Кафедра БІ та Т

○ Біомедична інженерія
○ Телекомунікації та радіотехніка

Комп’ютерна томографія

Математичні основи формування та обробки томографічних зображень

Теорема про центральний переріз

Формулювання самої теореми таке:
Має місце рівність

$$\hat{c}(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\hat{q}\left(\rho,\theta+\pi/2\right), \qquad (1)$$

$\hat{c}(\rho,\theta)$ – двовимірне ПФ;

$\hat{q}\left(\rho,\theta+\pi/2\right)$ – одновимірн е ПФ по першому аргументу;

ρ,θ – полярні координати у площині $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2)=(u,v)$:

$u=\rho\cos\theta,\ v=\rho\sin\theta.$

Тлумачення цього результату: двовимірне ПФ $\hat{c}(\rho,\theta)$ функції $c(x,y)$ при фіксованому значенні кута θ дорівнює одновимірному ПФ проекції q при значенні $\theta+\pi/2$ кута повороту. Значення спектра $\hat{c}(\rho,\theta)$ при $\theta=const$ є “перерізом” поверхні $z=\hat{c}(\rho,\psi)$ площиною $\psi=\theta=const$, звідки і випливає назва теореми.

Метод Фур'є-синтезу

Рівність (1) є основою для розв'язку задачі РТ КТ. Формально цей розв'язок можна записати так:

$$c(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{q}(\rho,\theta+\pi/2)e^{i(ux+vy)}dudv. \qquad (2)$$

Особливості практичного використання (2):

1) значення ядра $\hat{q}(l,\theta)$ відомі лише у вузлах дискретної полярної сітки координат, які не збігаються з вузлами декартової сітки, необхідних при дискретизації (2). Природній спосіб вирішення цієї проблеми – інтерполяція значень функції у точці, де її не задано, через її значення у точках, де вона відома;

2) підінтегральна функція у (2) при збільшенні показника стапеня експоненти швидко осцилює, в силу чого стандартні квадратурні формули перестають працювати. Способи вирішення цієї проблеми:

а) особливі алгоритми та програми для обчислень інтегралів від швидкоосцилюючих функцій;

б) відсікання високих частот.

Метод зворотної проекції

Метод базується на представленні проекції у вигляді (так само, як і у попередньому методі)

$$q(l,\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}c(x,y)\delta(s+x\sin\theta-y\cos\theta)dxdy,$$

проте порядок його обчислення інший. Математично – це ПФ згортки. З цією метою вводиться так звана “зворотна проекція” $S(x,y)$ (див. вираз (2) з лекції “Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно густини та його розв’язок”), але “повна” його версія: множник $1/2\pi$ та інтегрування по повному колу у 360 градусів, тобто це середнє по куту від вихідного набору проекцій $q(l,\theta)$.

Попередня обробка вихідної інформації за (2) згаданої лекції значно покращує кінцевий результат – томографічне зображення, що пов’язано з фільтруючими (щодо шумів апаратури) властивостями операції зворотного проектування.

Кінцева форма розв’язку – вираз (4) з лекції “Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно густини та його розв’язок”.

Метод фільтрації

На практиці з’ясовано, що метод ПФ, як і метод згортки, дають великі, іноді неприпустимі похибки, які пов’язано з тим, що розглядувана задача відновлення внутрішньої структури є некоректно поставленою – малим змінам вхідних даних можуть відповідати великі зміни розв’язків.

На практиці некоректність починає проявлятись з деякого порогу дискретизації: чим точніше намагатись розв’язати задачу (подрібнюючи сітку дискретизації, збільшуючи кількість членів розкладу шуканого розв’язку), тим гіршим буде розв’язок. Проблему некоректності вирішують, у принципі, методи регуляризації. Їхніми різновидами можна вважати методи, які використовують відкидання (відсікання, фільтрацію) високочастотних складових розв’язку.

Способи фільтрації:

- у просторі спектрів Фур’є з використанням представлення розв’язку через звичайну проекцію у формі (2);
- використовуючи розв’язок у формі виразу (4) з лекції “Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно густини та його розв’язок”;
- використовуючи фільтрацію у просторі звичайних проекцій (2) по змінній *s*.

Одновимірне (лінійне) ІР Фредгольма І-го роду

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x),\ c \le x \le d$$

$K(x,s)$ – ядро (фізично - апаратна функція, характеристика напрямленості тощо);

$f(x)$ – права частина, відома функція;

$y(s)$ – шукана функція;

x – зовнішня змінна;

s – внутрішня змінна;

$[c;d]$ – задана область вимірювання $f(x)$;

$[a;b]$ – задана область пошуку $y(s)$.

Приклади задач, де використовують це ІР: відновлення неперервного спектру у зворотній задачі спектроскопії, редукція тривалих сигналів, відновлення сигналів у статичних системах, розпад клітин та радіоактивних елементів, вентиляція легень тощо.

Інтегральні рівняння та інтегральні перетворення

Одновимірне ІР Фредгольма І-го роду з різницевим ядром:

$$\int_a^b K(x-s)y(s)ds = f(x),\ c \le x \le d$$

***Приклади задач, де використовують це ІР*:** синтез магнітного поля на осі котушки МРТ томографа.

Одновимірне ІР Фредгольма І-го роду типу згортки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)y(s)ds = f(x),\ -\infty \le x \le \infty$$

***Приклади задач, де використовують це ІР*:** зняття впливу апаратурних спотворень, відновлення змазаних фотозображень, зворотна задача голосової акустики.

Інтегральні рівняння та інтегральні перетворення

Двовимірне ІР Фредгольма І-го роду типу згортки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(x_1 - s_1, x_2 - s_2)\, y(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 = f(x_1, x_2), \; -\infty \le x_1, x_2 \le \infty$$

Приклади задач, де використовують це ІР: визначення густини речовини у РТ КТ, візуалізація результатів на дисплеї, відновлення дефокусованих зображень, зворотна задача діагностики плазми.

Одновимірне ІР Фредгольма ІІ-го роду:

$$y(x) + \int_a^b K(x, s)\, y(s)\, ds = f(x), \; a \le x \le b$$

Приклади задач, де використовують це ІР: відносвлення сигналів у статичних системах.

Нелінійне одновимірне ІР Урисона І-го роду:

$$\int_a^b K[x, s, y(s)]ds = f(x), \ c \le x \le d$$

Приклади задач, де використовують це ІР: синтез магнітного поля на осі котушки МРТ томографа.

Лінійне одновимірне ІР Вольтера І-го роду:

$$\int_a^x K(x, s)y(s)ds = f(x), \ a \le x \le b$$

Приклади задач, де використовують це ІР: відновлення сигналу у динамічній системі без зворотного зв'язку.

Інтегральні рівняння та інтегральні перетворення

Лінійне одновимірне ІР Вольтера І-го роду типу згортки на напівосі:

$$\int_0^x K(x-s)y(s)ds = f(x),\; x \ge 0$$

Приклади задач, де використовують це ІР: визначення імпульсної характеристики а теорії автоматичного керування.

Одновимірне перетворення Фур'є:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} y(t)dt = Y(\omega),\; -\infty < x < \infty$$

Двовимірне перетворення Фур'є:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} y(t_1, t_2)dt_1 dt_2 = Y(\omega_1, \omega_2),\; -\infty < \omega_{1,2} < \infty$$

Коректність та некоректність за Адамаром

Багато числових методів розв'язку ІР зводиться до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) виду

$$Ay = f, \tag{3}$$

A – матриця розміром m×n;

y – шуканий вектор-стовпчик розміром n×1;

f – заданий вектор-стовпчик розміром m×1.

Визначення. Задачу розв'язку (3) називають коректною або коректно-поставленою, якщо:

1) розв'язок існує;

2) розв'язок єдиний;

3) розв'язок стійкий.

Якщо хоча б одна з цих умов не виконується, то задачу називають некоректною або некоректно-поставленою.

Коректність та некоректність за Адамаром

Адамар висунув твердження, що некоректні задачі не мають фізичного змісту. Іншими словами, якщо рівняння, яке описує деяку прикладну задачу, є некоректним, то або задача є штучною (нереальною), або її описано математично неадекватно.

Приклади СЛАР, задача розв'язку яких некоректна.

Приклад 1. Перевизначена СЛАР.

$$2y_1 - 3y_2 = -4$$

$$-y_1 + 2y_2 = 3$$

$$y_1 + 4y_2 = 15$$

Така СЛАР не має розв'язку, адже кожній парі рівнянь з цих трьох рівнянь відповідатиме свій розв'язок, тобто порушено п. 1 коректності за Адамаром.

Приклад 2. Недовизначена СЛАР.

$$2y_1 - 3y_2 = -4$$

У такої СЛАР безліч розв'язків, тобто порушено п. 2 коректності за Адамаром.

Коректність та некоректність за Адамаром

Приклад 3. Нестійка СЛАР.

$$\begin{aligned} 2y_1 - 3y_2 &= 3 \\ -1{,}33y_1 + 2y_2 &= -1{,}99 \end{aligned}$$

Ця СЛАР має єдиний існуючий розв'язок: $y_1 = 3;\ y_2 = 1$.

Але, якщо її праву частину дещо змінити:

$$\begin{aligned} 2y_1 - 3y_2 &= 3{,}01 \\ -1{,}33y_1 + 2y_2 &= -2, \end{aligned}$$

тобто внести відносні похибки менші за 0,5 %, то її розв'язок:

$$y_1 = 2\ (\delta y_1 > 30\,\%);\ y_2 = 0{,}33\ (\delta y_2 > 60\,\%).$$

Способи вибору параметра регуляризації

Такими способами є:

1) **способ нев'язки**, згідно якого параметра регуляризації вибирають з умови:

$$\left\| Ay_\alpha - f \right\| = \delta,$$

$\left\| \cdot \right\|$ – норма вектора (матриці);

δ – відносна похибка правої частини системи (3).

2) **спосіб підбирання**: шукають регуляризовані розв'язки для ряду "розумних" значень параметра регуляризації, а кінцевий вибір його значення роблять на основі додаткової інформації про розв'язок, в основному, візуально, опираючись на таке:

- зменшення значення параметра регуляризації збільшує нестійкість, тобто збільшує контрастність зображення;

- збільшення значення параметра регуляризації зменшує нестійкість, тобто зменшує контрастність зображення.

3) **асимптотичний спосіб** (придатний для невеликих значень δ): за основу беруть такий вираз

$$\alpha = C\delta^2, \text{ де } C = \text{const} > 0.$$