Практична робота №2. **Похідна функції.**

Знаходження похідних функцій

Мета. Виробити практичні навички знаходження похідних функцій на основі правил та формул диференціювання.

1. Означення похідної функції

Нехай задано функцію $y=f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_0 цього проміжку, надамо значенню x_0 довільного приросту Δx (число Δx може бути як додатним, так і від'ємним), але такого, щоб точка $x_0+\Delta x$ належала даному проміжку.

Тоді

1) обчислимо в точці x_0 приріст $\Delta y=\Delta f(x_0)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) складемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};$$

3) знайдемо границю цього відношення за умови, що $\Delta x \to 0$, тобто: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

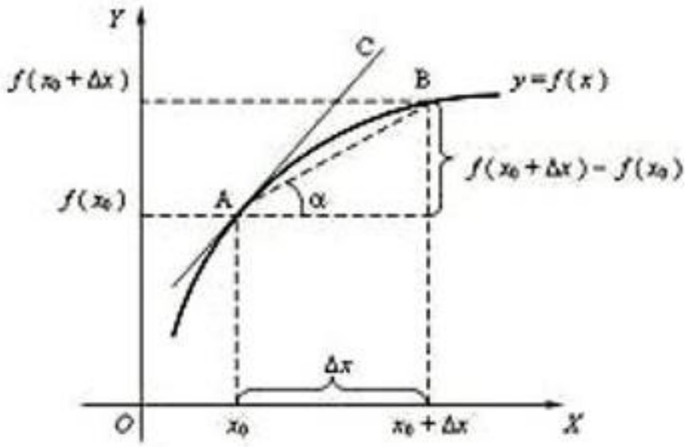

Рис.1

Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y'.

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Функцію, яка має похідну в точці x_0, називають *диференційованою* в цій точці. Функцію, яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називають *диференційованою* на цьому проміжку. Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

2. Геометричний і механічний зміст похідної

Геометричний зміст похідної: значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної.

$k = tg\alpha = f'(x_0)$ - кутовий коефіцієнт дотичної з рівнянням $y = kx + b$.

Механічний зміст похідної: похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин.

Якщо функція $S=S(t)$ описує рух матеріальної точки, тобто залежність пройденої відстані S від часу t, то її похідна задає залежність миттєвої швидкості v від часу t, $S'(t) = v(t)$; похідна швидкості відповідно є прискоренням $v'(t) = a(t)$

3. Таблиця похідних елементарних функцій

1. $C' = 0$, де С – константа
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a \; (a > 0,\ a \neq 1)$, $\left(e^x\right)' = e^x$
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a} \; (a > 0,\ a \neq 1)$, $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$
5. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$
6. $\left(\sin x\right)' = \cos x$
7. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

12. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

4. Правила диференціювання

Теорема 1. *(Похідна суми функцій)* Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані в точці x, то в цій точці буде диференційованою і сума цих функцій. Причому, похідна суми функцій дорівнює сумі похідних від цих функцій, тобто $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = 2 - x + x^2$.

Розв'язання: $y' = (2)' - (x)' + (x^2)' = -1 + 2x$.

Теорема 2. *(Похідна добутку функцій)* Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ диференційовані в точці x, то в цій точці буде диференційований добуток цих функцій і має місце формула $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Приклад2. Знайти похідну функції $y = x^3 \sin x$.

Розв'язання: $y' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$.

Наслідок 1. Сталий множник можна виносити за знак похідної $(Cu(x))' = Cu'(x)$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 5tgx$.

Розв'язання: $y' = 5(tgx)' = 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5}{\cos^2 x}$.

Наслідок 2. Похідна добутку декількох диференційованих функцій дорівнює сумі добутків похідної кожного з цих множників на всі інші.

$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, де u, v, w – диференційовані функції.

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x \cdot e^x \cdot \sin x$.

Розв'язання:

$$y' = x'e^x \sin x + x(e^x)' \sin x + xe^x (\sin x)' = e^x \sin x + xe^x \sin x + xe^x \cos x =$$
$$= e^x (\sin x + x \sin x + x \cos x).$$

Теорема 3. *(Похідна частки функцій)* Якщо функції $u(x)$та $v(x)$ диференційовані в точці x і $v(x)\neq 0$, то частка цих функцій також диференційована в точці x і має місце формула $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Приклад 5. Знайти похідну функції $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

Розв'язання: $y'=\dfrac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Наслідок 3. $\left(\dfrac{C}{v(x)}\right)'=-\dfrac{Cv'(x)}{v^2(x)}$.

Приклад 6. Знайти похідну функції $y=\dfrac{2}{\sin x}$.

Розв'язання: $y'=-\dfrac{2(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\dfrac{2\cos x}{\sin^2 x}=-\dfrac{2ctgx}{\sin x}$.

5. Похідні вищих порядків

Похідна функції теж є функцією, і якщо вона диференційована, то і від неї можна взяти похідну. Таку похідну називають другою похідною, або похідною другого порядку і позначають y'', $f''(x)$.

Отже, $y''=(f'(x))'$

Аналогічно, $y'''=(f''(x))'$ і т.д.

Таким чином, похідною n-го порядку функції *y = f(x)* називають похідну від похідної *(n – 1)-го* порядку, при умові її існування, і позначають:

$y^{(n)}=(f^{(n-1)}(x))'$.

Приклад 7. Знайти другу похідну функції $f(x)=y^{\sin x}$

Розв'язання: Знайдемо першу похідну

$f'(x)=e^{\sin x}(\sin x)'=e^{\sin x}\cos x.$

Знайдемо другу похідну:

$f''(x)=e^{\sin x}(\cos x)'+(e^{\sin x})'\cos x=e^{\sin x}(-\sin x)+e^{\sin x}\cos x\cdot\cos x=e^{\sin x}(\cos^2 x-x-\sin x).$

Відповідь: $f''(x)=e^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x).$

Приклад 8. Знайти другу похідну функції $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ і обчислити її значення при $x=2$.

Розв'язання: Знайдемо першу похідну:

$$y'=\frac{(x-1)(x^2+1)'-(x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

Диференціюємо y' і знайдемо другу похідну:

$$y''=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)'-((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(x-1)^2(2x-2)-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x-1)2(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3}=\frac{2\cdot 2}{(x-1)^3}=\frac{4}{(x-1)^3}\quad .$$

Обчислимо значення другої похідної при $x=2$

$$y''(2)=\frac{4}{(2-1)^3}=4.$$

Відповідь: $y''(2)=4.$

Контрольні питання

1. Яка функція називається диференційованою в точці?
2. Який геометричний зміст похідної?
3. Сформулюйте теорему похідної складеної функції.
4. Сформулюйте теореми знаходження похідних суми, добутку і частки функцій.
5. Що таке друга похідна функції?
6. Наведіть приклад функції, для якої існує перша похідна, але не існує друга похідна функції.
7. Що таке параметрично задана функція?
8. Як знайти похідну функції заданої параметрично.

Завдання практичної роботи №2. **Знаходження похідних**

1. Знайти першу похідну функції. Обчислити значення похідної при *x=2*.

1) а) $y = e^x \sin x - 3\sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{x-5}{\sqrt{x}}$;

г) $y = -tgx + 2\sin x \cos x$; д) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 1}$;

2) а) $y = 4x^3 + 7\lg x \ln x$; б) $y = \dfrac{\ln x}{x-1}$;

г) $y = 4\arcsin x \ln x - \dfrac{2}{x}$; д) $y = \dfrac{x^3}{\sin x - 2}$;

3) а) $y = 2arctgx - 4xe^x$; б) $y = \dfrac{\sin x}{\ln x + 1}$;

г) $y = 6x\sin x - 5\sqrt{x}$; д) $y = \dfrac{x^2 + 3}{tgx}$;

4) а) $y = 5\sin x \cos x - \dfrac{1}{x}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-7}$;

г) $y = 2 \cdot 3^x + x^3 \ln x$; д) $y = \dfrac{x-1}{\cos x}$;

5) а) $y = -tgx \cdot \ln x - 2\log_4 x$; б) $y = \dfrac{x-5}{\sqrt{x^5}}$;

г) $y = 3e^x + \sqrt{x}\sin x$; д) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x + 2}$;

6) а) $y = tgx \cdot \cos x - 3x^5$; б) $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{x} + 4}$;

г) $y = \dfrac{4}{x} + 2e^x \cdot \arccos x$; д) $y = \dfrac{\sin x - 5}{x^2}$;

7) а) $y = -\dfrac{3}{x} + \cos x \cdot \lg x$; б) $y = \dfrac{x-5}{\sqrt{2x}}$;

г) $y = x^2 \cos x - 5arctgx$; д) $y = \dfrac{1+x}{\arccos x}$;

8) а) $y=2x^2e^{-x}+\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{\sin x-5}{\lg x}$;

г) $y=3\cdot 6^x\cos x-\sin x$; д) $y=\frac{\cos x+5}{\ln x}$;

9) а) $y=-\frac{6}{x}+3e^x x^4$; б) $y=\frac{e^x}{\sin x-1}$;

г) $y=x^3\ln x-4\arccos x$; д) $y=\frac{tgx-5}{e^x}$;

10) а) $y=-7x\arcsin x+\sqrt{x}$; ё б) $y=\frac{arctgx+1}{x^2}$;

г) $y=-2x^5\ln x-ctgx$; д) $y=\frac{x^3}{e^x+1}$;

11) а) $y=x^4-6\cdot 2^x e^x$; б) $y=\frac{ctgx}{x^2+1}$;

г) $y=2^x tgx+3x^3$; д) $y=\frac{tgx-1}{\sqrt{x}}$;

12) а) $y=-2\ln x\cdot\cos x+3\sqrt{x}$; б) $y=\frac{\cos x+2}{\sin x}$;

г) $y=7\arcsin x-x^2\cdot\sin x$; д) $y=\frac{\sqrt{x}-3}{\log_2 x}$;

13) а) $y=3\sin x\cdot\ln x-\frac{1}{x}$; б) $y=\frac{1+\sin x}{\cos x}$;

г) $y=5^x\sin x-2\arcsin x$; д) $y=\frac{x^3}{arctgx-1}$;

14) а) $y=-3x^2 arctgx+\cos x$; б) $y=\frac{tgx+4}{e^x}$;

г) $y=2\cdot 2^x\sin x+3\sqrt{x}$; д) $y=\frac{e^x+5}{x^3}$;

15) а) $y=-3tgx+2\sin x\cdot\lg x$; б) $y=\frac{arcctgx-1}{\sqrt{x}}$;

г) $y=-3x^2+7tgx\cdot\ln x$; д) $y=\frac{1-\arcsin x}{\sin x}$;

2. Знайти другу похідну функції:

1) $y = e^x \sin x - 3\sqrt{x}$
2) $y = 4x^3 + 7\lg x \ln x$
3) $y = 2arctgx - 4xe^x$
4) $y = 5\sin x \cos x - \dfrac{1}{x}$
5) $y = -tgx \cdot \ln x - 2\log_4 x$
6) $y = tgx \cdot \cos x - 3x^5$
7) $y = -\dfrac{3}{x} + \cos x \cdot \lg x$
8) $y = 2x^2 e^{-x} + \dfrac{1}{x}$
9) $y = -\dfrac{6}{x} + 3e^x x^4$
10) $y = -7x \arcsin x + \sqrt{x}$
11) $y = x^4 - 6 \cdot 2^x e^x$
12) $y = -2\ln x \cdot \cos x + 3\sqrt{x}$
13) $y = 3\sin x \cdot \ln x - \dfrac{1}{x}$
14) $y = -3x^2 arctgx + \cos x$
15) $y = -3tgx + 2\sin x \cdot \lg x$

3. Розв’язати задачу:

1) Точка рухається прямолінійно за законом $S = \sin^2 t$. Знайдіть момент часу *t*, коли прискорення точки дорівнює *1*.
2) Знайдіть швидкість і прискорення точки, яка рухається прямолінійно за законом $S = \sin 2t$ в момент часу $t = \dfrac{\pi}{8}$ *с*.(S - в метрах, t - в секундах).
3) Точка рухається прямолінійно за законом $S = \dfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 3$ *(м)*. Знайдіть швидкість та прискорення точки в момент часу *t=3с*.
4) Точка рухається прямолінійно за законом $S = \dfrac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 45$. Обчислити її швидкість та прискорення в моментах часу *t=5с.*
5) Дві точки рухаються прямолінійно за законами $S_1 = \dfrac{2}{3}t^3 + t^2 + t^2 + 14$ та $S_2 = \dfrac{2}{3}t^3 - \dfrac{1}{2}t^2 + 11t + 8$. В який момент часу їх швидкості будуть рівні?

6) Точка рухається прямолінійно за законом $S = \sin^2 t$. Знайти момент часу, коли її прискорення дорівнює нулю.

7) Температура тіла T змінюється з часом t за законом $T = 0{,}2t^2$. Яка швидкість нагріву тіла в момент часу *t=10c*.

8) Точка рухається прямолінійно за законом $S = 2t^3 + t^2 - 4$. Знайти момент часу, коли прискорення рівне *1*.

9) Точка рухається прямолінійно за законом $S = 2t^2 + t^2 + 4$. Знайти прискорення точки в момент часу *t=3c*.

10) Точка рухається прямолінійно за законом $S = 2t^3 - 4t^2 + 5t$. Знайти прискорення точки в момент часу *t=2c*.

11) Дві точки рухаються за законами $S_1 = 2t^3 - 4t^2 + 5t$ та $S_2 = 2t^3 - 1{,}5t^2$. Знайти значення часу, коли їх швидкості рівні.

12) Точка рухається прямолінійно з швидкістю, яка змінюється за законом $V = 6t^2 - 2t = 11$. Знайти момент часу, коли прискорення точки рівне *2*.

13) Знайти швидкість та прискорення точки в момент часу *t=3c*, якщо вона рухається прямолінійно за законом $S = t^3 + 5t^2 + 4$.

14) Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = 3t^2 + 2t + 3$. В який момент часу тіло зупиниться?

15) Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} - 3t^2 + 4$. В який момент часу прискорення рівне нулю?