_1q_2q_3p_4p_5$	
15	-	+	-	+	+	+	$q_1p_2q_3p_4p_5$	
16	-	-	+	+	+	+	$q_1q_2p_3p_4p_5$	
17	+	+	-	-	-	+	$p_1p_2q_3q_4q_5$	$p^2q^3 = p^2(1-p)^3$
18	+	-	+	-	-	-	$p_1q_2p_3q_4q_5$	
19	-	+	+	-	-	-	$q_1p_2p_3q_4q_5$	
20	+	-	-	-	+	-	$p_1q_2q_3q_4p_5$	
21	-	+	-	-	+	-	$q_1p_2q_3q_4p_5$	
22	-	-	-	+	+	+	$q_1q_2q_3p_4p_5$	
23	+	-	-	+	-	-	$p_1q_2q_3p_4p_5$	
24	-	+	-	+	-	-	$q_1p_2q_3p_4q_5$	
25	-	-	+	-	+	-	$q_1q_2p_3q_4p_5$	
26	-	-	+	+	-	-	$q_1q_2p_3p_4q_5$	
27	+	-	-	-	-	-	$p_1q_2q_3q_4q_5$	$p\ q^4 = p\ (1-p)^4$
28	-	+	-	-	-	-	$q_1p_2q_3q_4q_5$	
29	-	-	+	-	-	-	$q_1q_2p_3q_4q_5$	
30	-	-	-	+	-	-	$q_1q_2q_3p_4q_5$	
31	-	-	-	-	+	-	$q_1q_2q_3q_4p_5$	
32	-	-	-	-	-	-	$q_1q_2q_3q_4q_5$	$q^5 = (1-p)^5$

Імовірність безвідмовної роботи системи визначається як сума ймовірностей всіх працездатних станів:

$$P = p_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2p_3q_4p_5 + p_1p_2q_3p_4p_5 + \\ + p_1q_2p_3p_4p_5 + q_1p_2p_3p_4p_5 + p_1p_2q_3p_4q_5 + p_1q_2p_3p_4q_5 + \\ + q_1p_2p_3p_4q_5 + p_1p_2q_3q_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 + \\ + p_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2q_3p_4p_5 + q_1q_2q_3p_4p_5 + p_1q_2q_3p_4q_5.$$

У разі рівних за надійністю елементів

$$P = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2 + 2p^2q^3 = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2.$$

Метод прямого перебору ефективний тільки при малій кількості елементів *n*. Наприклад, для схеми на рис. 3.8,б кількість станів становитиме вже 256. Деяке спрощення досягається, якщо в таблицю станів включати тільки поєднання, що відповідають працездатному (або тільки непрацездатному) стану системи в цілому.

Для аналізу надійності ТО, структурні схеми яких не зводяться до паралельного або послідовного типу, можна також скористатися методом логічних схем з застосуванням алгебри логіки (булевої алгебри). Застосування цього методу зводиться до складання для ТО формули алгебри логіки, яка визначає умову працездатності системи. При цьому для кожного елемента і системи в цілому розглядаються дві протилежні події – відмова і збереження працездатності.

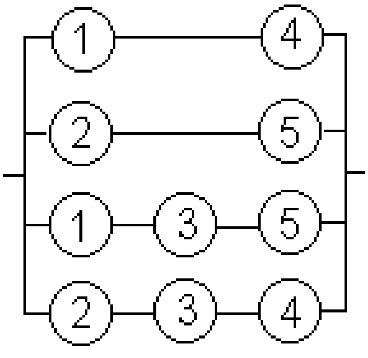
Для складання логічної схеми можна скористатися двома методами – мінімальних шляхів і мінімальних перетинів.

Розглянемо **метод мінімальних шляхів** для розрахунку імовірності безвідмовної роботи на прикладі мостової схеми (рис. 3.9,а).

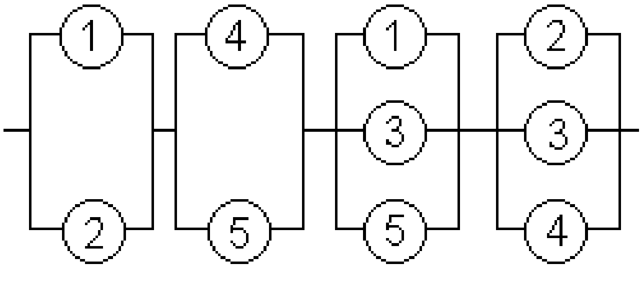
Мінімальним шляхом називається послідовний набір працездатних елементів системи, який забезпечує її працездатність, а відмова будь-якого з них призводить до її відмови.

Мінімальних шляхів в системі може бути один або декілька. Очевидно, що система з послідовним з'єднанням елементів має тільки один мінімальний шлях, що включає всі елементи. В системі з паралельним з'єднанням число мінімальних шляхів співпадає з числом елементів і кожен шлях включає один з них.

Для мостової системи з п'яти елементів (рис. 3.8,а) мінімальних шляхів чотири: (елементи 1 і 4), (2 і 5), (1, 3 і 5), (2, 3 і 4). Логічна схема такої системи (рис. 3.9) складається таким чином, щоб всі елементи кожного мінімального шляху були з'єднані один з одним послідовно, а всі мінімальні шляхи паралельно.



а)



б)

Рис. 3.9. Логічні схеми для розрахунку мостових систем

Потім для логічної схеми складається функція алгебри логіки A за загальними правилами розрахунку ймовірностей безвідмовної роботи, але замість символів ймовірностей безвідмовної роботи елементів і системи P використовуються символи події (збереження працездатності елемента a_i і системи A). Так, "відмова" логічної схеми рис. 3.9 полягає в одночасній відмові всіх чотирьох паралельних гілок, а "безвідмовна робота" кожної гілки – в одночасній безвідмовній роботі її елементів. Послідовне з'єднання елементів логічної схеми відповідає логічному множенню ("І"), паралельне – логічному додаванню ("АБО"). Отже, схема рис. 3.9 відповідає твердженню:

система працездатна, якщо працездатні елементи 1 і 4, 2 і 5, або 1,3 і 5, або 2,3 і 4. Функція алгебри логіки запишеться:

$$A = 1 - (1 - a_1 a_4)(1 - a_2 a_5)(1 - a_1 a_3 a_5)(1 - a_2 a_3 a_4).$$

У виразі змінні a розглядаються як булеві, тобто можуть приймати тільки два значення: 0 або 1. Тоді при зведенні в будь-який ступінь *k*, змінна a зберігає своє значення: $a_i^k = a_i$. На основі цієї властивості функція алгебри логіки може бути перетворена до вигляду

$$\begin{aligned} A = {} & a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_1 a_3 a_5 + a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 a_3 a_4 - \\ & - a_1 a_2 a_3 a_5 - 2 a_1 a_2 a_4 a_5 - a_2 a_3 a_4 a_5 + 2 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5. \end{aligned}$$

Замінивши у виразі символи подій їх ймовірностями , одержимо рівняння для визначення ймовірності безвідмовної роботи системи

$$\begin{aligned} P = {} & p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 p_4 - \\ & - p_1 p_2 p_3 p_5 - 2 p_1 p_2 p_4 p_5 - p_2 p_3 p_4 p_5 + 2 p_1 p_2 p_3 p_4 p_5. \end{aligned}$$

Для системи рівнонадійних елементів вираз легко перетворюється у формулу отриману попередній методом

$$P = p^5 + 5p^4 q + 8p^3 q^2 + 2p^2 q^3 = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2.$$

Метод мінімальних шляхів дає точне значення тільки для порівняно простих систем з невеликим числом елементів. Для більш складних систем результат розрахунку є нижньою межею імовірності безвідмовної роботи.

Для розрахунку верхньої межі імовірності безвідмовної роботи системи служить **метод мінімальних перерізів**.

Мінімальним перерізом називається набір непрацездатних елементів, відмова яких призводить до відмови системи, а відновлення працездатності будь-якого з них – до відновлення працездатності системи. Як і мінімальних шляхів, мінімальних перерізів може бути декілька. Очевидно, система з паралельним з'єднанням елементів має тільки однин мінімальний переріз, що включає всі її елементи. В системі з послідовним з'єднанням число мінімальних шляхів збігається з числом елементів, і кожен перетин включає один з них.

У мостовій системі (рис. 3.8, а) мінімальних перерізів чотири (елементи 1 і 2), (4 і 5), (1, 3 і 5) , (2, 3 і 4). Логічна схема системи (рис.3.9) складається таким чином, щоб всі елементи кожного мінімального перерізу були з'єднані один з одним паралельно, а всі мінімальні перерізу – послідовно. Аналогічно методу мінімальних шляхів, складається функція алгебри логіки. "Безвідмовна робота" логічної системи рис. 3.8 полягає в "безвідмовної роботі" всіх послідовних ділянок, а "відмова" кожного з них – в одночасній "відмові" всіх паралельних елементів. Як видно, оскільки схема методу мінімальних перерізів формулює умови відмови системи, в ній послідовне з'єднання відповідає логічному "АБО", а паралельне – логічному "І". Схема рис. 3.9 відповідає формулюванню: система вийде з ладу, якщо відмовлять елементи 1 і 2, або 4 і 5, або 1, 3 і 5, або 2, 3 і 4. Функція алгебри логіки запишеться

$$A = \left[1-(1-a_1)(1-a_2)\right]\left[1-(1-a_4)(1-a_5)\right]*$$
$$*\left[1-(1-a_1)(1-a_3)(1-a_5)\right]*\left[1-(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)\right].$$

Після перетворень з використанням властивостей булевих змінних та після заміни подій їх ймовірностями переходить у вираз

$$P = p^5 + 5p^4q + 8p^3q^2 + 2p^2q^3 = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2.$$

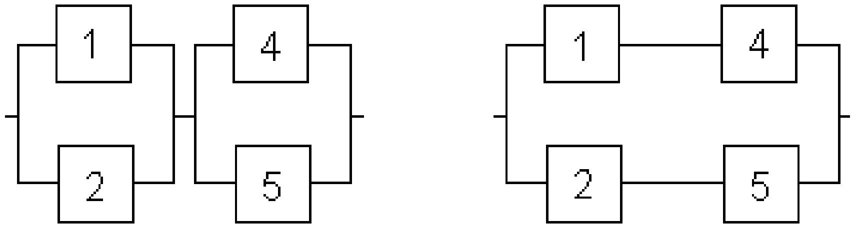
Таким чином, для мостової схеми з п'ятьма елементами верхня і нижня межа імовірності безвідмовної роботи, отримані методами мінімальних перерізів і мінімальних шляхів, співали з точними значеннями, отриманим методом прямого перебору. Для складних систем це може не відбутися, тому методи мінімальних шляхів і мінімальних перерізів слід застосовувати спільно.

Найпростішим методом розрахунку надійності мостової схеми є **метод розкладання відносно особливого елемента**, який базується на відомій в математичній логіці теоремі розкладання функції логіки по аргументу. Згідно теореми, можна записати:

$$P = p_i P(p_i = 1) + q_i P(p_i = 0),$$

де p_i і $q_i = 1 - p_i$ – імовірності безвідмовної роботи і відмови *i*-го елемента, $P(p_i = 1)$ і $P(p_i = 0)$ – імовірності працездатного стану системи за умови, що *i*-й елемент абсолютно надійний і абсолютно ненадійним.

Для мостової схеми (рис. 3.8, а) як особливий елемент доцільно вибрати діагональний елемент 3. При його заміні $p_3 = 1$ мостова схема перетворюється в паралельно-послідовне з'єднання (рис. 3.10, а), а при $p_3 = 0$ – в послідовно-паралельне (рис. 3.10, б).



а) б)

Рис. 3.10. Розрахунок мостової схеми

Для перетворених схем можна записати:

$$P(p_3 = 1) = \left[1 - (1 - p_3)(1 - p_2)\right] \cdot \left[1 - (1 - p_4)(1 - p_5)\right],$$

$$P(p_3 = 0) = 1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5).$$

Тоді на підставі першої формули отримаємо:

$$P = p_3\left[1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\right] \cdot \left[1 - (1 - p_4)(1 - p_5)\right] +$$
$$+ (1 - p_3)\left[1 - (1 - p_1 p_4)(1 - p_2 p_5)\right].$$

Легко переконатися, що для рівнонадійних елементів формула перетворюється в вже отриманий попередніми методами вираз.

$$P = p^5 + 5p^4 q + 8p^3 q^2 + 2p^2 q^3 = 2p^5 - 5p^4 + 2p^3 + 2p^2.$$

Цим методом можна скористатися при розкладанні щодо декількох "особливих" елементів. Наприклад, для двох елементів (*i, j*) запишемо

$$P = p_i p_j P(p_i = 1, p_j = 1) + p_i q_j \ P(p_i = 1, p_j = 0) +$$
$$+ q_i p_j P(p_i = 0, p_j = 1) + q_i q_j P(p_i = 0, p_j = 0).$$

Імовірність безвідмовної роботи мостової схеми (рис. 3.8, б) при розкладанні відносно діагональних елементів 3 і 6 визначиться:

$$P = p_3 p_6 P(p_3 = 1, p_6 = 1) + p_3 q_6 \ P(p_3 = 1, p_6 = 0) +$$
$$+ q_3 p_6 P(p_3 = 0, p_6 = 1) + q_3 q_6 P(p_3 = 0, p_6 = 0).$$

3.12. Перетворення схем складних комбінованих систем

Більшість реальних технічних об’єктів, як радіоелектронних так і телекомунікаційних, має складну комбіновану структуру, частину елементів якої утворює послідовне з'єднання, інша частина – паралельне, окремі гілки елементи або гілки структури утворюють мостові схеми або схеми типу "*m* з *n*".

Метод прямого перебору для таких систем практично реалізувати не. Більш доцільно в цих випадках попередньо зробити декомпозицію системи, розбивши її на прості підсистеми – групи елементів, методика розрахунку надійності яких відома. Потім ці підсистеми структурної схеми надійності замінюються квазіелементами з імовірністю безвідмовної роботи, рівною обчисленій імовірності безвідмовної роботи цих підсистем. При необхідності таку процедуру можна виконати декілька разів, до тих пір, поки залишилися квазіелементи простої структури, методика розрахунку надійності яких також відома.

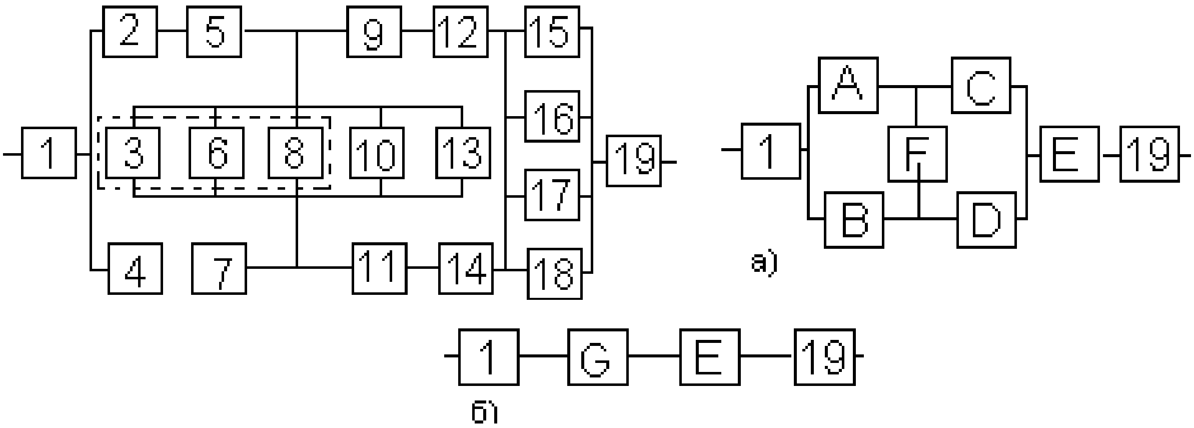


Рис. 3.11. Етапи перетворення складних систем

В якості прикладу розглянемо комбіновану систему, представлену на рис. 3.11. Тут елементи 2 і 5, 4 і 7, 9 і 12, 11 і 14 попарно утворюють один з одним послідовні з'єднання. Замінимо їх відповідно квазіелементами А, В, С, Д, для яких розрахунок надійності елементарно виконується за формулами п. 3.7. Елементи 15, 16, 17 і 18 утворюють паралельне з'єднання (п. 3.8), а елементи 3, 6, 8, 10 і 13 – систему "3 з 5" (п. 3.10). Відповідні квазіелементи позначимо Е і F. У результаті перетворена схема набуде вигляду на рис. 3.11, а. На ній в свою чергу елементи А, В, С, Д, F утворюють мостову схему (п. 3.11), яку замінюємо квазіелементом 6. Схема, отримана після таких перетворень (рис.3.11, б), утворює послідовне з'єднання елементів 1, G, E, 19, для яких справедливі співвідношення п. 3.7.

Таким чином, крок за кроком, ми замінили складну схему простою, з відомими надійностями блоків, які пораховано на проміжних етапах.