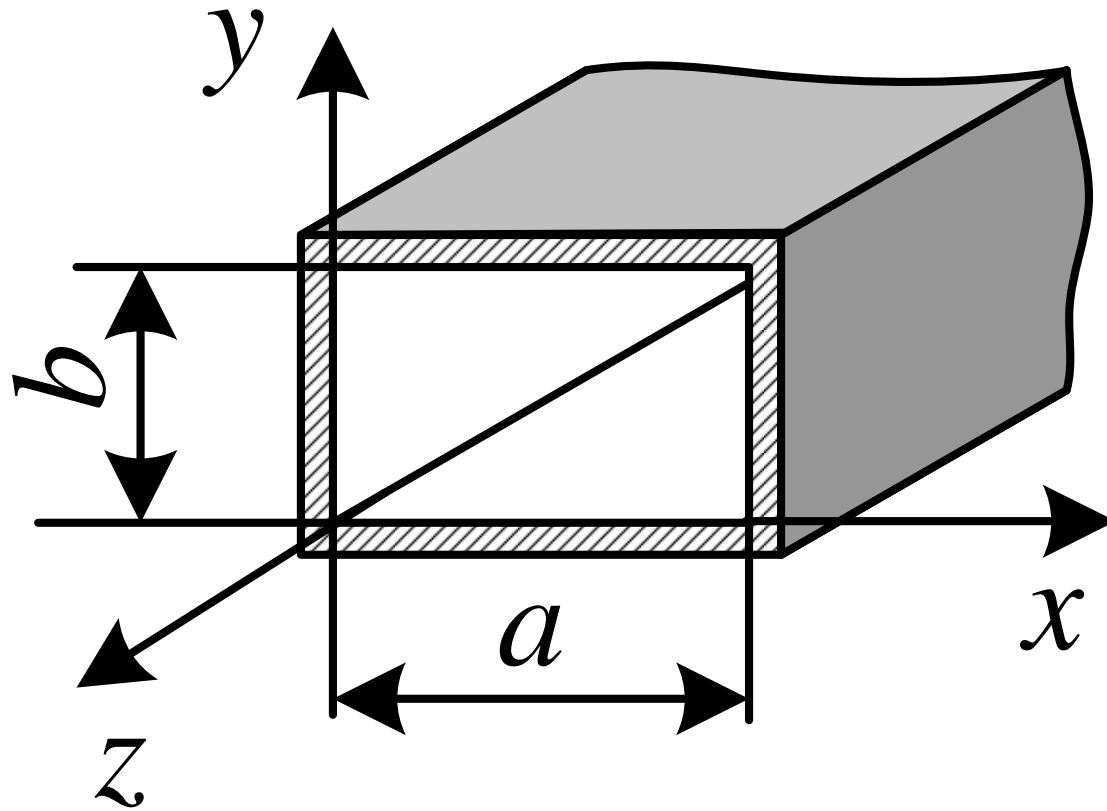


Електродинаміка та техніка НВЧ

Прямокутний хвилевід

Загальні положення

Прямокутним хвилеводом називають лінію передачі у вигляді металевої труби прямокутного поперечного перерізу – рисунок.



Розміри прямокутного хвилеводу: a – широка стінка; b – вузька стінка; формат позначення розмірів хвилеводу: $a \times b$ мм.

Постановка задачі. Е-хвилі.

Вільні поля у такій поздовжньо-однорідній ЛП не можуть мати характеру TEM-хвиль, лише Е- та Н-хвилі.

При розв'язанні граничної задачі для прямокутного хвилеводу його стінки вважають ідеально провідними. Їхню кінцеву провідність враховують потім.

Гранична задача для Е-хвиль при цьому така:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + \chi^2 \dot{E}_z = 0, \quad \begin{cases} 0 < x < a, \\ 0 < y < b \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{граничні умови: } \dot{E}_z = 0 \quad \begin{cases} x = 0, x = a, \\ y = 0, y = b. \end{cases}$$

Розв'язок цієї задачі методом розподілу змінних має вигляд:

$$\dot{E}_z = \dot{E}_z^{mn} = \dot{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \begin{cases} m = 1, 2, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2)$$

Індекси m , n не можуть розпочинатись з нуля, інакше ця власна функція дорівнюватиме нулю, тобто поле відсутнє.

Постановка задачі. Е-хвилі

причому цим власним функціям задачі (1) відповідають власні значення:

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (3)$$

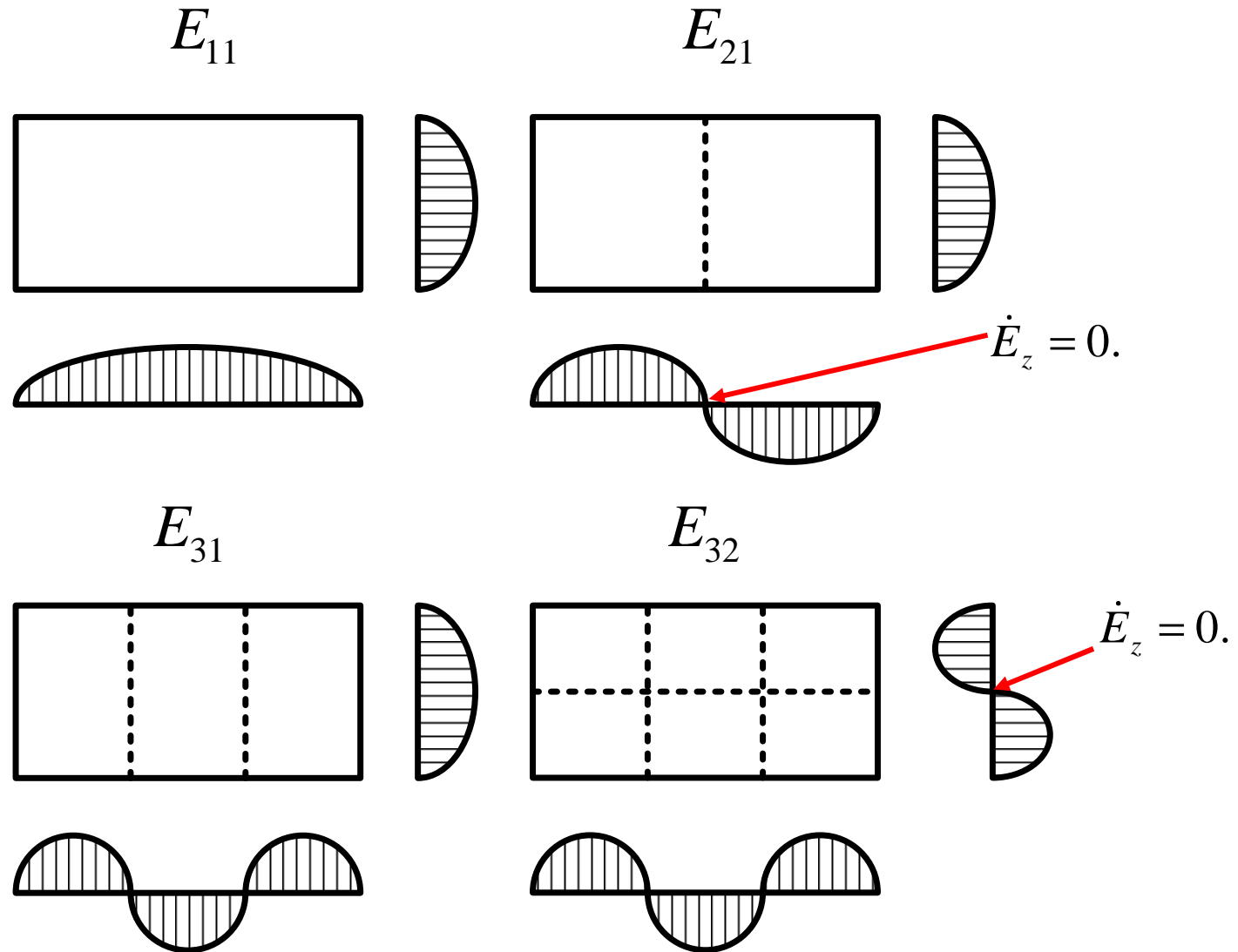
Зверніть увагу на нові терміни: власна функція, власні значення – це термінологія математичної фізики у задачах такого типу. З фізичної точки зору кожен розв’язок (2) задачі (1), визначений з точністю до комплексного коефіцієнта \dot{E}_0 , дає розподіл поздовжньої компоненти вектора напруженості електричного поля E у поперечному перерізі хвилеводу. Тобто це відповідний розв’язок рівнянь Максвелла, який називають **хвилею типу E_{mn}**

(полем типу E_{mn}). Кожній з цих хвиль відповідає своє поперечне хвилеве число (воно ж власне значення) χ_{mn} . Формально таких розв’язків незкінченна кількість, і всі типи хвиль, які можуть існувати у даній ЛП, мають назву **“спектр хвиль” (не плутати зі спектром сигналу, це принципово різні поняття!)**.

Правило прочитання назв хвиль: наприклад, E_{11} - **правильно:** Е-один-один, **не правильно:** Е-одинадцять.

Е-хвилі

На рисунку показано розподіли поздовжньої компоненти (2) для деяких типів хвиль, причому штриховими лініями тут показано “лінії вузлів”, на яких $\dot{E}_z = 0$.



Е-хвилі

Повне поле біжучої хвилі типу E_{mn} знаходять за вже знайомими читачам з попередньої лекції формулами

$$\vec{\dot{E}}_m = \dot{E}_{mz} + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial z},$$

$$\vec{\dot{H}}_m = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \dot{E}_{mz} = \frac{i\omega\epsilon_0\epsilon}{\chi^2} [\nabla_{\perp} \dot{E}_{mz}, \vec{z}_0].$$

при підстановці у них виразу

$$\dot{E}_{mz} = \vec{z}_0 \dot{E}_z^{mn} e^{-i\gamma z}.$$

Е-хвилі

В результаті отримуємо комплексні амплітуди:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}}_m = \dot{E}_0 \left[\vec{z}_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y - i \frac{\gamma}{\chi^2} (\vec{x}_0 \chi_x \cos \chi_x x \sin \chi_y y + \right. \\ \left. + \vec{y}_0 \chi_y \sin \chi_x x \cos \chi_y y) \right] e^{-i\gamma z}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{W^E} i \dot{E}_0 \frac{\gamma}{\chi^2} (\vec{x}_0 \chi_y \sin \chi_x x \cos \chi_y y - \vec{y}_0 \chi_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y) e^{-i\gamma z};$$

тут : $\chi_x = \frac{m\pi}{a}$ - поперечне ххвилев число осі x ;

$\chi_y = \frac{n\pi}{b}$ - поперечне ххвилев число осі y ;

$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2$ - поперечне ххвилев число.

Е-хвилі

Стала поширення (поздовжнє хвилеве число):

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_{mn} &= \sqrt{k^2 - \chi^2} = \left[k = \frac{\omega}{c} \varepsilon \mu = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \right] = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \chi^2} = \\ &= k \sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k} \right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}} \right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f} \right)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_{cr} = \frac{\chi c}{2\pi \sqrt{\varepsilon \mu}} - \text{критична частота;}$$

$$\lambda_{cr} = \frac{2\pi}{\chi} - \text{критична довжина ххвилі}$$

$$\lambda = \frac{c}{f \sqrt{\varepsilon \mu}} - \text{довжина ххвилу середовищі, яки заповнено ххвилевід}$$

Е-хвилі

Хвильовий опір у класі E -хвиль:

$$\begin{aligned} W^E &= \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{W}{k} \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \left[W = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right] = \\ &= W \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} = W \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

У загальному випадку, якщо хвильовід заповнено середовищем з втратами, то стала поширення стає комплексною:

$$\gamma = \beta - i\alpha,$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

- коефіцієнт фази; α - стала затухання;

Е-хвилі

Довжина хвилі у хвилеводі:

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}}$$

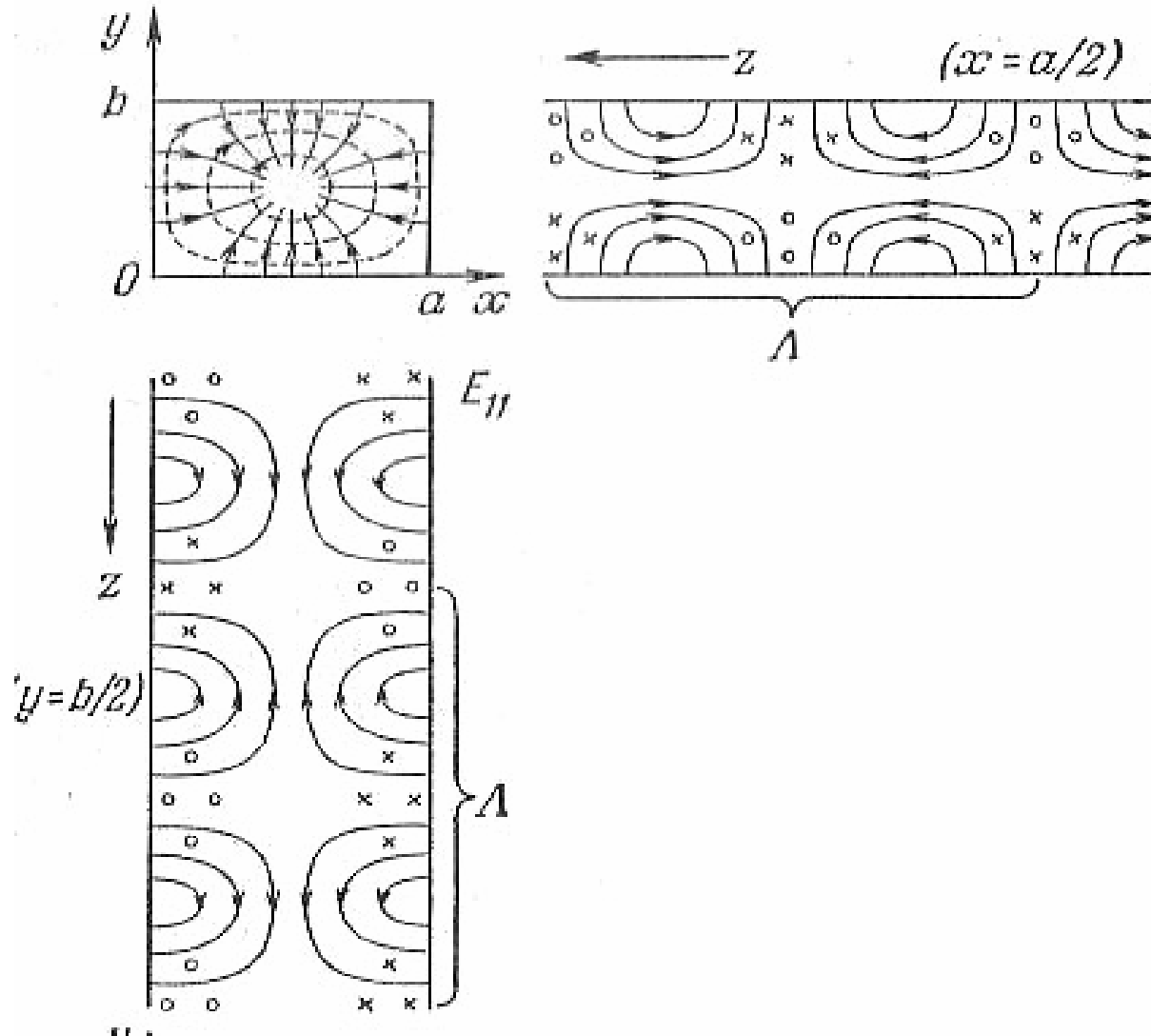
Коефіцієнт сповільнення K

Нагадування: хвилевід, який заповнено повітрям, називають “порожній хвилевід”, “хвилевід без заповнення”.

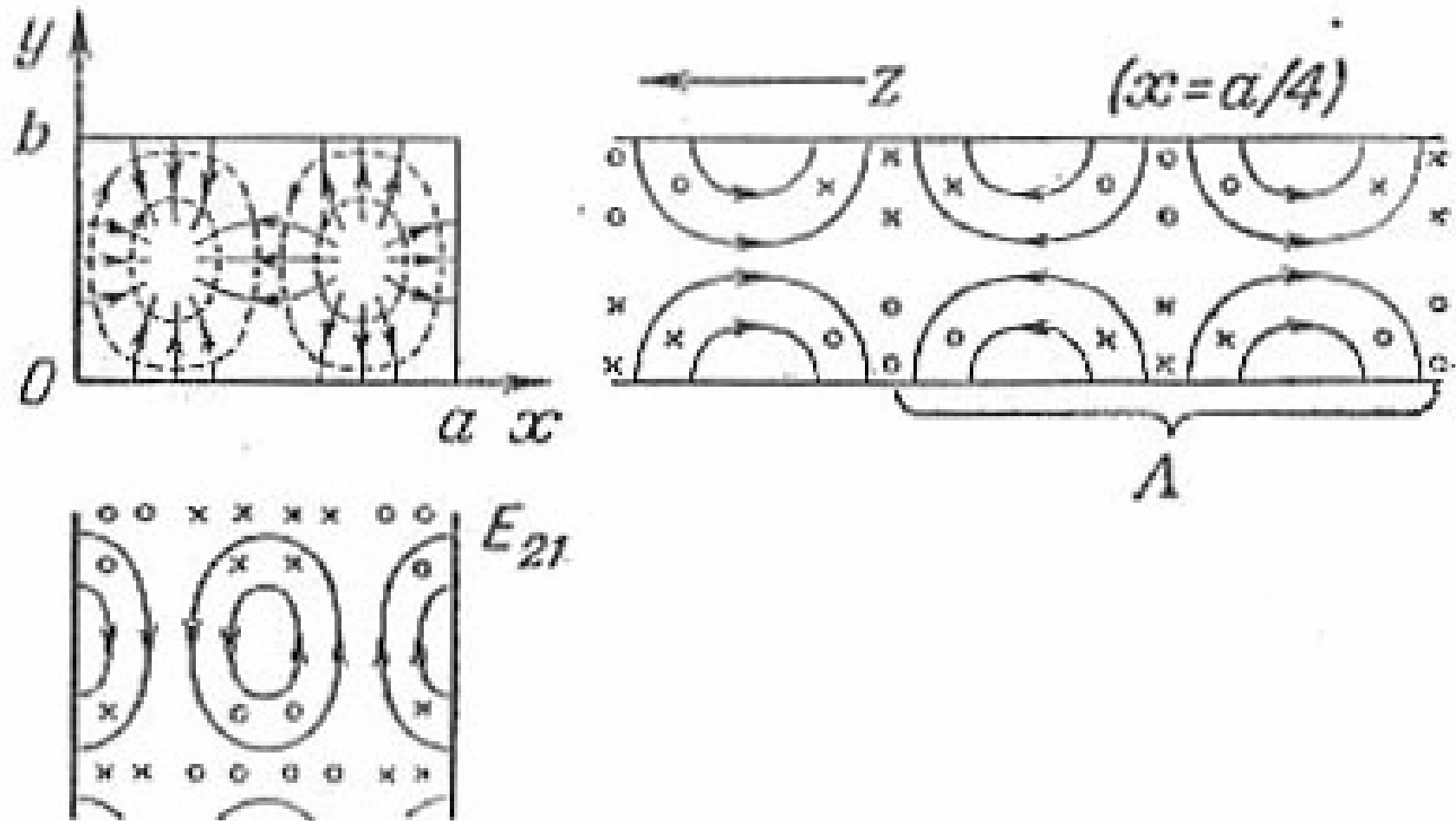
Для порожнього хвилеводу у випадку $f < f_{cr} : K < 1 \Rightarrow \Lambda > \lambda$.

Е-хвилі

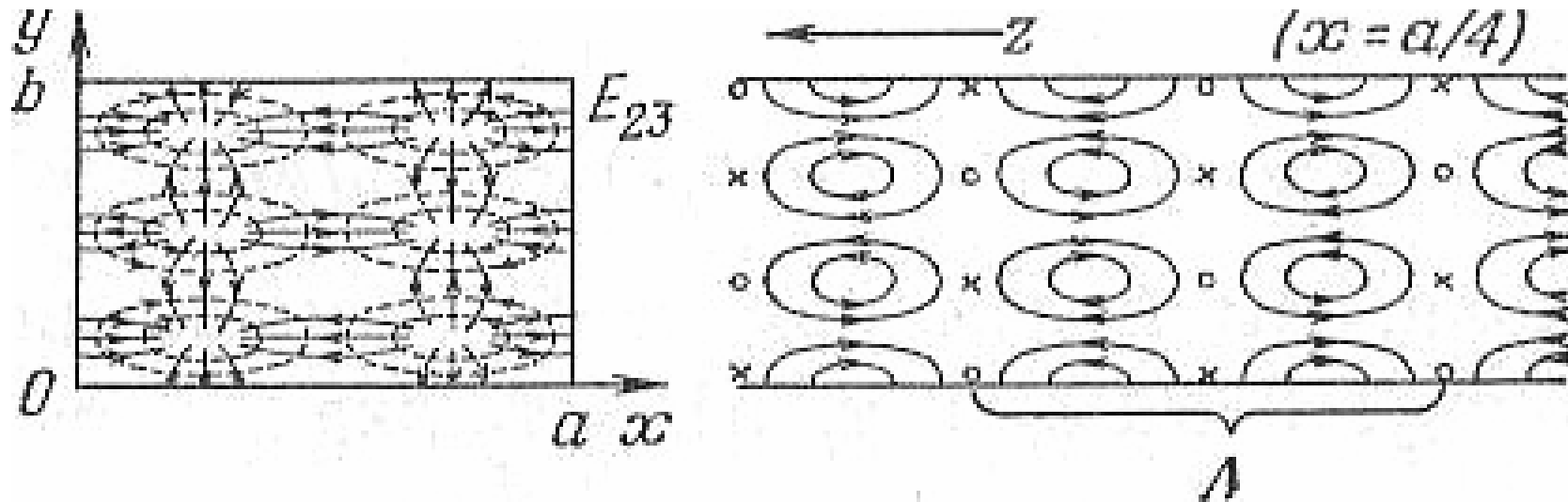
Приклад будови різних полів типу E_{mn} у вигляді картин векторних ліній.
Вектор E – суцільні лінії, вектор H – штрихові лінії.



Е-хвилі



Е-хвилі



Напростішим є поле E_{11} , його структура містить одне сімейство замкнених ліній магнітного вектора, які розташовано симетрично відносно середньої точки поперечного перерізу, де має місце максимум E_z . Складніші структури нібито складаються з таких “елементарних комірок”.

З цих рисунків також впливає **відповідність між будовою полів та значенням індексів m, n : значення цих індексів дорівнює кількості півперіодів структури (поля) по осях x та y відповідно.**

Н-хвилі

Гранична задача для Н-хвиль:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + \chi^2 \dot{H}_z = 0, \quad \begin{cases} 0 < x < a, \\ 0 < y < b \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{граничні умови: } \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0 \quad \begin{cases} x = 0, \\ x = a; \end{cases} \quad \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0 \quad \begin{cases} y = 0, \\ y = b. \end{cases}$$

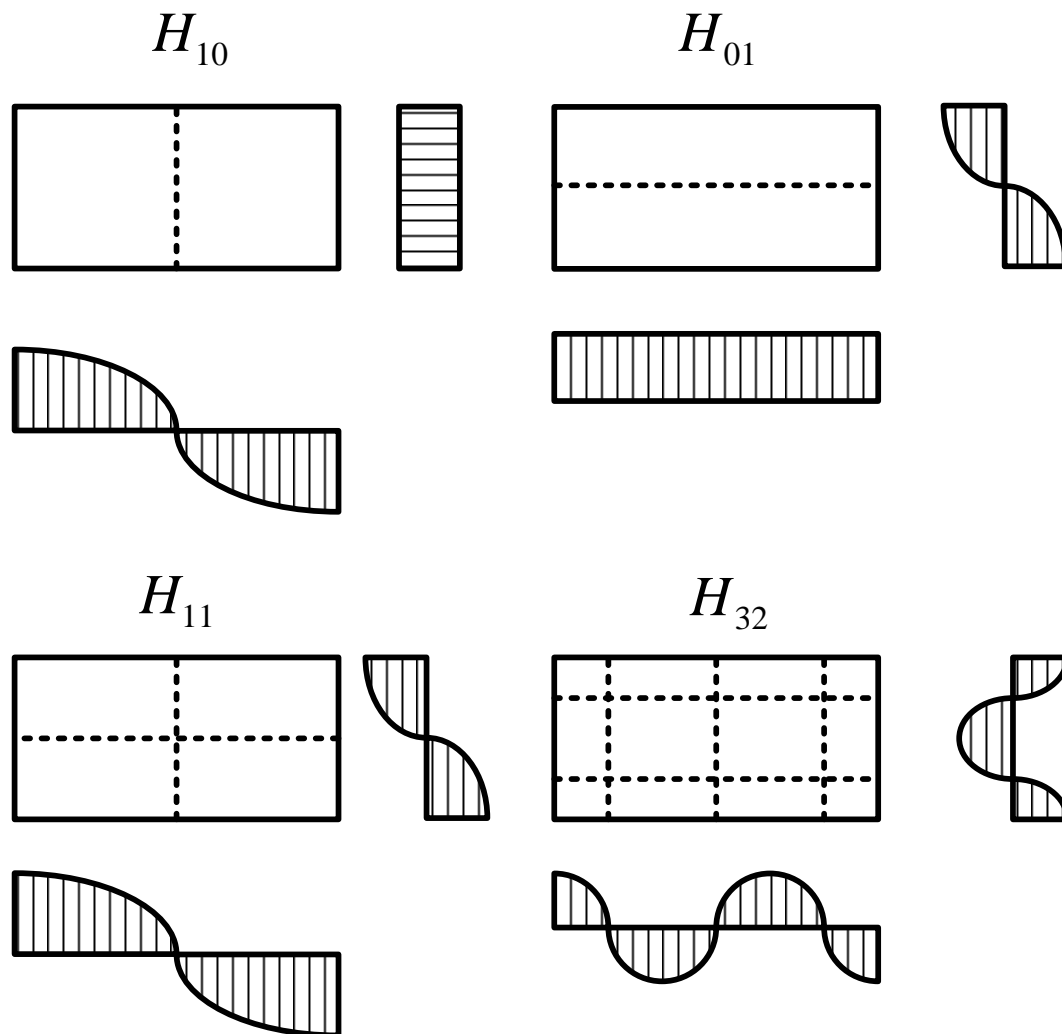
Розв'язок цієї задачі методом розподілу змінних має вигляд:

$$\dot{H}_z \equiv \dot{H}_z^{mn} = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \begin{cases} m = (0), 1, 2, \dots, \\ n = (0), 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Індекси m , n не можуть одночасно дорівнювати нулю, лише нарізно.

Н-хвилі

Кожен розв'язок (8) задачі (7) дає розподіл поздовжньої компоненти вектора H у поперечному перерізі хвилеводу для хвиль типу H_{mn} . Приклади таких розподілів показано на рисунку.



Н-хвилі

Повне поле біжучої хвилі типу H_{mn} знаходять за вже знайомими читачам з попередньої лекції формулами

$$\dot{\vec{E}}_m = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \dot{H}_{mz} = \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} [\vec{z}_0, \text{rot}_{\perp} \dot{H}_{mz}],$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \dot{H}_{mz} + \frac{1}{\chi^2} \nabla_{\perp} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial z}.$$

при підстановці у них виразу

$$\dot{\vec{H}}_{mz} = \vec{z}_0 \dot{H}_z^{mn} e^{-i\gamma z}.$$

Н-хвилі

В результаті отримуємо комплексні амплітуди:

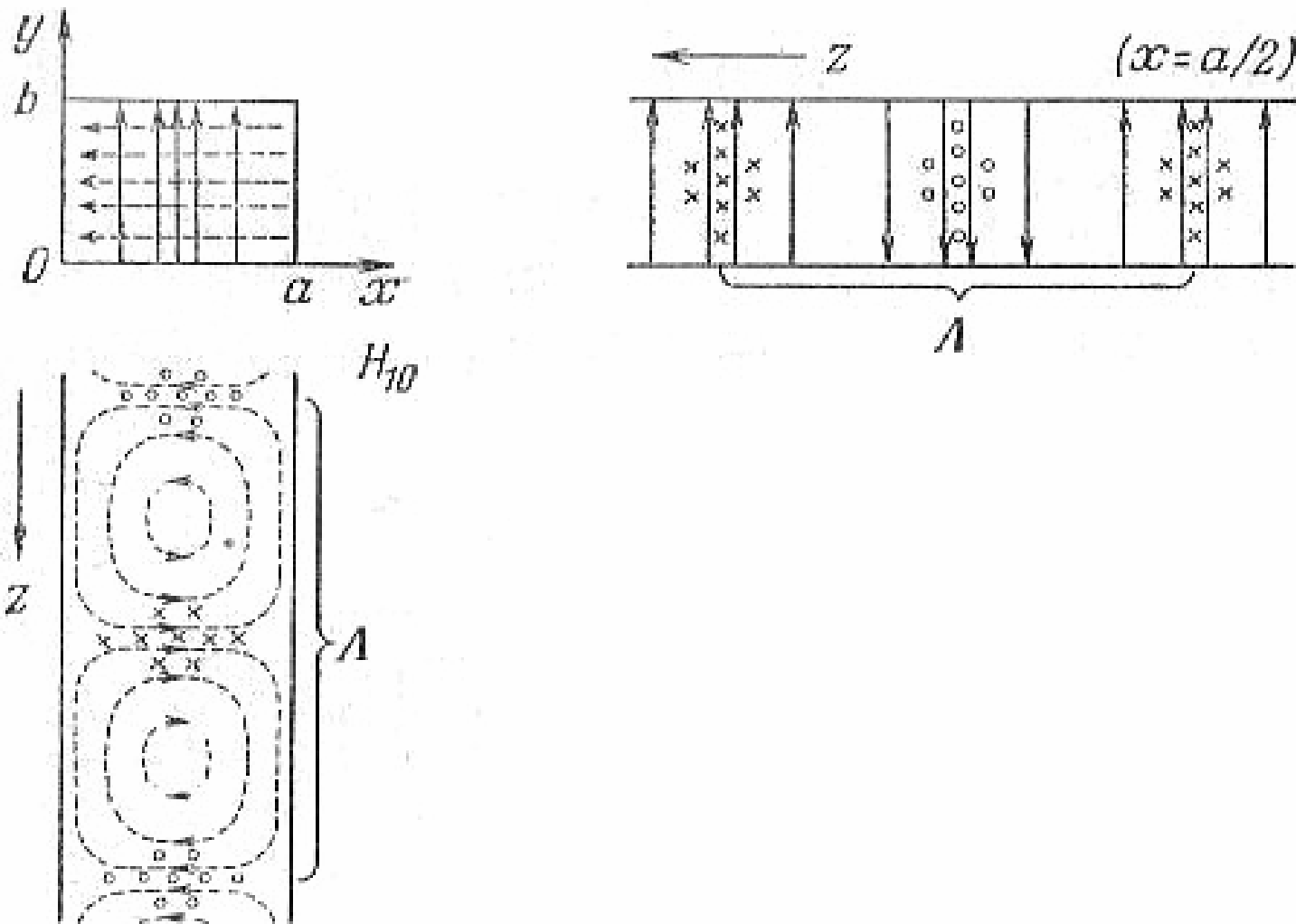
$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_m &= W^H i\dot{H}_0 (\vec{x}_0 \chi_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y - \vec{y}_0 \chi_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y) e^{-i\gamma z}, \\ \dot{\vec{H}}_m &= \dot{H}_0 \left[\vec{z}_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y + i \frac{\gamma}{\chi^2} (\vec{x}_0 \chi_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y + \right. \\ &\left. + \vec{y}_0 \chi_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y) \right] e^{-i\gamma z}.\end{aligned}\quad (9)$$

Тут використано тіж самі позначення, що і у виразах (4), а також **хвильевий опір у класі Н-хвиль**:

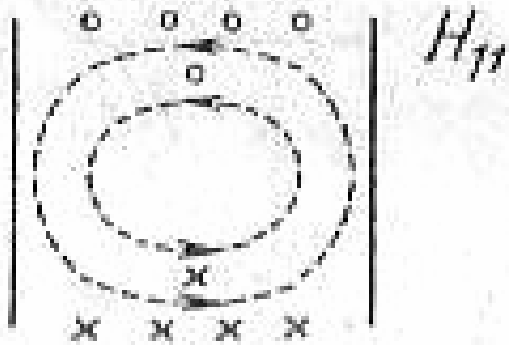
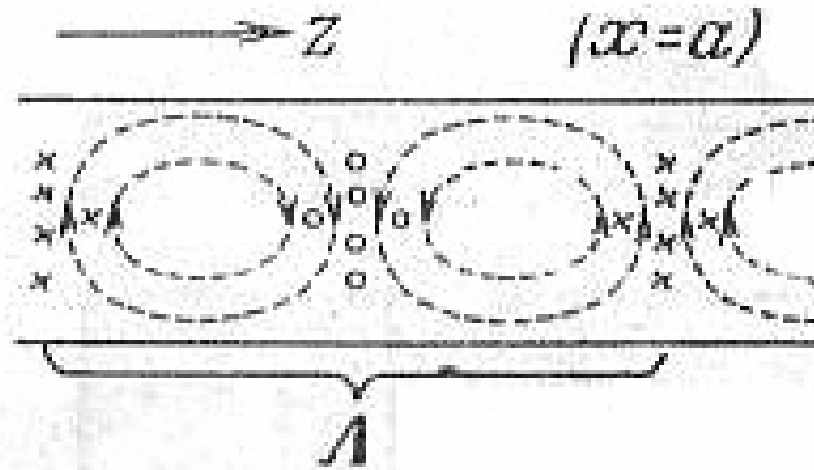
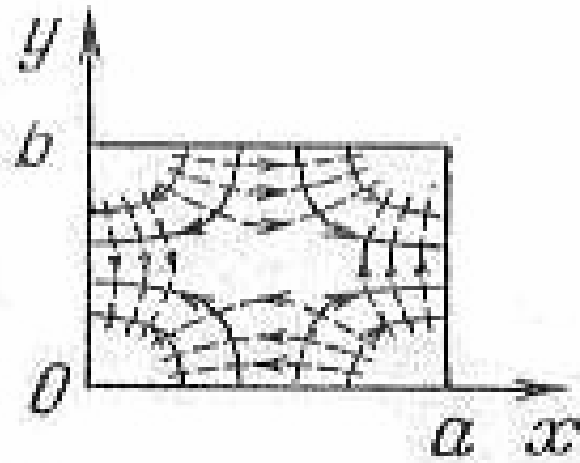
$$W^H = \frac{\omega \mu_0 \mu}{\gamma} = \frac{Wk}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{W}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} = \frac{W}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}}. \quad (10)$$

Н-хвилі

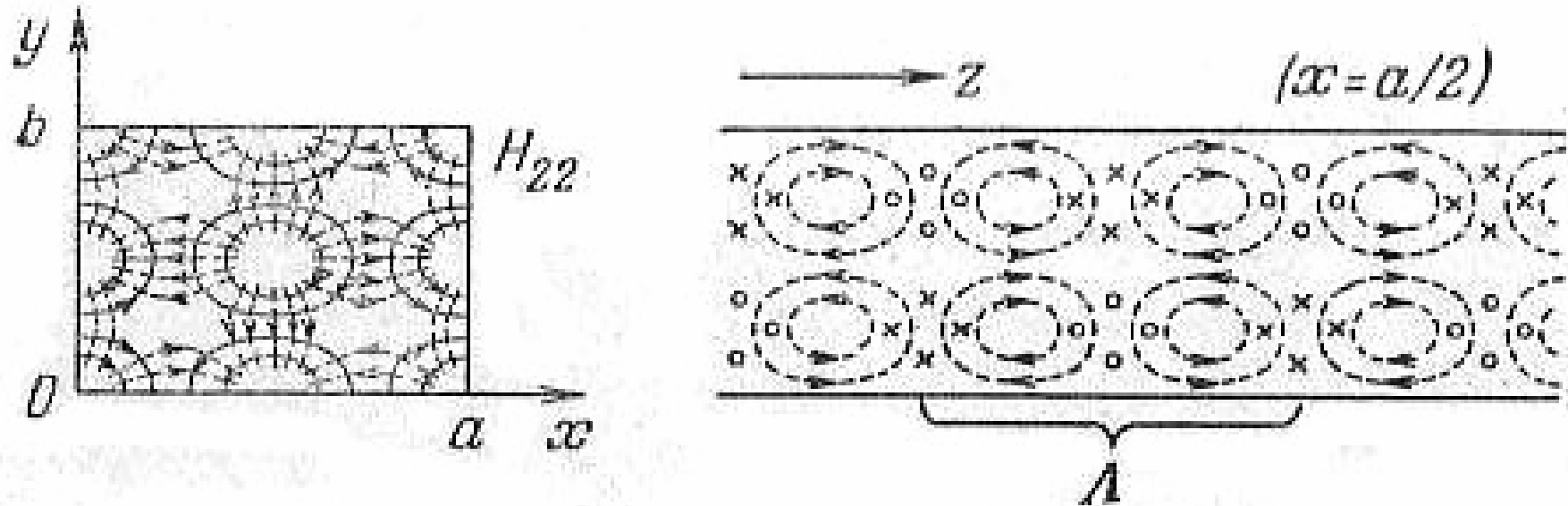
Приклад будови різних полів типу H_{mn} у вигляді картин векторних ліній. Вектор E – суцільні лінії, вектор H – штрихові лінії.



H-хвилі



H-хвилі



Напростішими є структури полів H_{10} та H_{01} . Лінії електричного вектора у першому випадку паралельні до осі y , а магнітні лінії утворюють замкнені контури у площині $y=\text{const}$. Структура H_{11} періодично повторюється у будові складніших полів, якщо $m \neq 0$ і $n \neq 0$.

Загальні властивості хвильових процесів у прямокутному хвилеводі

Конкретизуємо вирази критичної частоти та критичної довжини хвилі:

$$f_{cr}^{mn} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \text{òà} \quad \lambda_{cr}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}.$$

Якщо тепер підставити їх у вираз (5) для сталої поширення,

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_{mn} &= \sqrt{k^2 - \chi^2} = \left[k = \frac{\omega}{c} \varepsilon\mu = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \right] = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \chi^2} = \\ &= k \sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}. \end{aligned}$$

можна її дослідити у випадку прямокутного хвилеводу – див. наст. слайд.

Загальні властивості хвильових процесів у прямокутному хвилеводі

Будь-яке поле типу E_{mn} чи H_{mn} не може мати характеру хвилі, яка поширюється, якщо $f < f_{cr}^{mn}$ ($\lambda > \lambda_{cr}^{mn}$), оскільки стала поширення при цьому – величина суто уявна. Передача енергії неможлива, коли нерівність $f < f_{cr}^{mn}$ ($\lambda > \lambda_{cr}^{mn}$) виконується для всіх типів поля. Зі збільшенням частоти ця нерівність порушиться лише для одного типу і тоді буде створено умови для поширення цієї однієї хвилі, яку називають основною.

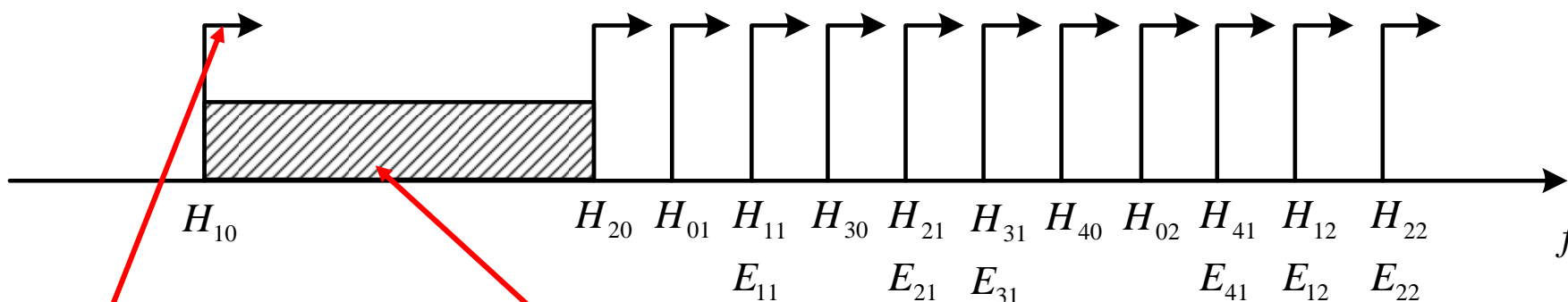
Хвиля, у якої найменше значення поперечного хвильового числа серед всіх хвиль даного хвилеводу, називається хвилею **основного типу**. Вона також має **найменшу критичну частоту та найбільшу критичну довжину**. Решту хвиль називають **хвилями вищих типів**.

Якщо $a > b$, то основною буде хвиля H_{10} , причому

$$\underbrace{\min}_{m,n} f_{cr}^{mn} = f_{cr}^{10} = \frac{c}{2a\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{т} \quad \underbrace{\max}_{m,n} \lambda_{cr}^{mn} = \lambda_{cr}^{10} = 2a.$$

Загальні властивості хвильових процесів у прямокутному хвилеводі

Спектр хвиль цього хвилеводу – рисунок (масштаб по осі частот переважно якісний).



Смуга робочих частот прямокутного хвилеводу може доходити до 46 % !

Говорить про те, що дана хвиля починає поширюватись саме з цієї частоти.

При $f \rightarrow f_{cr}$ необмежено збільшується довжина хвилі у хвилеводі, тобто нескінченно розтягуються картини їхніх полів. При цьому Н-хвилі втрачають поперечні магнітні компоненти, а Е-хвилі – поперечні електричні. Зі збільшенням частоти також зменшуються поздовжні компоненти, порівняно з поперечними для будь-якого Е- чи Н-поля, поля набувають квазі-ТЕМ структуру. Все це впливає з виразів (4) та (9).

Основна хвиля прямокутного хвилеводу

Використовуючи (9) при $m=1$, $n=0$, отримаємо:

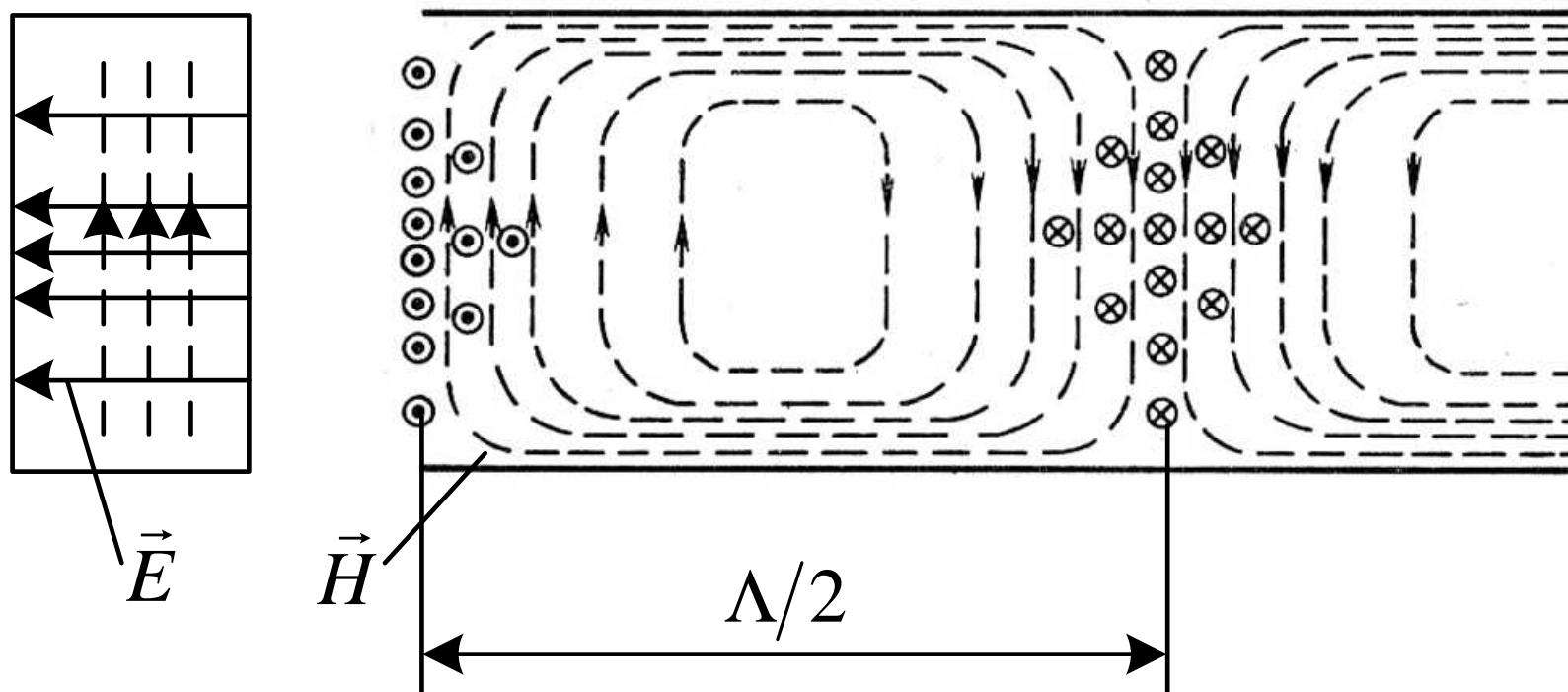
$$\begin{aligned}\vec{E}_{\mp} &= \vec{y}_0 E_{\max} \sin \frac{\pi x}{a} \cdot e^{\mp i \gamma z}; \\ \vec{H}_{\mp} &= \frac{E_{\max}}{\omega \mu_a} \left(\mp \vec{x}_0 \gamma \sin \frac{\pi x}{a} + i \vec{z}_0 \frac{\pi}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \right) e^{\mp i \gamma z}.\end{aligned}\tag{10}$$

$$\gamma_{10} = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}, \quad W^H = \frac{W}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}},$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}}, \quad \lambda_{cr} = 2a.$$

Основна хвиля прямокутного хвилеводу

Знак мінус у цих виразах відповідає хвилі, що поширюється уздовж додатної піввісі z , знак плюс – хвилі протилежного напрямку.

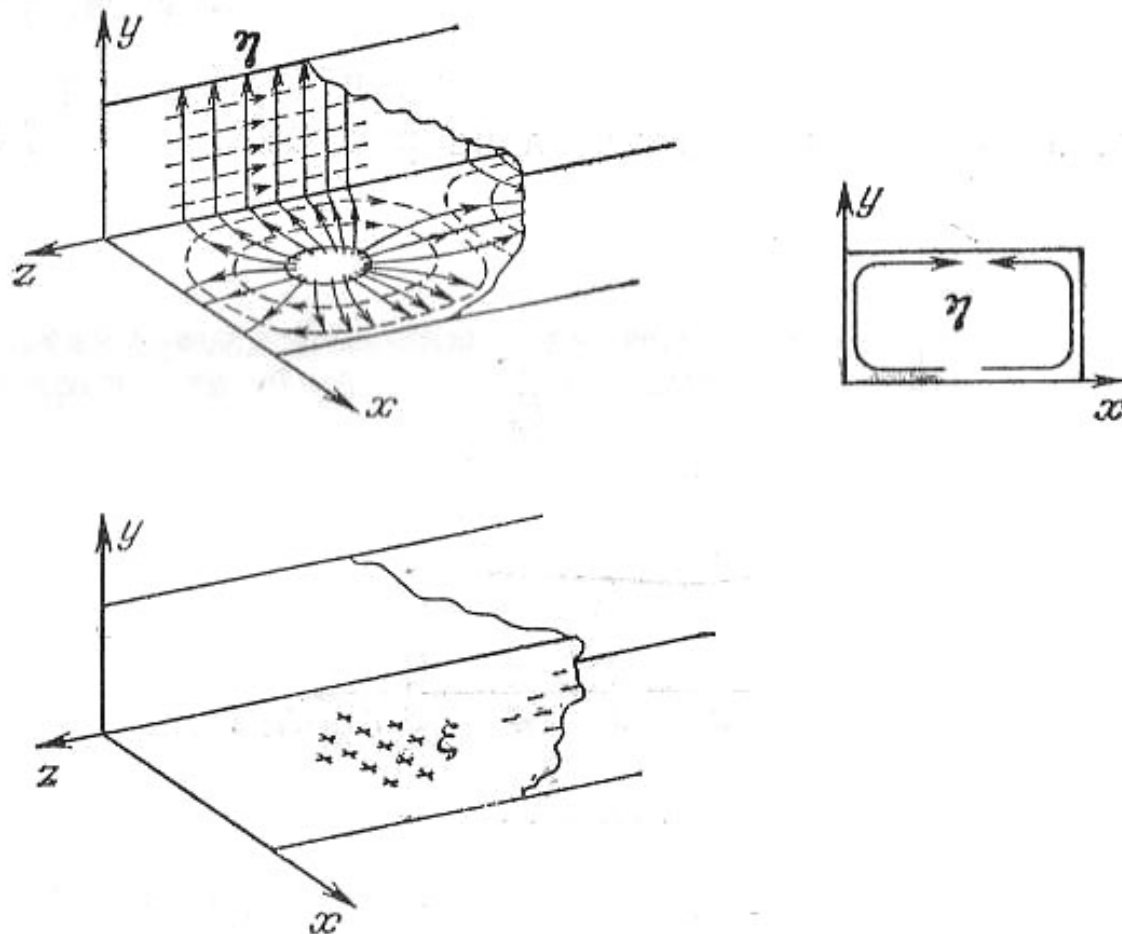


Конфігурація силових ліній хвилі H_{10} .

Основна хвиля прямокутного хвилеводу

На рисунку показано розподіл поверхневого струму

$\vec{\eta} = [\vec{n}_0, \vec{H}^S]$ ($\vec{H}^S = \vec{H}_\tau$, нормаль спрямовано всередину контура) та поверхневого заряду $\xi = \epsilon_0 \epsilon E^S$ ($E^S = E_n$) на внутрішніх стінках для основної хвилі.



Основна хвиля прямокутного хвилеводу

Лінії вектора густини струму провідності ортогональні до магнітних силових ліній. Тому, наприклад, на бічних стінках хвилеводу є лише поперечні струми. Заряд розподілено лише на широких (горизонтальних стінках), оскільки там нормальна складова електричного вектора не дорівнює нулю.

Конфігурація ліній вектора густини струму провідності дає відповіді, наприклад, на такі питання: де можна і не можна прорізати щілини на бічних стінках хвилеводу; під яким кутом до силових ліній вектора густини струму провідності розташовувати ці щілини, щоб отримати максимум (чи мінімум) випромінювання.

У даному випадку: щілини повинні перетинати лінії вектора густини струму перпендикулярно для отримання максимального випромінювання, самі ж щілини при цьому мають бути або скраю широкої стінки чи на будь-якій висоті вузької стінки.

Такі і подібні до них питання завжди виникають при розробці НВЧ-пристроїв телекомунікаційної, радіотехнічної чи медичної апаратури; антен, зокрема антенних решіток; елементів та вузлів радіовимірювальної апаратури, тощо.