Кафедра БІ та Т

Біомедична інженерія

Телекомунікації та радіотехніка

Електродинаміка та техніка НВЧ

Еквівалентні лінії передачі

Еквівалентні параметри лінії передачі

Електродинамічне описання процесів поширення хвиль у ЛП часто надмірно детальне, хоча і не зайве у ряді випадків. Справу ускладнює велике різноманіття типів ЛП, значення основних параметрів яких (див. попередні лекції) лежать у доволі широких межах. І третій момент – вимірювані на практиці параметри. Нагадаємо, що поняття “напруга”, “струм” мають фізичний зміст лише для тих ЛП, у яких поширюються Т-хвилі. Ті ж самі прямокутний та круглий хвилеводи під цю категорію вже не підпадають.

Як це все різноманіття звести під один “знаменник”?

Тобто потрібна взяти за основу фізичну величину, яку, з однієї сторони легко обчислити математично для будь-якої ЛП, а з іншої – легко і з пристойною точністю можна виміряти. Нею є **потужність, яку передає падаюча хвиля у ЛП без втрат:**

$$P = \frac{1}{2}\int_{S_\perp}\left[\dot{\vec{E}}_{m\perp}, \dot{\vec{H}}^{*}_{m\perp}\right] d\vec{s} = \frac{1}{2W}\int_{S_\perp}\left|\dot{\vec{E}}_{m\perp}\right|^2 ds = \frac{W}{2}\int_{S_\perp}\left|\dot{\vec{H}}_{m\perp}\right|^2 ds, \qquad (1)$$

Тут $S_\perp$ – площина поперечного перерізу ЛП; $\dot{\vec{E}}_{m\perp}$, $\dot{\vec{H}}_{m\perp}$ – поперечні компонети векторів поля; W – хвилевий опір ЛЛ для даного ттипу хвиі;

* – символ комплексного спряження.

Еквівалентні параметри лінії передачі

Наступний крок – привести напруженості полів до одного рівня та ввести у розгляд аналоги напруги та струму, щоб мати змогу використовувати наявний і добре відпрацьований математичний апарат кіл із зосередженими параметрами. Робиться це шляхом введення **нормованих напруженостей**

$$\int_S \left| \dot{\vec{E}}'_{m\perp} \right| ds = \int_S \left| \dot{\vec{H}}'_{m\perp} \right| ds = 1, \tag{2}$$

які, у свою чергу, пов'язані з вихідними напруженостями виразами

$$\dot{\vec{E}}_{m\perp} = a_U \dot{U}_{ek} \dot{\vec{E}}'_{m\perp}; \quad \dot{\vec{H}}_{m\perp} = a_I \dot{I}_{ek} \dot{\vec{H}}'_{m\perp}, \tag{3}$$

a_U, a_I - коефіцієнти;

$\dot{U}_{ek}$, $\dot{I}_{ek}$ - еквівалентна напруга тт еквівалентний струм.

Еквівалентні параметри лінії передачі

Коли підставити (3) та (2) в (1), отримаємо

$$P = \frac{1}{2} a_U a_I^* \dot{U}_{ek} \dot{I}_{ek}^* = \frac{|a_U|^2}{2W} |\dot{U}_{ek}|^2 = \frac{|a_I|^2}{2} W |\dot{I}_{ek}|^2. \qquad (4)$$

Ввівши у розгляд еквівалентні хвилеві опори,

$$W_U = \frac{W}{|a_U|^2}; \; W_I = W |a_I|^2,$$

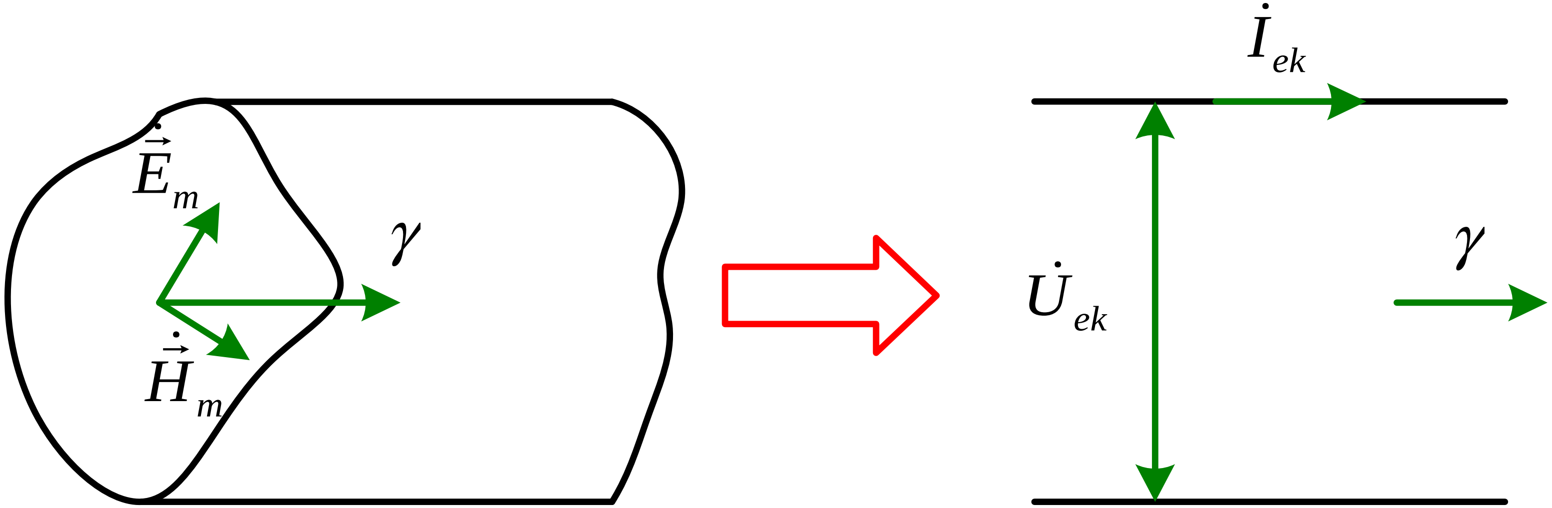
отримаємо

$$P = \frac{1}{2} \left| \frac{W_I}{W_U} \right| \dot{U}_{ek} \dot{I}_{ek}^* = \frac{1}{2W} |\dot{U}_{ek}|^2 = \frac{1}{2} W |\dot{I}_{ek}|^2. \qquad (5)$$

Еквівалентні параметри лінії передачі

Отже, еквівалентні напруга та струм пропорційні амплітудам напруженостей відповідних полів та визначають потужність, що передається по ЛП. Ці величини називають **інтегральними параметрами** ЛП, оскільки вони не залежать від поперечних координат і характеризують поле в цілому.

Таким чином, реальній ЛП, у якій поширюється певний тип хвилі, відповідає еквівалентна двопровідна лінія з напругою $\dot{U}_{ek}$ та $\dot{I}_{ek}$ струмом, хвилевим опором W та сталою поширення γ, яка дорівнює сталій поширення реальної ЛП – рисунок.



Реальна лінія передачі

Еквівалентна їй схема двопровідної лінії

Еквівалентні параметри лінії передачі

Вибір коефіцієнтів a_U, a_I обумовлюється міркуваннями зручності. Найчастіше вони такі:

$$|a_U|^2 = W; \ |a_I|^2 = \frac{1}{W}.$$

Отримувані у такий спосіб еквівалентні напругу та струм називають **нормованими** $\dot{u}, \dot{i}$. **Не плутайте їх з напругами та струмами хвиль у багатозв'язних ЛП!**

З виразу (5) маємо:

$$P = \frac{1}{2}\dot{u}\dot{i}^* = \frac{1}{2}|\dot{u}|^2 = \frac{1}{2}|\dot{i}|^2, \qquad (6)$$

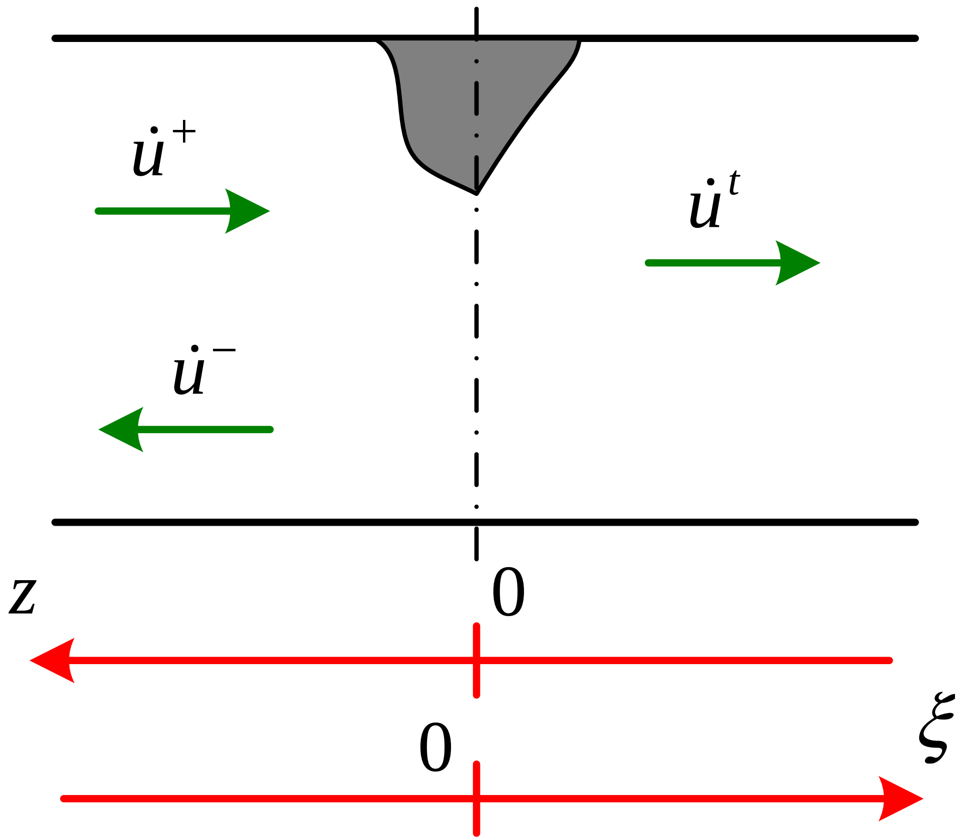
причому

$$\boxed{W_U = W_I = 1, \text{ а } [\dot{u}] = [\dot{i}] = \sqrt{\text{Вт}}.}$$

Таким чином, **нормовані напруга та струм мають одну і ту ж саму одиницю вимірювання** $\sqrt{\text{Вт}}$, а хвилеві опори нормовано до одиниці. І лише для двопровідної ЛП з Т-хвилею, коли $a_I = 1/a_U$, еквівалентні напруга та струм відповідають "фізичним" напрузі та струмові у ЛП.

Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

Розглянемо ЛП з неоднорідністю (сірого кольору на рисунку), у які збуджено хвилю, яка поширюється вправо (падаюча хвиля, $\dot{u}^{+}$). Під впливом поля цієї хвилі у неоднорідності виникають струми, які створюють хвилі різних типів, які поширюються в обидві сторони від неї.



ЛП з неоднорідністю

Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

Пам'ятаємо, що ЛП найчастіше працює в одномодовому режимі. Тоді на досить великій відстані від неоднорідності існує лише три хвилі одного і того самого типу: падаюча та відбита – ліворуч, прохідна – праворуч. З міркувань зручності початок СК вибираємо у площині неоднорідності, спрямування осі розглянемо в обидві сторони, щоб побачити, на що це впливає. Вважатимемо, що генератор розташовано ліворуч, а кінцеве навантаження ЛП – праворуч від неоднорідності.

Запишемо напруги у ЛП при $z > 0$ як суму падаючої та відбитої хвиль:

$$\dot{u}^{+} = \dot{U}^{+} e^{i\gamma z},\ \dot{u}^{-} = \dot{U}^{-} e^{-i\gamma z} \Rightarrow \dot{u}(z) = \dot{u}^{+} + \dot{u}^{-} = \dot{U}^{+} e^{i\gamma z} + \dot{U}^{-} e^{-i\gamma z}, \quad (7)$$

для другої осі:

$$\dot{u}^{+} = \dot{U}^{+} e^{-i\gamma\xi},\ \dot{u}^{-} = \dot{U}^{-} e^{i\gamma\xi} \Rightarrow \dot{u}(\xi) = \dot{u}^{+} + \dot{u}^{-} = \dot{U}^{+} e^{-i\gamma\xi} + \dot{U}^{-} e^{i\gamma\xi}.$$

Так само можна зробити це для струму:

$$\dot{i}^{+} = \dot{I}^{+} e^{i\gamma z},\ \dot{i}^{-} = \dot{I}^{-} e^{-i\gamma z} \Rightarrow \dot{i}(z) = \dot{i}^{+} + \dot{i}^{-} = \dot{I}^{+} e^{i\gamma z} + \dot{I}^{-} e^{-i\gamma z},$$

$$\dot{i}^{+} = \dot{I}^{+} e^{-i\gamma\xi},\ \dot{i}^{-} = \dot{I}^{-} e^{i\gamma\xi} \Rightarrow \dot{i}(\xi) = \dot{i}^{+} + \dot{i}^{-} = \dot{I}^{+} e^{-i\gamma\xi} + \dot{I}^{-} e^{i\gamma\xi}.$$

Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

Коефіцієнтом відбиття хвилі *R* (за напругою) називають відношення амплітуд відбитої та падаючої хвиль:

$$\boxed{\dot{R}(z) = \frac{\dot{u}^-}{\dot{u}^+} = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} e^{-i2\gamma z},}$$

$$\dot{R}(\xi) = \frac{\dot{u}^-}{\dot{u}^+} = \frac{\dot{U}^-}{\dot{U}^+} e^{i2\gamma\xi}. \qquad (8)$$

Аналогічно вводять **коефіцієнт відбиття за струмом:**

$$\dot{R}_I(z) = \frac{\dot{i}^-}{\dot{i}^+} = \frac{\dot{I}^-}{\dot{I}^+} e^{-i2\gamma z},$$

$$\dot{R}_I(\xi) = \frac{\dot{i}^-}{\dot{i}^+} = \frac{\dot{I}^-}{\dot{I}^+} e^{i2\gamma\xi}. \qquad (9)$$

Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

Щодо напряму осі: це лише питання зручності, фізично від цього нічого не змінюється.

Який з цих коефіцієнтів використовують на практиці найчастіше?

Ним є коефіцієнт відбиття за напругою (на практиці ж частіше вимірюють напругу, не струм), тому індекс у його позначенні опущено. Більше того, вони пов'язані між собою:

$$\boxed{\dot{R}(z) = -\dot{R}_I(z),} \tag{10}$$

тобто перебувають у протифазі.

Коефіцієнт відбиття залежить від положення площини відліку, тобто положення тієї площини, у якій відраховують комплексні амплітуди хвиль!

У колах із зосередженими параметрами цю обставину ігнорують, оскільки використовувані там довжини хвиль набагато більші за довжини використовуваних провідників, що дозволяє до певної міри ігнорувати фазові набіги та зменшення амплітуд хвиль на цих відстанях.

Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

Коефіцієнт відбиття у нульовій точці називають **коефіцієнт відбиття від неоднорідності:**

$$\boxed{\dot{R}_н = \dot{R}(0).} \tag{11}$$

Звідси

$$\boxed{\dot{R}(z) = \dot{R}_н e^{-i2\gamma z}} = \dot{R}_н e^{-2\alpha z} e^{-i2\beta z}. \tag{12}$$

Тобто якщо переміщувати площину відліку у сторону генератора, то коефіцієнт відбиття набуває фазового запізнення, а його модуль зменшується в силу затухання хвилі у реальній (не ідеалізованій) ЛП.

Коефіцієнт відбиття можна зобразити як вектор на комплексній площині – рисунок. Звідси випливають такі його властивості:

1) Переміщення площини відліку до генератора відповідає обертанню цього вектора за годинникоаою стрілкою, до навантаження – проти годинникової стрілки.

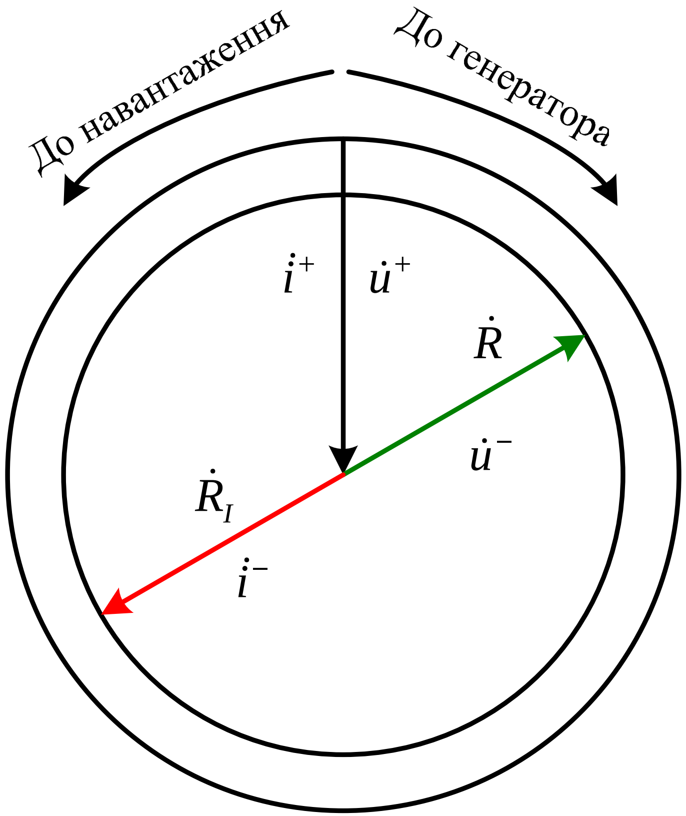
2) Поворот цього вектора на 360 градусів відповідає переміщенню уздовж ЛП на половину довжини хвилі:

$$2\beta\Delta z = \frac{4\pi}{\Lambda}\Delta z = 2\pi \Rightarrow \Delta z = \frac{\Lambda}{2}.$$

Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

3) При відсутності втрат у ЛП кінець цього вектора описує коло, за наявності втрат – затухаючу спіраль.

4) Всі можливі значення коефіцієнта відбиття від пасивого навантаження (яке не збільшує енергію хвилі) лежать всередині та на одиничному колі комплексної площини коефіцієнта навантаження. Ця обставина лежить в основі побудови колової номограми повних опорів (номограми Вольперта-Сміта).



Коефіцієнт відбиття та стоячої хвилі

З виразу (7) випливає, що у ЛП без втрат максимальне значення модуля напруги

$$U_{\max} = \left|\dot{U}^{+}\right| + \left|\dot{U}^{-}\right|,$$

мінімальне

$$U_{\min} = \left|\dot{U}^{+}\right| - \left|\dot{U}^{-}\right|.$$

Відношення цих величин називають **коефіцієнтом стоячої хвилі за напругою** КСХН (**V**oltage **S**tanding **W**ave **R**atio, VSWR):

$$K_{cm_U} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{\left|\dot{U}^{+}\right| + \left|\dot{U}^{-}\right|}{\left|\dot{U}^{+}\right| - \left|\dot{U}^{-}\right|} = \frac{1+\left|\dot{R}\right|}{1-\left|\dot{R}\right|}. \quad (13)$$

Частіше його називають простіше: коефіцієнт стоячої хвилі (**S**tanding **W**ave **R**atio, SWR).

Якщо коефіцієнт відбиття дорівнює нулю, то $K_{cm_U} = 1$, **якщо ж хвиля повністю відбивається від навантаження, то** $K_{cm_U} \to +\infty$.

Вхідний опір лінії передачі

Вхідний опір ЛП з неоднорідністю визначають як відношення еквівалентної напруги де еквівалентного опору у даному перерізі:

$$\dot{Z}_{in}(z) = \frac{\dot{U}(z)}{\dot{I}(z)} = W\,\frac{1+\dot{R}(z)}{1-\dot{R}(z)}. \tag{14}$$

Використовуючи ж їхні нормовані значення, кажуть при цьому про повну нормовану напругу та повний нормований струм:

$$\dot{u}(z) = \dot{u}^{+} + \dot{u}^{-} = \dot{u}^{+}\left(1+\dot{R}(z)\right),\;\; \dot{i}(z) = \dot{u}^{+} - \dot{u}^{-} = \dot{u}^{+}\left(1-\dot{R}(z)\right). \tag{15}$$

Звідси **вхідний нормований (до хвилевого опору) опір ЛП** з неоднорідністю:

$$\dot{Z}'_{in}(z) = \frac{\dot{u}(z)}{\dot{i}(z)} = \frac{1+\dot{R}(z)}{1-\dot{R}(z)}. \tag{16}$$

Зв'язок між нормованим та ненормованим опорами:

$$\dot{Z}'_{in} = \frac{\dot{Z}_{in}}{W}. \tag{17}$$

Вхідний опір лінії передачі

При $z=0 \Rightarrow \boxed{\dot{Z}'_{in}(0)=\dot{Z}_{\acute{i}}}$ тобто дорівнює вхідному опору неоднорідності

(навантаження).

Так само вводиться у розгляд **нормована провідність:**

$$\boxed{\dot{Y}'_{in}=\frac{1}{\dot{Z}'_{in}}.} \qquad (18)$$

Серія “корисних формул”:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\dot{R}(z)=\frac{\dot{Z}'_{in}(z)-1}{\dot{Z}'_{in}(z)+1};\quad \dot{R}_{\acute{i}}=\frac{\dot{Z}'_{\acute{i}}-1}{\dot{Z}'_{\acute{i}}+1};\\
&\dot{R}(z)=\frac{1-\dot{Y}'_{in}(z)}{1+\dot{Y}'_{in}(z)};\quad \dot{R}_{\acute{i}}=\frac{1-\dot{Y}'_{\acute{i}}}{1+\dot{Y}'}.
\end{aligned}} \qquad (19)$$

Вхідний опір лінії передачі

Якщо ж відрізок ЛП (з втратами) довільної довжини *z* навантажено на навантаження, то його вхідний опір:

$$\dot{Z}_{in}(z) = W\,\frac{\dot{Z}_{\acute{\imath}} + W th\,\gamma z}{W + \dot{Z}_{\acute{\imath}}\, th\,\gamma z}. \qquad (20)$$

Вираз (20) у термінах нормованих опорів:

$$\boxed{\dot{Z}'_{in}(z) = \frac{\dot{Z}'_{\acute{\imath}} + th\,\gamma z}{1 + \dot{Z}'_{\acute{\imath}}\, th\,\gamma z}.} \qquad (21)$$

Для ЛП без втрат:

$$\dot{Z}_{in}(z) = W\,\frac{\dot{Z}_{\acute{\imath}} + iW tg\,\beta z}{W + i\dot{Z}_{\acute{\imath}}\, tg\,\beta z}, \qquad (22)$$

$$\boxed{\dot{Z}'_{in}(z) = \frac{\dot{Z}'_{\acute{\imath}} + i tg\,\beta z}{1 + i\dot{Z}'_{\acute{\imath}}\, tg\,\beta z}.} \qquad (23)$$

Вхідний опір лінії передачі

Для випадку провідностей:

$$\dot{Y}_{in}(z) = W\,\frac{\dot{Y}_{\acute{\imath}} + iWtg\beta z}{W + i\dot{Y}_{\acute{\imath}}\,tg\beta z}, \qquad (24)$$

$$\boxed{\dot{Y}'_{in}(z) = \frac{\dot{Y}'_{\acute{\imath}} + itg\beta z}{1 + i\dot{Y}'_{\acute{\imath}}tg\beta z}.} \qquad (24)$$

Вирази (21), (23) та (24) дуже часто використовують на практиці.

Основні режими роботи лінії передачі

Основні режими роботи лінії передачі

З виразів (21) – (24) випливає, що коефіцієнт відбиття у ЛП, тобто **режим її роботи, залежить від співвідношення опору навантаження та хвилевого опору ЛП.** Можливі **три характерних випадки:**

1) режим біжучої хвилі;

2) режим стоячої хвилі;

3) режим змішаних хвиль.

Режим біжучої хвилі

Режим **біжучої хвилі** встановлюється при навантаженні лінії активним опором, який дорівнює її хвилевому опору: $\dot{Z}_{í} = R_{í} = W\ (\dot{Z}_{í}' = 1)$, тобто тоді, коли здійснено повне узгодження. Навантаження з такими властивостями називають “узгоджене навантаження”. При цьому:

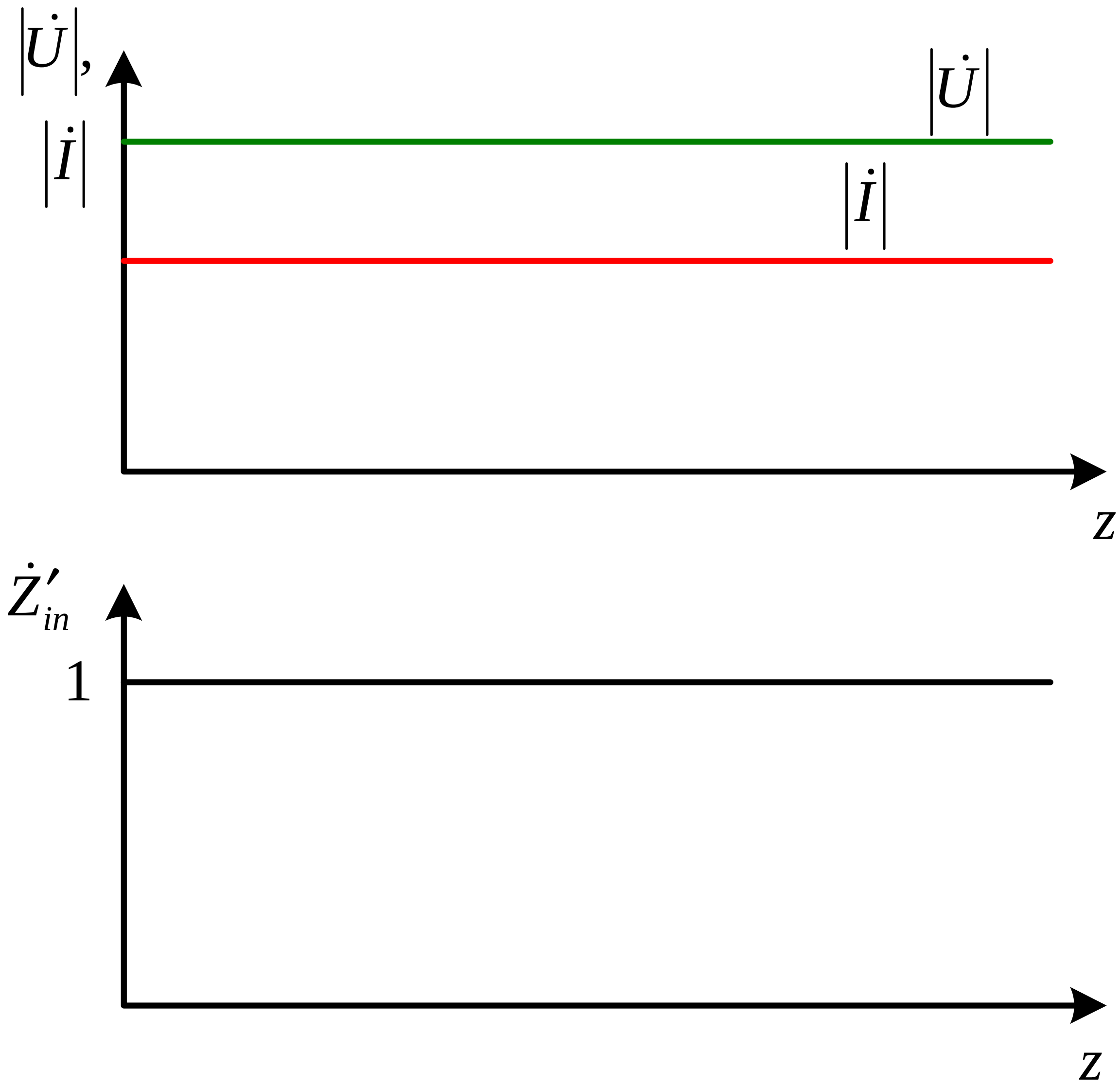
$$\dot{U}^{-} = 0,\ U_{\min} = U_{\max} = \left|\dot{U}^{+}\right|;$$

$$\dot{R} = 0;\ K_{ст} = K_{бх} = 1;$$

$$\dot{Z}_{in}'(z) = \dot{Z}_{н}' = 1 \Leftrightarrow \dot{Z}_{in}(z) = W.$$

Тобто у лінії існує лише біжуча (падаюча) хвиля, розподіл амплітуд напруги і струму якої показано на слайді. Згідно (23) вхідний опір ЛП не залежить від поздовжньої координати *z* і дорівнює її хвилевому опору.

Режим біжучої хвилі



Залежності напруги, струму та вхідного опору ЛП від координати z в режимі біжучої хвилі

Режим стоячої хвилі

Режим **стоячої хвилі** встановлюється при короткому замиканні лінії $\dot{Z}_{í}=0\ (\dot{Z}'_{í}=0)$, при холостому ході лінії $\dot{Z}_{í}=\infty\ (\dot{Z}'_{í}=\infty)$, та при навантаженні лінії реактивним опором $\left(\dot{Z}_{í}=X_{L}\ \div\grave{e}\ \dot{Z}_{í}=X_{C}\right)$.

При **короткому замиканні** лінії передачі:

$$\left|\dot{U}^{-}\right|=\left|\dot{U}^{+}\right|, U_{\min}=\left|\dot{U}^{+}\right|-\left|\dot{U}^{-}\right|=0; U_{\max}=\left|\dot{U}^{+}\right|+\left|\dot{U}^{-}\right|=2\left|\dot{U}^{+}\right|$$

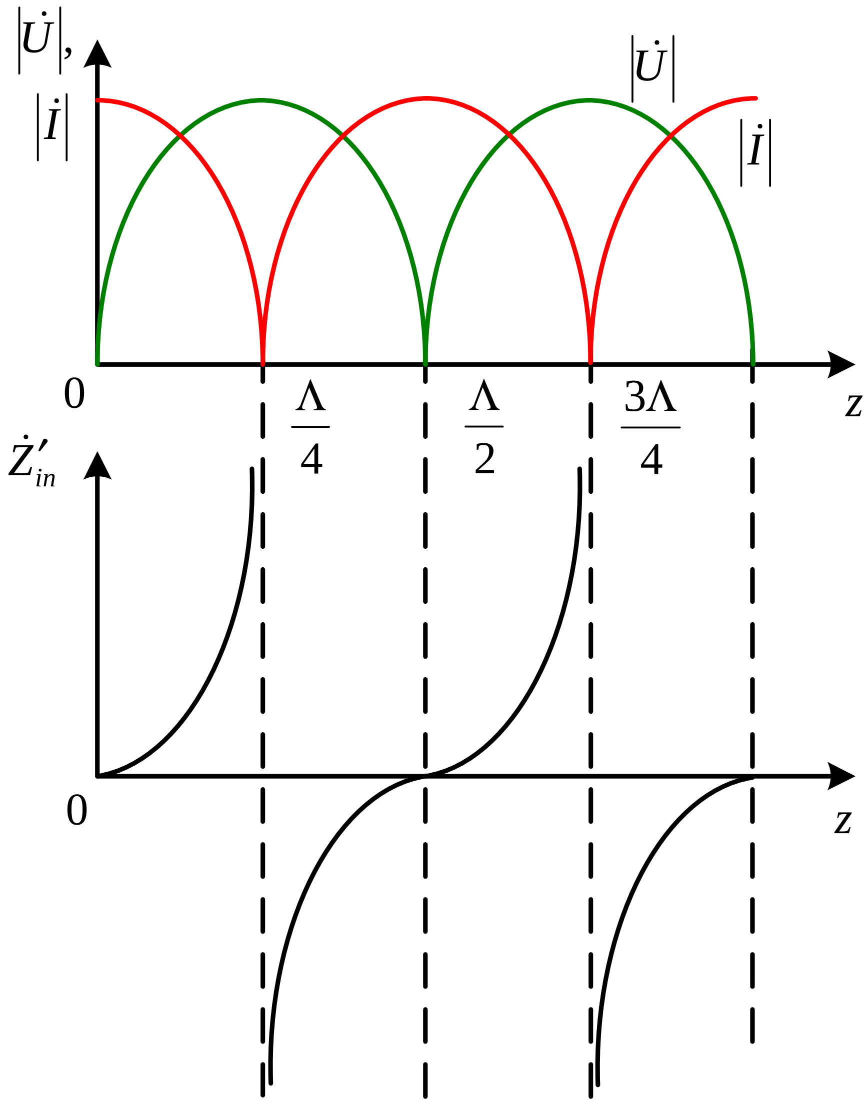
$$\dot{R}=-1;\ K_{cm}\to\infty;\ K_{бх}=0;$$

якщо ЛЛ без втрат, тт : $\dot{Z}'_{in}(z)=i\,\mathrm{tg}\,\beta z \Leftrightarrow \dot{Z}_{in}(z)=iW\,\mathrm{tg}\,\beta z;$

$$\dot{Y}'_{in}(z)=-i\,\mathrm{ctg}\,\beta z \Leftrightarrow \dot{Y}_{in}(z)=-iY_{W}\,\mathrm{ctg}\,\beta z.$$

Тобто амплітуда відбитої хвилі дорівнює амплітуді падаючої, а фаза відбитої хвилі протилежна фазі падаючої, внаслідок чого напруга та струм у будь-якому перерізі лінії різні та набувають значень від нуля (вузол напруги), до деякого максимуму (пучність напруги). У місці короткого замикання утворюється перший вузол напруги; потім вузли повторюються по довжині лінії у напрямку до генератора через половину довжини хвилі (див. рисунок на наступному слайді).

Режим стоячої хвилі



Залежності напруги, струму та вхідного опору ЛП від координати z в режимі стоячої хвилі (коротке замикання)

Режим стоячої хвилі

При **холостому ході** лінії передачі: $\dot{Z}_н = \infty$ ($\dot{Z}'_н = \infty$),

$$\left|\dot{U}^-\right| = \left|\dot{U}^+\right|, U_{\min} = \left|\dot{U}^+\right| - \left|\dot{U}^-\right| = 0; U_{\max} = \left|\dot{U}^+\right| + \left|\dot{U}^-\right| = 2\left|\dot{U}^+\right|$$

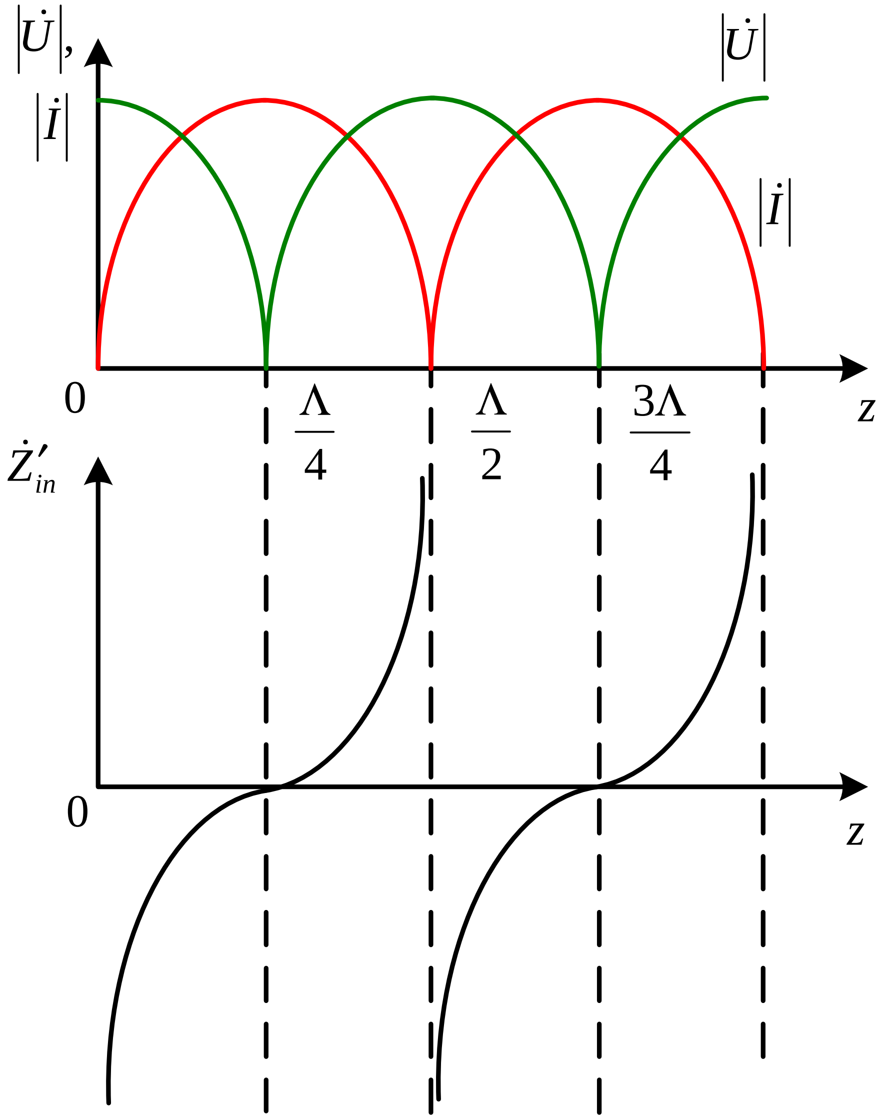
$$\dot{R} = 1;\ K_{ст} \to \infty;\ K_{бх} = 0;$$

$$\text{якщо ЛЛ без втрат, тт}: \dot{Z}'_{in}(z) = -i \operatorname{ctg} \beta z \Leftrightarrow \dot{Z}_{in}(z) = -iW \operatorname{ctg} \beta z;$$

$$\dot{Y}'_{in}(z) = i \operatorname{tg} \beta z \Leftrightarrow \dot{Y}_{in}(z) = iY_W \operatorname{tg} \beta z.$$

Тобто тут картина аналогічна попередній ситуації (короткому замиканню), з тією лише різницею, що у кінці лінії утворюється пучність напруги. Графіки змістились праворуч на чверть довжини хвилі.

Режим стоячої хвилі



Залежності напруги, струму та вхідного опору ЛП від координати *z* в режимі стоячої хвилі (холостий хід)

Режим стоячої хвилі

При чисто реактивному навантаженні лінії передачі з виразу (19) отримаємо:

$$R = \frac{|iX_н - 1|}{|iX_н + 1|} = \frac{X_н^2 + 1}{X_н^2 + 1} = 1,$$

тобто у лінії передачі також встановлюється стояча хвиля, причому при індуктивному навантаженні перший вузол напруги буде на відстані $z_0 > \Lambda/4$ від місця включення навантаження, а при ємнісному – на відстані $z_0 < \Lambda/4$.

Режим змішаних хвиль

Режим **змішаних хвиль** встановлюється при навантаженні лінії передачі активним опором, не рівним хвилевому опору лінії, чи довільним комплексним навантаженням. У цьому режимі амплітуда падаючої хвилі більша за амплітуду відбитої, енергія переноситься у сторону навантаження і її частина поглинається навантаженням. У лінії встановлюється періодичний розподіл напруги (струму), з періодом у половину довжини хвилі.

$$\left|\dot{U}^-\right| < \left|\dot{U}^+\right|, U_{\min} = \left|\dot{U}^+\right| - \left|\dot{U}^-\right| = 0; U_{\max} = \left|\dot{U}^+\right| + \left|\dot{U}^-\right|,$$

$$K_{cm} = \frac{\left|\dot{U}^+\right| + \left|\dot{U}^-\right|}{\left|\dot{U}^+\right| - \left|\dot{U}^-\right|} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}.$$