Кафедра БІ та Т
Біомедична інженерія
Телекомунікації та радіотехніка

Електродинаміка та техніка НВЧ

Хвилеві матриці

Загальні положення

Багатополюсник (багатоплечевий пристрій) НВЧ – будь-яка комбінація провідників, діелектриків і магнітодіелектриків та інших елементів НВЧ, що має декілька входів у вигляді поперечних перерізів ЛП із заданими типамихвиль у кожній лінії.

Площина відліку – поперечний переріз, у якому вимірюють параметри хвиль.

Якщо цей пристрій має N плечей, то кажуть що він має 2N полюсів.

Наприклад:

1 плече – двополюсник; 2 плеча – чотириполюсник; 3 плеча – шестиполюсник і т.д.

При збудженні багатополюсника зі сторони однієї чи кількох ЛП всередині його виникає складне електромагнітне поле, яке можна обчислити шляхом розв’язання відповідної задачі електродинаміки чи визначити експериментально. **Проте у більшості випадків становить інтерес не це поле, а розподіл потужності джерел збудження між окремими ЛП і типами хвиль у них.** З цієї точки зору багатополюсник розглядають як “чорну хвилю”, властивості якої описують системою формальних параметрів. **Під це добре підходить матричне описання.**

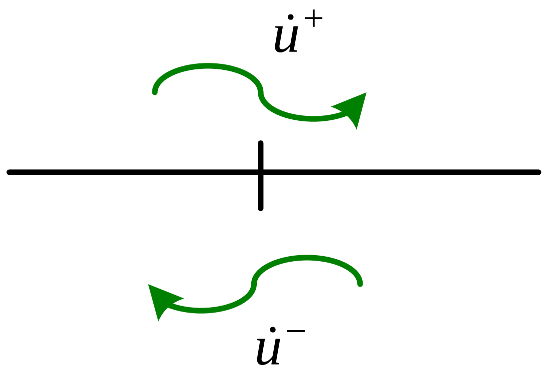
Загальні положення

Функціональні особливості хвилеводного вузла, які визначають його взаємодію з іншими елементами та вузлами тракту, зручно описувати за допомогою декількох коефіцієнтів, об’єднаних у матрицю. Будова вузлів може бути різною, проте однакові чи схожі матриці. Наприклад, матриці всіх резонаторів ідентичні, хоча їхня форма, принцип дії, використовуваний тип коливання можуть суттєво відрізнятись.

Загальні положення

У теорії кіл НВЧ склалось два способи такого описання:

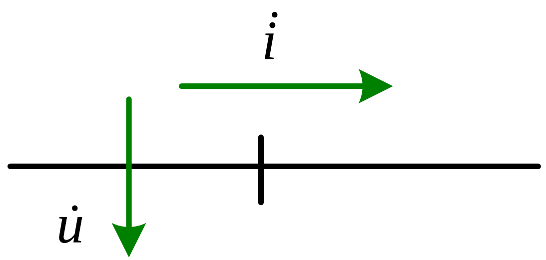
1) х**вилевий** (використовують в описанні амплітуди падаючих та відбитих хвиль, легко стикується з можливістю експериментальної перевірки)



$$\dot{u}^{+} = \frac{\dot{u} + \dot{i}}{2};$$

$$\dot{u}^{-} = \frac{\dot{u} - \dot{i}}{2}.$$

2) **класичний** (використовують в описанні нормовані напруги та струми, можна використати всі “матричні” напрацювання схем низьких частот)



$$\dot{u} = \dot{u}^{+} + \dot{u}^{-};$$

$$\dot{i} = \dot{u}^{+} - \dot{u}^{-}.$$

Загальні положення

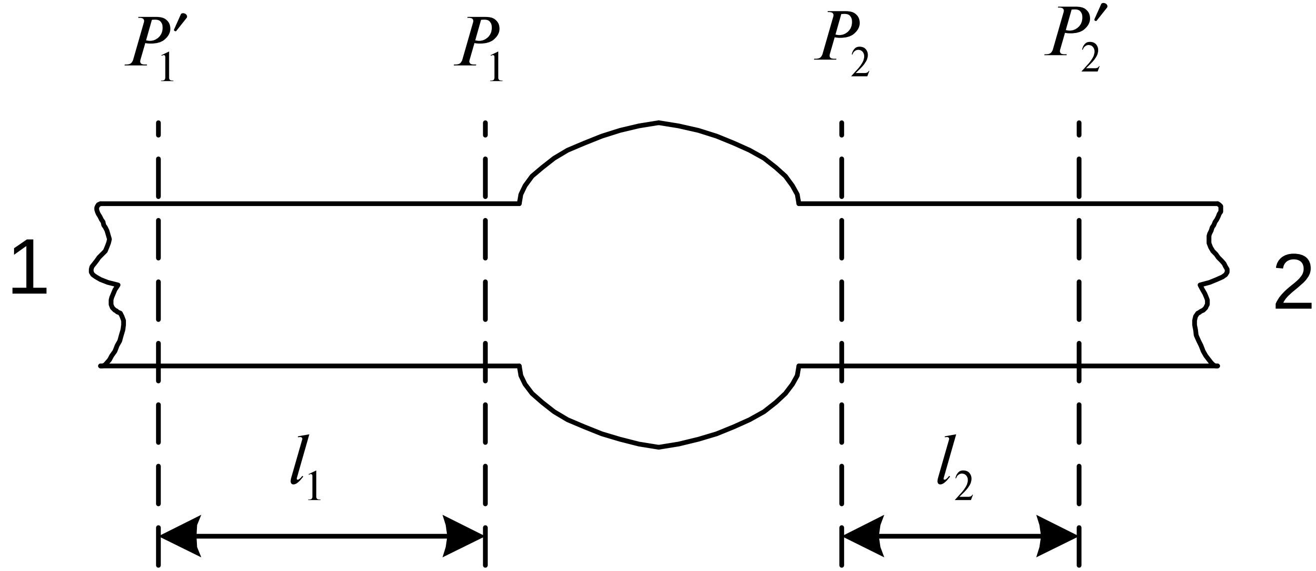
У класичній теорії кіл використовуються матриці опорів **Z**, провідності **Y**, передачі **A**, тощо, які пов’язують між собою напруги та струми на вході та виході лінійного чотириполюсника. У лініях, довжина яких є порівняною або більшою за довжину хвилі, напруга і струм (нагадаємо, що для хвилеводів ці поняття вводяться лише умовно) змінюються від точки до точки, тому модуль і фаза елементів цих матриць залежить від положення площини відліку у кожному плечі хвилеводного вузла.

Хвильові матриці (хвильова матриця розсіяння ***S*** і хвильова матриця передачі ***T***) об’єднують коефіцієнти зв’язку між величинами падаючих та відбитих хвиль в плечах (хвильових каналах) даного лінійного вузла.

Згідно теоретичних положень кожне плече хвилеводного вузла можна замінити еквівалентною двопровідною лінією, а сам хвилеводний вузол – багатополюсником, який містить $2N$-полюсів (N– кількість плечей цього багатополюсника).

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

Розглянемо хвилеводний вузол, який складається з двох плечей – рисунок. Тут P_1 – площина відліку плеча 1, P_2 – площина відліку плеча 2.



У відповідність такому двоплечевому вузлу поставимо еквівалентну модель – чотириполюсник класичної теорії кіл (еквівалентність вузла та його моделі розуміється в сенсі рівності їхніх матриць). Позначимо нормовані амплітуди комплексних напруг падаючих (вхідних) хвиль у вузол через $\dot{U}_m^+ \ (m=1,\ 2)$, а відбитих (вихідних) хвиль через $\dot{U}_n^+ \ (n=1,\ 2)$. У загальному випадку значення $\dot{U}_n^-$ залежить від амплітуд і фаз падаючих хвиль всіх плечей вузла.

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

Тому співвідношення між хвилями в плечах вузла записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^- &= \dot{S}_{11}\dot{U}_1^+ + \dot{S}_{12}\dot{U}_2^+ \\ \dot{U}_2^- &= \dot{S}_{21}\dot{U}_1^+ + \dot{S}_{22}\dot{U}_2^+ \end{aligned} \qquad (1)$$

$\dot{S}_{mn}$ – комплексні коефіцієнти, які характеризують хвилеводний вузол.

Систему рівняння (1) зручно записати у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1^- \\ \dot{U}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1^+ \\ \dot{U}_2^+ \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Перший індекс у позначенні елемента матриці $\dot{S}_{mn}$ відповідає номеру рядка, другий – номеру стовпчика.

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

У скороченій формі

$$\boxed{\dot{\vec{U}}^{-} = [\dot{S}]\,\dot{\vec{U}}^{+}} \qquad (3)$$

Тут

$$[\dot{S}] = \begin{pmatrix} \dot{S}_{11} & \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{21} & \dot{S}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}e^{i\varphi_{11}} & S_{12}e^{i\varphi_{12}} \\ S_{21}e^{i\varphi_{21}} & S_{22}e^{i\varphi_{22}} \end{pmatrix}$$

– **матриця розсіяння,** яка зв'язує нормовані амплітуди всіх відбитих хвиль вузла з амплітудами падаючих хвиль цього вузла. Її коефіцієнти описують розподіл енергії, яка надходить у вузол з кожного плеча.

Значення елементів матриці розсіяння повністю визначаються будовою вузла та не залежать від того, які навантаження та джерела увімкнуті в його плечі. У цьому безсумнівна перевага описання хвилеводних вузлів матрицею розсіяння порівняно з іншими. Більше того, елементи цієї матриці легко виміряти практично. Саме тому ця матриця є основним інструментом аналізу хвилеводних вузлів.

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

Щодо фізичного змісту елементів матриці розсіяння:

$$\dot{S}_{nn} = \frac{\dot{U}_n^-}{\dot{U}_n^+},$$

тобто це **коефіцієнт відбиття хвилі в *n* - му плечі;**

$$\dot{S}_{mn} = \frac{\dot{U}_m^-}{\dot{U}_n^+}, \ (m \neq n),$$

тобто це **коефіцієнт передачі хвилі з *n* - го плеча в *m*- е плече.**

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

Повертаючись до питання вибору площин відліку чотириполюсника (багатополюсника у загальному випадку), то зауважимо, що вибір площин відліку є цілком довільним і, зазвичай, визначається міркуваннями зручності. При перенесенні площин відліку у напрямку від чотириполюсника у перерізі P_1' та P_2', на відстані l_1 та l_2 відповідно (рисунок на слайді 6) матриця розсіяння $\left[\dot{S}\right]$ перетворюється у матрицю $\left[\dot{S}'\right]$

$$\dot{S}'_{11} = \dot{S}_{11}e^{-i2\gamma_1 l_1}, \qquad \dot{S}'_{12} = \dot{S}_{12}e^{-i(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2)},$$

$$\dot{S}'_{21} = \dot{S}_{21}e^{-i(\gamma_2 l_2+\gamma_1 l_1)}, \quad \dot{S}'_{22} = \dot{S}_{22}e^{-i2\gamma_2 l_2}.$$

γ_1, γ_2 - сталі поширення у плечах 1 та 2 відповідно.

У загальному випадку ці формули набувають вигляду:

$$\dot{S}'_{mn} = \dot{S}_{mn}e^{-i(\gamma_m l_m+\gamma_n l_n)}, \qquad \dot{S}'_{mm} = \dot{S}_{mm}e^{-i2\gamma_m l_m} \qquad (4)$$

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

Якщо втрати у хвилеводних плечах малі, то їх можна не враховувати ($\gamma \approx \beta$, $\beta -$ коефіцієнт фази). Тоді зміна положень площин відліку відповідає зміні лише фаз елементів матриці:

$$\dot{S}'_{mn} = \dot{S}_{mn} e^{-i\left(\beta_m l_m + \beta_n l_n\right)}, \quad \dot{S}'_{mm} = \dot{S}_{mm} e^{-i2\beta_m l_m} \tag{5}$$

Так як вибір положення площин відліку є довільним, то вирази (5) використовують для спрощення матриці. Очевидно, що можна вибрати ці положення такими, що елементи матриці (іноді всі) стануть дійсними.

Властивості (4), (5) матриці розсіяння називають зміщення площини відліку.

Інші властивості матриці розсіяння:

- якщо багатолюсник взаємний, то його матриця розсіяння симетрична $\dot{S}_{mn} = \dot{S}_{nm}$.
- якщо вузол недисипативний, то його матриця розсіяння унітарна: $\left[\dot{S}_T\right]\left[\dot{S}^*\right] = [E]$,

$\left[\dot{S}_T\right]$, $\left[\dot{S}^*\right]$- транспонована та комплексно - спряжена матриці;

$[E]$- одинична матриця.

Хвилеві матриці: хвилевий підхід

Хвильова матриця передачі T пов’язує нормовані амплітуди на вході та виході вузла. Для двоплечевого вузла:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1^{+} \\ \dot{U}_1^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{T}_{11} & \dot{T}_{12} \\ \dot{T}_{21} & \dot{T}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2^{-} \\ \dot{U}_2^{+} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Звісно, що матрицю можна узагальнити на більш складні вузли з однаковою кількістю вхідних та вихідних плечей.

Варто зазначити, що елементи хвильової матриці передачі не мають чіткого фізичного змісту, за винятком елемента $\dot{T}_{11}$, який є оберненим до елемента $\dot{S}_{21}$, тобто $\dot{T}_{11} = 1/\dot{S}_{21}$.

Введення матриці передачі обумовлено задачею аналізу каскадного з’єднання хвилеводних N чотириполюсників. Якщо є каскадне з’єднання чотириполюсників, кожен з яких має свою матрицю передачі $[\dot{T}]_i$ то матриця передачі такого з’єднання визначається простою формулою:

$$[\dot{T}] = \prod_{i=1}^{N} [\dot{T}]_i \qquad (7)$$

Хвилеві матриці: класичний підхід

У рамках класичного підходу у розгляд вводять

- матрицю опорів

$$\dot{\vec{U}} = [\dot{Z}]\,\dot{\vec{I}}. \tag{8}$$

- матрицю провідностей

$$\dot{\vec{I}} = [\dot{Y}]\dot{\vec{U}}. \tag{9}$$

Їхній зміст такий само, як і на низьких частотах.

- класичну матрицю передачі (для чотириполюсника)

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Вона цікава тим, наприклад, що, як і для хвилевої матриці передачі, при послідовному з’єднання чотириполюсників результуюча матриця знаходиться шляхом добутку парціальних класичних матриць передачі.