Кафедра БІ та Т
○ Біомедична інженерія
○ Телекомунікації та радіотехніка

Комп'ютерна томографія

Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду відносно густини та його розв'язок

Загальні положення

Існують математичні прийоми, за допомогою яких інтегральне рівняння Радона

$$\boxed{\int\limits_{L(l,\theta)} c(x,y)\,ds = q(l,\theta)}$$

приводиться до так званої стандартної форми – двовимірного інтегрального рівняння Фредгольма І-го роду типу згортки:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c(x',y')\,dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} = S(x,y),} \qquad (1)$$

де $S(x,y)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} q(x\cos\theta + y\sin\theta,\theta)\,d\theta,$ (2)

$K(x-x',y-y')=\dfrac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$ - ядро цього рівняння;

c(x, y) - шукана функція.

Розв’язок вихідного ІР методом ПФ

Розв’язок (1) методом перетворення Фур’є (ПФ) дає такий результат:

$$\boxed{c(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{c}(\omega_1,\omega_2)e^{-i(\omega_1 x+\omega_2 y)}d\omega_1 d\omega_2,} \tag{3}$$

де $\boxed{\hat{c}(\omega_1,\omega_2) = \dfrac{\hat{S}(\omega_1,\omega_2)}{\hat{K}(\omega_1,\omega_2)}} = \dfrac{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}{2\pi}\hat{S}(\omega_1,\omega_2),$ (4)

$$\hat{S}(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}S(x,y)e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y)}dxdy, \tag{5}$$

$$\hat{K}(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x,y)e^{i(\omega_1 x+\omega_2 y)}dxdy = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}. \tag{6}$$

Аналіз розв'язку

Ці складові частини ще називають:

(4) – ПФ розв'язку (його спектр, Фур'є-образ);

(5) – ПФ правої частини (1);

(6) – ПФ ядра рівняння (1).

Зверніть увагу на чудову властивість методу ПФ:

для прямої задачі шуканий вихідний спектр є добутком спектра вхідного сигнала на спектр апаратної функції,

а для зворотної задачі (томографічної у даному випадку) спектр вхідного сигнала є часткою вихідного спектра до спектра апаратної функції:

$$\hat{c}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\hat{S}(\omega_1, \omega_2)}{\hat{K}(\omega_1, \omega_2)}.$$

Аналіз розв'язку

Незважаючи на те, що розв'язок (3) строгий, він нестійкий.

Чому? Через неминучі похибки вимірювання функції $I(l,\theta)$ будуть мати похибки функції $q(l,\theta)$, $S(x,y)$.

При цьому похибки зазвичай мають компоненту білого шуму, тобто постійну (незалежну від частот ω_1, ω_2) компоненту. В результаті:

$$\hat{S}(\omega_1,\omega_2) \xrightarrow{\omega_1,\omega_2\to\infty} const \Rightarrow \hat{c}(\omega_1,\omega_2) \xrightarrow{\omega_1,\omega_2\to\infty} \infty$$

і інтеграл в (3) розбіжний!

Регуляризований розв’язок

На **практиці інтеграл у виразі (3)** (тобто зворотне неперервне перетворення Фур’є (ЗНПФ)) **обчислюють через** кінцеву суму (дискретне перетворення Фур’є (ДПФ), **швидке перетворення Фур’є (ШПФ)**) **до кінцевих максимальних значень частот** $\omega_1,\ \omega_2$ **(тобто має місце усікання по частотах) і ефект нестійкості зменшується, хоча і залишається.**

Регуляризований розв'язок

У методі Тихонова замість

$$\hat{c}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\hat{S}(\omega_1,\omega_2)}{\hat{K}(\omega_1,\omega_2)}=\frac{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}{2\pi}\hat{S}(\omega_1,\omega_2),$$

використовують **регуляризований розв'язок:**

$$\boxed{\hat{c}_\alpha(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{1+\alpha\omega^2\left(\omega^2+1\right)}\hat{S}(\omega_1,\omega_2),} \qquad (7)$$

де $\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$;

$\boxed{\alpha>0 \text{ - параметр регуляризації.}}$

Особливості регуляризованого розв'язку (7):

1) $$\hat{c}_{\alpha}(\omega_1, \omega_2) \xrightarrow{\omega_1, \omega_2 \to \infty} 0$$

і тому інтеграл в (3) збіжний.

2) Подавлення високих частот у (7) здійснюється акуратніше, ніж у методах, які використовують усікання по частоті.

3) Параметр регуляризації фізично відповідає за подавлення високих частот. Тому змінюючи його значення, можна доволі просто це робити.

Регуляризований розв'язок

Який фізичний зміст за високими частотами та чому їх подавляють?

З однієї сторони, **високі частоти потрібні для високої роздільної здатності томограм** (розрізнення близьких деталей тощо), оскільки саме вони несуть левову частку цієї інформації.

Схожий результат свого часу виявили в електрокардіографії, коли стали переходити від аналогових кардіографів до цифрових: коли розширили сугу пропускання цифрових кардіографів, порівняно з аналоговими, стали виявляти деталі, раніше не помітні на кардіограмах, отриманих на аналогових приладах.

Тому частка високих частот має бути такою, щоб не втратити важливу інформацію, зокрема на томограмі.

Проте, **з іншої сторони, високі частоти найсильніше реагують на похибки, і їх потрібно обмежувати.**

Обом цим вимогам, у пропорції, яку і визначає параметр регуляризації, задовольняє метод регуляризації Тихонова.