Кафедра БІ та Т
○ Біомедична інженерія
○ Телекомунікації та радіотехніка

Електродинаміка та техніка НВЧ

Система рівнянь Максвелла та види електромагнітних явищ

СРМ та види електромагнітних явищ

Перехід від системи рівнянь Максвелла (СРМ) до рівнянь, що описують частинні класи електромагнітних явищ, здійснюють шляхом накладання відповідних обмежень.

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}; \quad \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho; \quad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0.$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},\ \vec{j} = \sigma \vec{E};$$

Якщо характер обмеження $\frac{\partial}{\partial t} = 0,$ тоді це **стаціонарні процеси**:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0; \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j};$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho; \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0;$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H},$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

СРМ та види електромагнітних явищ

Якщо характер обмеження $\vec{j} = 0$, тоді це рівняння **електростатики**

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0;$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho;$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

та **магнітостатики**:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0;$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0;$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Принцип суперпозиції

Принцип суперпозиції

Для лінійного середовища СРМ – це система лінійних рівнянь. У цьому випадку при аналізі електромагнітних явищ можна застосовувати **принцип суперпозиції:**

будь-яка лінійна комбінація розв'язків СРМ $\{\vec{E}_i, \vec{H}_i, \vec{D}_i, \vec{B}_i, \vec{j}_i, \rho_i\}$, $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ **також є розв'язком цієї системи.**

Звідси можна отримати нові розв'язки, використовуючи довільний набір констант a_i. Наприклад, для напруженості електричного поля $\vec{E} = \sum_i a_i \vec{E}_i$.

Такими ж самр будуть комбінації величин, які виражають сторонні сили (якщо вони є). Тому кажуть: у силу принципу суперпозиції поле, створюване декількома джерелами, можна розглядати як суму (накладання) полів, отримуваних за окремої дії джерел.

Але! На енергію принцип суперпозиції не поширюється (це нелінійна функція поля). Наприклад, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$:

$$W^E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 \mathrm{dv} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right)^2 \mathrm{dv} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \vec{E}_1^2 \mathrm{dv} + \varepsilon_0 \int_V \varepsilon \vec{E}_1 \vec{E}_2 \mathrm{dv} + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \vec{E}_2^2 \mathrm{dv} = W_1^E + \boxed{W_{12}^E} + W_2^E.$$

взаємна енергія полів

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

СРМ+граничні умови+сторонні джерела є математичним апаратом для розв'язку задач електродинаміки.

З СРМ можна виключити всі невідомі величини, крім напруженостей поля шляхом заміни індукції через напруженості за допомогою матеріальних рівнянь та застосовуючи до основних рівнянь Максвелла операцію rot, маємо:

$$\mathrm{rot}\left(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\vec{H}\right)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{E}+\mathrm{rot}\,\varepsilon^{-1}\vec{j},$$

$$\mathrm{rot}\left(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E}\right)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{H}.$$

Замінюючи тепер у правій частині операцію rot, з використанням відповідних рівнянь Максвелла, отримаємо:

$$\mathrm{rot}\left(\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\vec{H}\right)+\frac{\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=\mathrm{rot}\,\varepsilon^{-1}\vec{j},$$

$$\mathrm{rot}\left(\mu^{-1}\mathrm{rot}\vec{E}\right)+\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=-\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}.$$

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

Для типових випадків (однорідні та ізотропні середовища) параметри $\varepsilon^{-1}, \mu^{-1}$ можна винести за межі операції rot, що дає $\mathrm{div}\vec{H} = 0$, $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0\varepsilon$.

З урахуванням тотожності $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{F} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{F} - \nabla^2\vec{F}$, отримаємо:

$$\nabla^2\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = -\mathrm{rot}\vec{j},$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\mathrm{grad}\rho + \mu_0\mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}.$$

Але! Праві частини цих рівнянь не є відомими: у вираз для густини струму входить шукана напруженість електричного поля. При $\sigma = 0 \Rightarrow \vec{j} = \vec{j}_{cm}$,

а густиною стороннього струму задаються при постановці задачі. У такому випадку ці рівняння називають “**рівняння Даламбера (векторні)**”. За відсутності струмів і зарядів обидва рівняння стають однорідними, і тоді їх називають “**хвилеві рівняння**”.

Зазвичай для спрощення їхнього розв’язання використовують допоміжні функції:

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

- **електродинамічні потенціали**:

векторний $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \mathrm{rot}\vec{A}$ та скалярний $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

- **вектор Герца**: $\varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathrm{div}\vec{\Gamma}, \ \vec{A} = \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t} + \sigma \frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon} \vec{\Gamma}.$

Підстановка виразів для потенціалів у перше рівняння Максвелла (при однорідності та ізотропії середовища) дає вираз:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mathrm{grad}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} \right) - \mu_0 \mu \vec{j},$$

який з урахуванням “лоренцевого калібрування”

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{A} = 0$$

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

переходить у **векторне рівняння Даламбера для векторного потенціалу**:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mu \vec{j},$$

та **скалярне рівняння Даламбера для скалярного потенціалу**:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

Тут $\vec{j}$ та ρ розглядають як задані.

Таким чином, напруженості полів можна знайти, якщо попередньо визначити електродинамічні потенціали як розв'язки записаних рівнянь.

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

Серед можливих змін електромагнітного поля у часі особливе місце займає закон гармонічних коливань. Справа не лише у тому, що гармонічні коливання становлять практичний інтерес, але й у тому, що іншого роду часові залежності можна розкладати за гармонічними коливаннями, використовуючи для цього ряди та інтеграл Фур'є.

У загальному випадку кожну з компонент векторів E та H гармонічного у часі поля можна охарактеризувати не лише деякою амплітудою, але й своєю фазою, тому ці вектори та інші вектори поля записують у форматі "комплексна амплітуда", а метод комплексних амплітуд зручний для описання таких полів.

Таким чином, якщо у рівняннях електродинаміки замінити всі величини на їхні комплексні представлення, то неважко помітити, що ***це дозволяє замість диференціювання за часом скрізь ввести множення на $i\omega$.*** Крім цього, ***метод комплексних амплітуд також дозволяє виключити часову залежність у рівняннях електродинаміки, а значення всіх параметрів можна розглядати вже не у межах дійсної вісі, а на комплексній площині***, у першу чергу це стосується проникностей середовища.

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

Застосування методу комплексних амплітуд до першого рівняння Максвелла:

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m\\ &\dot{\vec{j}}_m = \sigma\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\,cm}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \operatorname{rot}\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\,cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\boxed{\dot{\varepsilon} = \left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)}\right] \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot}\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\,cm}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''; tg\delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \varepsilon'(1 - itg\delta);\\ &\dot{\mu} = \mu' - i\mu''; tg\delta^{м} = \frac{\mu''}{\mu'} \Rightarrow \dot{\mu} = \mu'(1 - itg\delta^{м}).\end{aligned}}$$

$$tg\delta = \begin{cases} >> 1 \Rightarrow \text{середовище є провідником}\\ << 1 \Rightarrow \text{середовище є діелектриком}\end{cases}$$

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

Аналогічна послідовність дій виконується для другого рівняння Максвелла. У результаті СРМ зводиться всього до двох (!) рівнянь:

$$\mathrm{rot}\dot{\vec{H}}_m = i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}_m + \dot{\vec{j}}_m^{\,cm},$$

$$\mathrm{rot}\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m.$$

Аналогічно приводять до комплексної форми рівняння електродинаміки другого порядку. Для цього у вихідних рівняннях роблять заміни

$$\partial/\partial t \to i\omega;\ \partial^2/\partial t^2 \to -\omega^2;\ \vec{j} \to \dot{\vec{j}}_m^{\,cm},$$

а проникності розглядають як комплексні величини. Тоді рівняння

$$\mathrm{rot}\left(\dot{\varepsilon}^{-1}\mathrm{rot}\dot{\vec{H}}_m\right) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m = \mathrm{rot}\,\dot{\varepsilon}^{-1}\dot{\vec{j}}_m^{\,cm},$$

$$\mathrm{rot}\left(\dot{\mu}^{-1}\mathrm{rot}\dot{\vec{E}}_m\right) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\vec{j}}_m^{\,cm}.$$

набувають вигляду

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m = \operatorname{rot}\dot{\vec{j}}_m^{\,cm},$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{E}}_m = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}} \operatorname{grad}\operatorname{div}\dot{\vec{j}}_m^{\,cm} + i\omega\mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{j}}_m^{\,cm}.$$

Це **неоднорідні рівняння Гельмгольца.** При $\dot{\vec{j}}_m^{\,cm} = 0$ вони переходять в **однорідні рівняння Гельмгольца:**

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{E}}_m = 0.$$

Електромагнітне поле, гармонічне у часі

Аналогічно для електродинамічних потенціалів:

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\mu_0 \dot{\mu}} \operatorname{rot} \dot{\vec{A}}_m \qquad \dot{\vec{E}}_m = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_m - i\omega \dot{\vec{A}}_m$$

Рівняння Даламбера переходять у неоднорідні рівняння Гельмгольца:

$$\text{векторне}: \nabla^2 \dot{\vec{A}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{A}}_m = -\mu_0 \dot{\mu} \dot{\vec{j}}_m^{\,cm},$$

$$\text{скалярне}: \nabla^2 \dot{\varphi}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\varphi}_m = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 \dot{\varepsilon}} \operatorname{div} \dot{\vec{j}}_m^{\,cm}.$$

Використовуючи лоренцевого калібрування $i\dfrac{\omega}{c^2}\dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\varphi}_m + \operatorname{div}\dot{\vec{A}}_m = 0,$
можна виключити скалярний потенціал і отримати:

$$\dot{\vec{E}}_m = -\frac{ic^2}{\omega \dot{\varepsilon}\dot{\mu}} \left[\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\vec{A}}_m + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \dot{\varepsilon}\dot{\mu}\dot{\vec{A}}_m \right].$$

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

При гармонічних коливаннях особливий інтерес становлять середні енергетичні характеристики:

$$\left\langle \vec{F}^{\,2} \right\rangle = \frac{1}{2}\dot{\vec{F}}_m \dot{\vec{F}}_m^{*} = \frac{1}{2}\left(\dot{F}_{mx}^2 + \dot{F}_{my}^2 + \dot{F}_{mz}^2\right);$$

$$\left\langle \vec{F}_1 \vec{F}_2 \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\dot{\vec{F}}_{m1}\dot{\vec{F}}_{m2}^{*} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\dot{\vec{F}}_{m2}\dot{\vec{F}}_{m1}^{*};$$

$$\left[\vec{F}_1, \vec{F}_2\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{F}}_{m1}, \dot{\vec{F}}_{m2}^{*}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{F}}_{m1}^{*}, \dot{\vec{F}}_{m2}\right].$$

Тому середні значення густин електричної та магнітної енергій визначатимуть так:

$$\left\langle w^E \right\rangle = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^{*}}{4}; \left\langle w^M \right\rangle = \frac{\mu_0 \mu \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^{*}}{4}$$

Тут проникності ε, μ слід розуміти як дійсні величини.

Густина комплексної потужності $\dot{p} = \frac{1}{2}\dot{\vec{j}}_m^{*}\dot{\vec{E}}_m$

Середнє значення густини потужності $\left\langle p \right\rangle = \mathrm{Re}\left\langle \dot{p} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\dot{\vec{j}}_m^{*}\dot{\vec{E}}_m\right)$

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

Комплексний вектор Пойнтінга $\dot{\vec{\Pi}}_m = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*\right]$

Середнє значення вектора Пойнтінга $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \mathrm{Re}\, \dot{\vec{\Pi}}_m = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*\right]$

Власне виведення рівняння балансу енергії при гармонічних коливаннях:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\dot{\vec{H}}_m^* = -i\omega\varepsilon_0\dot{\varepsilon}^*\dot{\vec{E}}_m^* + \left(\dot{\vec{j}}_m^{\,cm}\right)^* \Big| \cdot \dot{\vec{E}}_m \\ - \\ \mathrm{rot}\dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m \Big| \cdot \dot{\vec{H}}_m^* \\ \mathrm{div}\left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*\right] = \dot{\vec{H}}_m^*\mathrm{rot}\dot{\vec{E}}_m - \dot{\vec{E}}_m\mathrm{rot}\dot{\vec{H}}_m^* \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\mathrm{div}\left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*\right] = i\omega\left(\varepsilon_0\dot{\varepsilon}^*\dot{\vec{E}}_m^*\dot{\vec{E}}_m - \mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m\dot{\vec{H}}_m^*\right) - \left(\dot{\vec{j}}_m^{\,cm}\right)^*\dot{\vec{E}}_m$$

або

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

$$\boxed{\operatorname{div}\dot{\vec{\Pi}} = i\frac{\omega}{2}\left(\varepsilon_0\dot{\varepsilon}^*\dot{\vec{E}}_m^*\dot{\vec{E}}_m - \mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m\dot{\vec{H}}_m^*\right) - \dot{p}_{cm}} \qquad (*)$$

де $\dot{p}_{cm} = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{j}}_m^{\,cm}\right)^*\dot{\vec{E}}_m$ - густина комплексної потужності джерела.

Шляхом інтегрування по деякому об'єму V з границею S з виразу (*) маємо:

$$\boxed{\dot{P}_\Sigma = i\frac{\omega}{2}\int_V\left(\varepsilon_0\dot{\varepsilon}^*\dot{\vec{E}}_m^*\dot{\vec{E}}_m - \mu_0\dot{\mu}\dot{\vec{H}}_m\dot{\vec{H}}_m^*\right)dv - \dot{P}_{cm},}$$

де $\dot{P}_\Sigma = \oint_S \dot{\vec{\Pi}}d\vec{s}$, $\dot{P}_{cm} = \int_V \dot{p}_{cm}dv = \frac{1}{2}\int_V\left(\dot{\vec{j}}_m^{\,cm}\right)^*\dot{\vec{E}}_m dv$

Після розподілу цього виразу на дійсну та уявну частини, отримаємо:

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

$$\operatorname{Re}\dot{P}_{\Sigma} = -\frac{\omega}{2}\int_V \left(\varepsilon_0\varepsilon''\dot{\vec{E}}_m^*\dot{\vec{E}}_m - \mu_0\mu''\dot{\vec{H}}_m\dot{\vec{H}}_m^*\right)dv - \operatorname{Re}\dot{P}_{cm},$$

$$\operatorname{Im}\dot{P}_{\Sigma} = \frac{\omega}{2}\int_V \left(\varepsilon_0\varepsilon'\dot{\vec{E}}_m^*\dot{\vec{E}}_m - \mu_0\mu'\dot{\vec{H}}_m\dot{\vec{H}}_m^*\right)dv - \operatorname{Im}\dot{P}_{cm}$$

Оскільки середнє значення потоку енергії через поверхню S це $\operatorname{Re}\dot{P}_{\Sigma} = \langle P_{\Sigma}\rangle$, а середня потужність джерела це $\operatorname{Re}\dot{P}_{cm} = \langle P_{cm}\rangle$, тому

$$\langle P_{\Sigma}\rangle = -\frac{\omega}{2}\int_V \left(\varepsilon_0\varepsilon''\dot{\vec{E}}_m^*\dot{\vec{E}}_m - \mu_0\mu''\dot{\vec{H}}_m\dot{\vec{H}}_m^*\right)dv - \langle P_{cm}\rangle, \qquad (**)$$

Це є **середній баланс енергії при гармонічних коливаннях поля.**

Його частинні випадки:

1) коли уявні частини проникностей у (**) дорівнюють нулю: $\langle P_{\Sigma}\rangle = -\langle P_{cm}\rangle$,

потужність джерел, розташованих всередині об’єму V витрачається на випромінювання у зовнішній простір.

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

2) $\left\langle P_{\Sigma}\right\rangle = 0$. Тоді, враховуючи, що $\left\langle P_{cm}\right\rangle < 0$, інтеграл у (**) має бути додатній, тому ***потужність джерела витрачається всередині області V:***

$$\boxed{\left\langle P_{loss}\right\rangle = -\left\langle P_{cm}\right\rangle,} \quad \text{де} \quad \left\langle P_{loss}\right\rangle = \frac{\omega}{2}\int_V \left(\varepsilon_0 \varepsilon'' \dot{\vec{E}}_m^* \dot{\vec{E}}_m - \mu_0 \mu'' \dot{\vec{H}}_m \dot{\vec{H}}_m^*\right) dv \; -$$

потужність втрат в об'ємі V. Якщо

$$\mu'' = 0,\ \varepsilon'' = \sigma/\omega\varepsilon_0 \Rightarrow \left\langle P_{loss}\right\rangle = \frac{1}{2}\int_V \sigma \dot{\vec{E}}_m \dot{\vec{E}}_m^* dv$$

У компактній формі дійсна частина рівняння середнього балансу енергії матиме вигляд:

$$\left\langle P_{\Sigma}\right\rangle = \left\langle P\right\rangle,$$

$\left\langle \vec{P}\right\rangle = \left\langle P_{loss}\right\rangle + \left\langle P_{cm}\right\rangle$ – повна середня потужність, вона ж **активна потужність;**

$\left\langle P_{\Sigma}\right\rangle$ – **активний потік енергії.**

Баланс енергії при гармонічних коливаннях

Для уявної складової рівняння балансу енергії маємо, для випадку відсутності втрат у середовищі:

$$\varepsilon'' = 0,\ \mu'' = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{Im}\dot{P}_{\Sigma} = 2\omega\left(\left\langle W^{E}\right\rangle - \left\langle W^{M}\right\rangle\right) - \operatorname{Im}\dot{P}_{cm},}$$

де $\left\langle W^{E}\right\rangle, \left\langle W^{M}\right\rangle$ – середні електрична та магнітна енергії всередині об'єму V,

$\operatorname{Im}\dot{P}_{\Sigma}$ – реактивний потік енергії;

$\operatorname{Im}\dot{P}_{cm}$ – реактивна потужність джерела.