Кафедра БІ та Т
Біомедична інженерія
Телекомунікації та радіотехніка

Електродинаміка та техніка НВЧ

Вільні поля у регулярних лініях передачі

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

Нехай, наприклад, спрямовувана хвиля поширюється у сторону збільшення додатніх значень піввісі z $(z > 0)$.

Тоді **вектори E та H у будь-якій точці поля будуть такими функціями координати *z* та часу *t*:**

$$e^{-i\gamma z}e^{i\omega t} = e^{-i(\beta - i\alpha)z}e^{i\omega t} = e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z)}, \tag{1}$$

$\gamma = \beta - i\alpha$ - стала поширення (поздовжнє хвилеве число);

$\beta = \dfrac{2\pi}{\Lambda} = \dfrac{\omega}{v_\phi}$ - коефіцієнт фази;

α - коефіцієнт затухання $(\alpha > 0)$;

Λ - довжина хвилі у лінії передачі.

Фізичний зміст отриманого виразу:

$z \uparrow \Rightarrow e^{-\alpha z} \downarrow$, тобто амплітуда хвилі зменшується;

$z \uparrow \Rightarrow \beta z \uparrow$ у показнику степеня $e^{i(\omega t - \beta z)} \Rightarrow$ збільшується набіг фази.

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

Для спрощення розв’язання задачі вважається, що сторонні джерела перебувають поза розглядуваним об’ємом, наприклад, на відстані $z_{source} \to \infty$.

Тоді ЕМП можна описати однорідними хвилевими рівняннями

$$\boxed{\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0,\ \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0,} \qquad (2)$$

$k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - хвилеве число середовища, яке заповнює дану ЛП.

Для регулярної ЛП зручно вибрати такі ортогональні координати, щоб одна вісь була спрямована уздовж ЛП (найчастіше це вісь z), тоді інші координати будуть у поперечній площині. Тоді лапласіан, як оператор, можна записати як суму лапласіана за поперечними координатами $\nabla_\perp^2$ та похідною другого порядку за координатою z, наприклад:

$$\nabla_\perp^2 \dot{\vec{E}}_m = \nabla_\perp^2 \dot{\vec{E}}_m + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\dot{\vec{E}}_m = \nabla_\perp^2 \dot{\vec{E}}_m + \gamma^2 \dot{\vec{E}}_m$$

Залежність всіх векторів від z задано виразом (1), тому похідна

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-i\gamma z} = \gamma^2 e^{-i\gamma z}.$$

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

Проектуючи вектори у (2) на одну з осей декартової СК $\xi\left(\xi = x, y, z\right)$, отримаємо однакові за формою з (2) скалярні рівняння Гельмгольца:

$$\nabla^2 F + k^2 F = 0, \tag{3}$$

де $F = \dot{E}_{m\xi}$ чи $F = \dot{H}_{m\xi}$.

Використовуючи метод розподілу змінних (метод Фур'є), покладемо у (3)

$$F = \mathrm{F}\left(x, y\right) f\left(z\right).$$

Ця підстановка дає:

$$f\left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + k^2\right)\mathrm{F} + \mathrm{F}\frac{d^2 f}{d^2 z} = 0,$$

або

$$\frac{1}{\mathrm{F}}\left(\nabla_\perp^2 \mathrm{F} + k^2 \mathrm{F}\right) + \frac{f''}{f} = 0. \tag{4}$$

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

У виразі (4) обидва доданки – функції різних координат, тому їх потрібно прирівняти тепер до однакових за абсолютним значенням констант протилежних знаків, одну з яких позначимо γ^2. В результаті

$$\nabla_\perp^2 \mathrm{F} + \left(k^2 - \gamma^2\right)\mathrm{F} = 0 \text{ та } f'' + \gamma^2 f = 0. \tag{5}$$

Друге з цих рівнянь є звичайним диференційним рівнянням другого порядку, розв’язок якого можна записати у таких формах:

$$f = \begin{cases} Ae^{-i\gamma z} + Be^{i\gamma z}, \\ P\cos\gamma z + Q\sin\gamma z. \end{cases} \tag{6}$$

Оскільки мова йде про множники комплексних амплітуд, то перший рядок тут відповідає розв’язку у вигляді накладання ***біжучих хвиль***, а другий – у вигляді ***стоячих хвиль.***

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

Таким чином, **вільні поля у регулярних (поздовжньо-однорідних) ЛП мають характер плоских неоднорідних хвиль.**

Якщо для конкретикивзяти вираз (6) у форматі першого рядка, при В=0, то компоненти комплексних амплітуд векторів поля матимуть вигляд:

$$\boxed{\dot{\vec{E}}_m = \dot{\mathrm{E}}(x, y)e^{-i\gamma z} \text{ та } \dot{\vec{H}}_m = \dot{\mathrm{H}}(x, y)e^{-i\gamma z}.} \quad (7)$$

Ввівши позначення

$$\boxed{\chi^2 = k^2 - \gamma^2} \quad (8)$$

отримаємо для першого рівняння з (5):

$$\begin{gathered} \nabla_\perp^2 \dot{\mathrm{E}}(x,y) + \chi^2 \dot{\mathrm{E}}(x,y) = 0, \\ \nabla_\perp^2 \dot{\mathrm{H}}(x,y) + \chi^2 \dot{\mathrm{H}}(x,y) = 0. \end{gathered} \quad (9)$$

Параметр χ має назву **поперечне хвилеве число.**

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

Якщо втрати уу ЛП малі, $\gamma \cong \beta$ і вираз (8) можна переписати так:

$$\boxed{k^2 = \beta^2 + \chi^2} \qquad (10)$$

Це **рівняння коефіцієнтів.** Для полегшення запам’ятовування виразів (8), (10) можна зробити геометричну інтерпретацію – рисунок.

Хвилеві рівняння для спрямовуваних хвиль

Поперечний переріз ЛП може складатись з кількох різних середовищ з різними параметрами і, відповідно, різними хвилевим числами $k_1, k_2, k_3,...$

При цьому **хвиля, яка поширюється у такій ЛП, має у всіх цих середовищах одне і теж саме значення сталої поширення (поздовжнього хвилевого числа), тому що у протилежному випадку це означає невиконання граничних умов.**

Звідси випливає, зокрема з рівняння (8), що **кожному середовищу відповідає своє поперечне хвилеве число** $\chi_1, \chi_2, \chi_3,...$

Тому поперечне хвилеве число залежить від властивостей середовища.

Зв'язок між поздовжніми та поперечними складовими поля

До цієї миті вважалось, що рівняння (9) розв'язують у векторній формі, тобто відшукується шість координатних складових електричного та магнітного полів. Проте виявляється, що достатньо розв'язати ці рівняння лише для поздовжніх складових E_z та H_z.

Поперечні складові $E_\perp$ та $H_\perp$ у ЛП є однозначними функціями поздовжніх складових.

Зв'язок між поздовжніми та поперечними складовими поля

Зв'язок цей такий:

$$
\begin{aligned}
\dot{E}_{mx} &= \frac{1}{\chi^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial z \partial x} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y}, \\
\dot{E}_{my} &= \frac{1}{\chi^2}\frac{\partial^2 \dot{E}_{mz}}{\partial y \partial z} + \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x}, \\
\dot{H}_{mx} &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} + \frac{1}{\chi^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial z \partial x}, \\
\dot{H}_{my} &= -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} + \frac{1}{\chi^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial y \partial z}.
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

Зв'язок між поздовжніми та поперечними складовими поля

У векторній формі ці ж вирази матимуть вигляд:

$$\dot{\vec{E}}_{m\perp} = \frac{1}{\chi^2}\nabla_\perp \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial z} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{H}_{mz},$$
$$\dot{\vec{H}}_{m\perp} = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{E}_{mz} + \frac{1}{\chi^2}\nabla_\perp \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial z}. \qquad (12)$$

Тут $\dot{\vec{E}}_{m\perp} = \dot{E}_{mx} + \dot{E}_{my}$, $\dot{\vec{H}}_{m\perp} = \dot{H}_{mx} + \dot{H}_{my}$, а символ $\perp$, як і раніше, означає операції по поперечних координатах.

Вирази (12) не залежать від конкретного вибору системи координат. Вони зберігають зміст для будь-якої узагальнено-циліндричної системи координат (q_1, q_2, z) де розуміється вибір будь-яких криволінійних ортогональних координат (q_1, q_2) у поперечній площині.

Класифікація плоских хвиль

У силу принципу суперпозиції поперечне поле, описуване виразами (11) (чи (12)), можна витлумачити як накладання двох поперечних полів, одне з яких утворює розв'язок рівнянь Максвела разом з поздовжньою компонентою E_z, а інше – з H_z.

Тому існує щонайменше два частинних класи спрямовуваних хвиль, які називають Е-хвилі та Н-хвилі відповідно.

Електрична хвиля (Е-хвиля, ТМ-хвиля, поперечна магнітна хвиля) – хвиля, у якої вектор Е має як поздовжню, так і поперечну складові, а поздовжня складова вектора Н дорівнює нулю.

Комплексні амплітуди векторів поля цієї хвилі:

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{E}_{mz} + \frac{1}{\chi^2}\nabla_\perp \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial z},$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\operatorname{rot}_\perp \dot{E}_{mz} = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\left[\nabla_\perp \dot{E}_{mz}, \vec{z}_0\right]. \qquad (13)$$

Класифікація плоских хвиль

Магнітна хвиля (Н-хвиля, ТЕ-хвиля, поперечна електрична хвиля) – хвиля, у якої вектор Н має як поздовжню, так і поперечну складові, а поздовжня складова вектора Е дорівнює нулю.

Для цього класу полів з (12) отримаємо:

$$\dot{\vec{E}}_m = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\,\mathrm{rot}_\perp \dot{H}_{mz} = \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\left[\vec{z}_0, \mathrm{rot}_\perp \dot{H}_{mz}\right],$$

$$\dot{\vec{H}}_m = \dot{H}_{mz} + \frac{1}{\chi^2}\nabla_\perp \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial z}. \qquad (14)$$

Класифікація плоских хвиль

Відома читачам плоска однорідна хвиля не належить до жодного з цих двох вказаних класів.

Такі суто поперечні хвилі $(E_z = 0$ та $H_z = 0)$ становлять третій частинний випадок плоских хвиль та мають назву поперечна хвиля.

Поперечна хвиля (ТЕМ-хвиля, Т-хвиля, від англ. transvers - поперечний) – хвиля, у якої вектори Е та Н перпендикулярні до напряму поширення хвилі, тобто не мають поздовжніх компонент векторів поля.

З виразів (11) випливає, що існування хвиль ТЕМ при $\chi^2 \neq 0$ неможливе: всі компоненти поля у цьому випадку тотоюньо дорівнюють нулю.

І четвертий тип хвиль – це гібридні хвилі, у яких $E_z \neq 0$ та $H_z \neq 0$.

Гібридна хвиля (змішана хвиля, НЕ (ЕН)-хвиля) – хвиля, у якої і вектор Е, і вектор Н разом з поперечними складовими, мають і поздовжні складові.

Послідовність літер у їхньому написанні визначається просто: у якого з векторів більша амплітуда поздовжньої складової, символ того вектора і пишеться першим.

Властивості спрямовуваних хвиль

Для цього перепишемо вираз (8) так:

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2}. \qquad (15)$$

Для екранованих ЛП з однорідним середовищем $\chi^2 \geq 0,$ а якщо виключити випадок ТЕМ хвиль, то $\chi^2 > 0.$

Беручи до уваги вираз (15), та розглядаючи середовища без втрат, бачимо, що $\gamma < k.$ Звідси випливає, що $v_\phi > v_{\varepsilon\mu},$ тобто фазові швидкості Е- та Н- хвиль більші за фазову швидкість хвилі ТЕМ у даному середовищі. Тому такі хвилі називають швидкими хвилями.

Наприклад, це матиме місце у порожніх хвилеводах, коаксіальній лінії тощо.

Зверніть увагу на особливість термінології: хвилевід називають порожнім не лише у випадку заповнення його вакуумом, але й у випадку його заповнення повітрям!

Властивості спрямовуваних хвиль

Виконаємо тотожні перетворення (15):

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2} = \left[k = \frac{\omega}{c}\varepsilon\mu = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \right] = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - \chi^2} =$$

$$= k\sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}. \qquad (16)$$

Нові параметри мають назви:

$\boxed{f_{cr} = \dfrac{\chi c}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}}}$ - критична частота;

$\boxed{\lambda_{cr} = \dfrac{2\pi}{\chi}}$ - критична довжина хвилі.

Властивості спрямовуваних хвиль

Коли частота більша за критичну $\left(f > f_{cr}\right)$, в ЛП існує швидка хвиля, яка поширюється без затухання $\alpha = 0,\ \gamma = \beta,$

Довжина цієї хвилі

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{cr}}{f}\right)^2}}.$$

а фазова та групова швидкості відповідно:

$$v_{\phi} = \frac{v_{\varepsilon\mu}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{f_{cr}}{f}\right)^2}} = \frac{v_{\varepsilon\mu}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}},$$

$$v_{гр} = v_{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2} = v_{\varepsilon\mu}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}.$$