

Електродинаміка та техніка НВЧ

Поширення електромагнітних сигналів

Загальні положення

Дисперсія (у теорії хвильових процесів) – залежність фазової швидкості хвилі від частоти.

Середовища, у яких має місце це явище, називають *диспергуючими*. Якщо строго, то всі середовища є такими, оскільки вони є електропровідними.

$$v_{\phi} = \frac{c}{\operatorname{Re} \sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{\omega}{k'}$$

Крім цього, у лініях передачі дисперсія має зовсім іншу природу.

Наявність дисперсії потрібно враховувати, оцінюючи поширення електромагнітних сигналів, тобто хвильових процесів, які переносять інформацію.

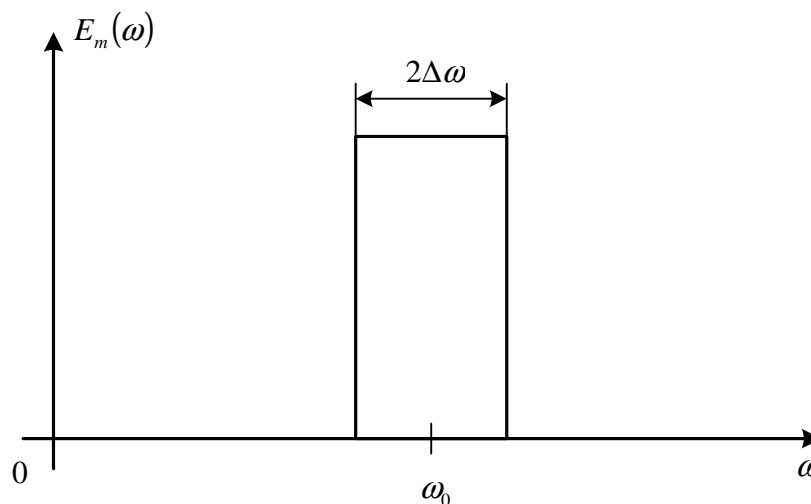
У цьому випадку **наявність дисперсії спричиняє спотворення форми сигналів**. Чому? Сигнал є сумою частотних компонент (математично це ряд чи інтеграл Фур'є). Прийнятий сигнал також є сумою цих компонент, кожна з яких поширюється зі своєю фазовою швидкістю, яка визначається частотою. У результаті зміни фазових співвідношень частотних компонент сигнал у певній мірі спотворюється.

Групова швидкість хвильового процесу

Якщо взяти спектральну густину сигналу $\dot{S}(\omega)$ у вигляді комплексної амплітуди хвилі $\frac{1}{2}\dot{\vec{E}}(\omega)e^{-ikz}$, та врахувати, що $\dot{S}(-\omega) = \dot{S}^*(\omega)$, то напруженість електричного поля при цьому виглядатиме так:

$$\vec{E} = \text{Re} \int_0^{\infty} \dot{\vec{E}}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega.$$

Вважаючи, що спектр зосереджено у смужці частот від $\omega_0 - \Delta\omega$ до $\omega_0 + \Delta\omega$, (рисунок) маємо:



Групова швидкість хвильового процесу

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{\vec{E}}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega = \left[\begin{array}{l} \omega \rightarrow k \\ k_0 = k(\omega_0) \end{array} \right] =$$
$$= \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{\vec{E}}(k) e^{i[\omega(k)t - kz]} dk.$$

Заміна змінної

Якщо смуга частот (а значить і хвильових чисел) є вузькою, тобто

$\Delta\omega \ll \omega_0$, і $\Delta k \ll k_0$, то розглядуваний хвильовий процес називають **група хвиль**. У цьому випадку можна розкласти частоту, як функцію хвильового числа, у ряд Тейлора, у точці $k = k_0$:

$$\omega = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} (k - k_0) + \dots$$

та обмежитись лінійною частиною розкладу. Тоді

Групова швидкість хвильового процесу

$$\vec{E} \approx \text{Re} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{\vec{E}}(k) e^{i \left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0} t - z \right) (k - k_0)} dk.$$

Для найпростішого випадку $\dot{\vec{E}}(k) = \dot{\vec{E}}(\omega) = \text{const}$ і її можна винести з під знаку інтеграла. Після чого отримуємо:

Групова швидкість хвильового процесу

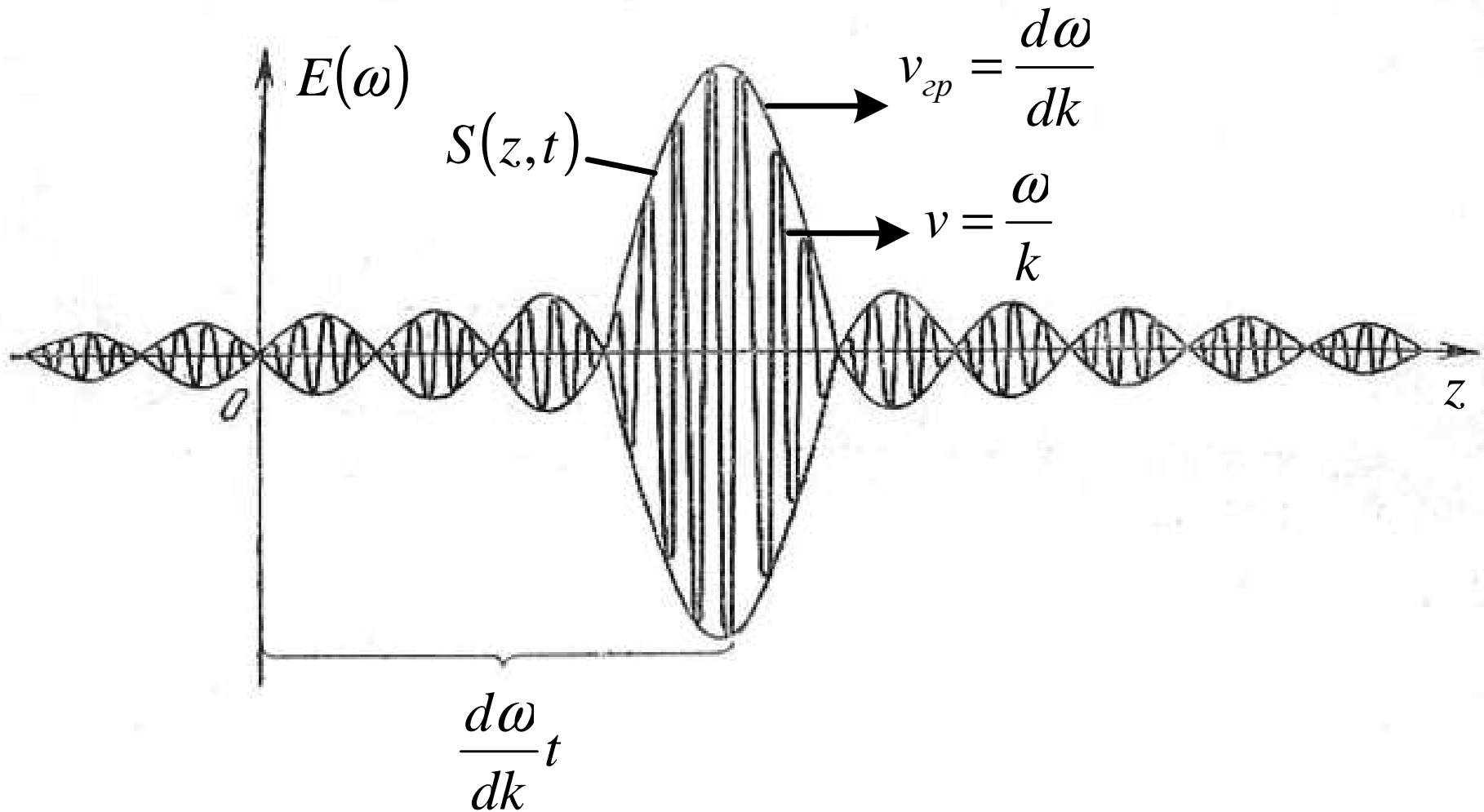
$$\begin{aligned}
 \vec{E} &\approx 2 \operatorname{Re} \dot{\vec{E}}(k_0) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t - z} = \\
 &= 2 \vec{E}_m \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} \Big|_{k=k_0} t - z} \cos(\omega_0 t - k_0 z) = \boxed{[\omega = \omega_0]} = \\
 &= 2 \vec{E}_m \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z} \cos(\omega t - kz). \tag{1}
 \end{aligned}$$

Групова швидкість хвильового процесу

Отриманий результат говорить про те, що **поле групи хвиль має характер модульованої гармонічної хвилі з обвідною**

$$S(z, t) = \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z}. \quad (2)$$

Групова швидкість хвильового процесу



“Миттєвий знімок” розподілу цього поля

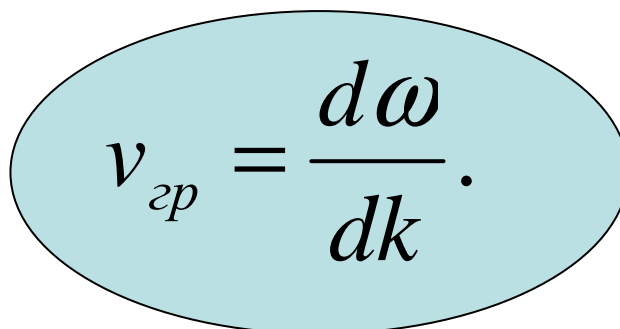
Групова швидкість хвильового процесу

Фазова швидкість $v \equiv v_\phi = \omega/k$ в аргументі косинуса виразу (1) є швидкість зміщення “несучої косинусоїди” уздовж осі z всередині обвідної.

Щодо самої обвідної, то її максимум, як випливає з виразу (2), має місце при

$$\frac{d\omega}{dk} t - z = 0.$$

Оскільки ця умова при різних координатах z виконується у різні моменти часу, то обвідна рухається, і швидкість цього руху – це **групова швидкість**:


$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Вона є швидкістю поширення сигналу, що передається хвильовим процесом.

Фазова та групова швидкості

$$v_{gp} = \frac{d}{dk} (v_{\phi} k) = v_{\phi} + k \frac{dv_{\phi}}{dk},$$

$$v_{gp} = v_{\phi} + k \frac{dv_{\phi}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}.$$

Фазова та групова швидкості у лініях передач

Для ліній передач:

$$v_{gr} = \frac{v_{\varepsilon\mu}^2}{v_{\phi}} \frac{1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}}{1 - \frac{\chi}{k} \frac{d\chi}{dk}}. \quad (3)$$

Тут $v_{\varepsilon\mu} = \frac{c}{n}$ - фазова швидкість швилі у даному середовищі;

$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - коефіцієнт заломлення;

χ - критичне (поперечне) хвилеве число.

Фазова та групова швидкості у лініях передач

Частинні випадки (3):

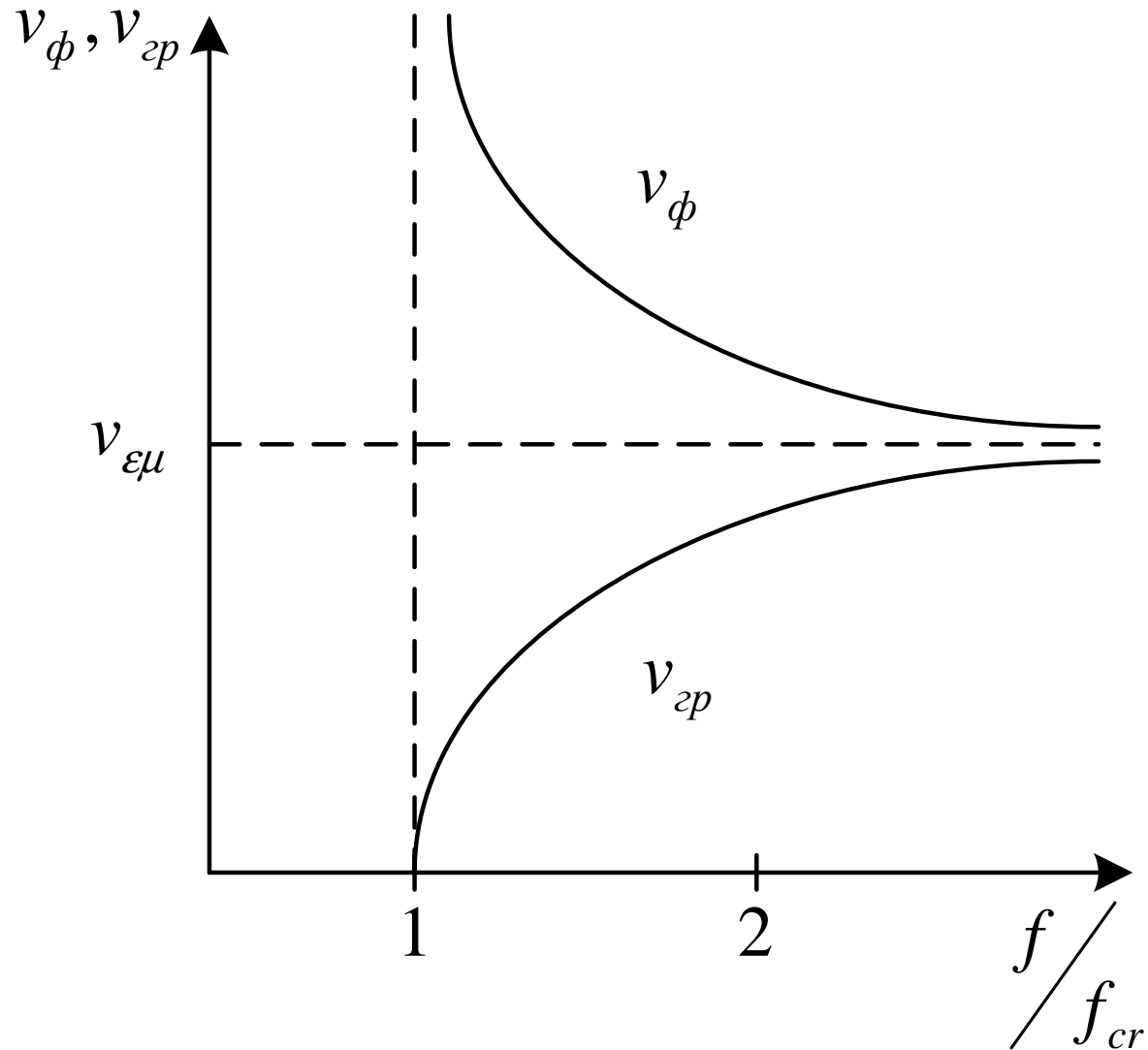
1) $\chi = 0 \Rightarrow v_{\phi} = v_{gp} = \frac{c}{n} = v_{\epsilon\mu}$ - дисперсія відсутня

2) $\chi^2 = const > 0 \Rightarrow \frac{d\chi}{dk} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} v_{\phi} &= \frac{v_{\epsilon\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2}} = \frac{v_{\epsilon\mu}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2}} \\ v_{gp} &= v_{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{f_{cr}}{f}\right)^2} = v_{\epsilon\mu} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{cr}}\right)^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_{\phi} v_{gp} = v_{\epsilon\mu}^2$$

f_{cr} - критична частота; λ_{cr} - критична довжина хвилі.

Фазова та групова швидкості у лініях передач



Залежності фазової та групової швидкостей від частоти при $\chi^2 = const > 0$.

Фазова та групова швидкості у лініях передач

На високих частотах фазова та групова швидкості близькі до швидкості світла у середовищі, яким заповнено хвилевід. При зменшенні частоти фазова швидкість хвилі в хвилеводі збільшується, а групова – зменшується, прямуючи відповідно до нескінченності та нуля по мірі наближення частоти до критичної.

Якщо частота менша за критичну, то стала поширення стає уявною величиною. У цьому випадку у хвилеводі існують не хвилі, а коливання, фаза яких залишається постійною, а амплітуда експоненційно зменшується при збільшенні координати z . Таким чином, при $f < f_{cr}$ ($\lambda > \lambda_{cr}$) електромагнітні хвилі у хвилеводі поширюватись не можуть. Це явище називають **відсіканням**. Режим роботи хвилеводу при $f < f_{cr}$ ($\lambda > \lambda_{cr}$) називають **поза межним**.

Фазова та групова швидкості у лініях передач

$$3) \chi^2 < 0 \Rightarrow \chi = i\tau, \tau = \sqrt{|\chi^2|} \Rightarrow$$

$$v_\phi = \frac{v_{\varepsilon\mu}}{\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{k^2}}}, \quad v_{gp} = \frac{v_{\varepsilon\mu} \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{k^2}}}{1 + \frac{\tau}{k} \frac{d\tau}{dk}} \Rightarrow v_\phi v_{gp} \neq v_{\varepsilon\mu}^2.$$