

Електродинаміка та техніка НВЧ

Плоскі хвилі у різних середовищах

Загальні положення

Для **вільних** (існують без джерел, тобто сторонній струм $\dot{j}_m^{st} = 0$) **плоских однорідних електромагнітних хвиль**, які змінюються у часі за гармонічним законом, комплексні амплітуди $\dot{\vec{E}}_m$, $\dot{\vec{H}}_m$ задовольняють однорідним рівнянням Гельмгольца:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m &= 0, \\ \nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

де $k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$ – хвильове число середовища, у якому поширюється хвиля.

Формально можна розв'язати будь-яке з цих рівнянь відносно одного з векторів поля, а потім, скориставшись відповідним рівнянням Максвела, знайти значення другого вектора. На практиці частіше віддають перевагу пошуку розв'язку відносно вектора електричного поля, що і буде використано далі.

Загальні положення

Нехай розглядається **вільне** (тобто існує без джерел, $\dot{j}_m^{st} = 0$) **гармонічне електромагнітне поле**, яке змінюється у просторі лише уздовж вісі z (тобто $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$). У цьому випадку вираз (1) для електричного вектора набуває вигляду:

$$\frac{d^2 \dot{E}_m}{dz^2} + k^2 \dot{E}_m = 0.$$

Будь-яка з проєкцій цього рівняння на вісі декартової системи координат має вигляд **одновимірного рівняння Гельмгольца** $\frac{d^2 \dot{i}_m}{dz^2} + k^2 \dot{i}_m = 0$ (див. попередню лекцію), тому просторові компоненти комплексної амплітуди вектора \dot{E}_m можна записати як $\dot{i}_m = \dot{P}e^{-ikz} + \dot{Q}e^{ikz}$.

Який характер цього електромагнітного поля ?

Загальні положення

Для цього розпишемо два перших рівняння Максвелла по проєкціях у декартовій системі координат, врахувавши при цьому умови вихідної задачі: $\dot{j}_m^{st} = 0$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$.

Маємо таку систему рівнянь:

$$\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_{mx},$$

$$\frac{d\dot{E}_{my}}{dz} = i\omega\mu_0\mu\dot{H}_{mx},$$

$$\frac{d\dot{H}_{mx}}{dz} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\dot{E}_{my},$$

$$\frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -i\omega\mu_0\mu\dot{H}_{my},$$

$$\dot{H}_{mz} = 0,$$

$$\dot{E}_{mz} = 0.$$

Що звідси вже впливає?

1) В обох векторів відсутні поздовжні складові: $\dot{E}_{mz} = 0$, $\dot{H}_{mz} = 0$.

Коментар: складову вектора називають *поздовжньою*, якщо вона відповідає проєкції вектора на вісь, уздовж якої поширюється електромагнітна хвиля (вісь z у цій задачі). Інакше це *поперечна складова* (у даній задачі це проєкції на вісі x, y).

2) **Пари проєкцій E_{mx}, H_{my} та E_{my}, H_{mx} незалежні.**

Загальні положення

З п.2 випливає, що ця система розпадається на дві незалежні системи, кожна з яких має свій розв'язок, а саме:

Перший розв'язок:

$$\dot{\vec{E}}_{m1} = \vec{x}_0 (\dot{A}e^{-ikz} + \dot{B}e^{ikz}), \quad \dot{\vec{H}}_{m1} = \frac{i}{\omega\mu_0\mu} \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = \vec{y}_0 \frac{1}{W} (\dot{A}e^{-ikz} - \dot{B}e^{ikz}), \quad (2)$$

де \dot{A}, \dot{B} – довільні комплексні константи;

$$W = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}} = \left[W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом} \right] = W_0 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Величина $W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ Ом} \approx 377 \text{ Ом}$ має назву «**хвильовий опір вакууму**».

Другий розв'язок:

$$\dot{\vec{E}}_{m2} = \vec{y}_0 (\dot{C}e^{-ikz} + \dot{D}e^{ikz}), \quad \dot{\vec{H}}_{m2} = \frac{-i}{\omega\mu_0\mu} \frac{d\dot{E}_{my}}{dz} = -\vec{x}_0 \frac{1}{W} (\dot{C}e^{-ikz} - \dot{D}e^{ikz}). \quad (3)$$

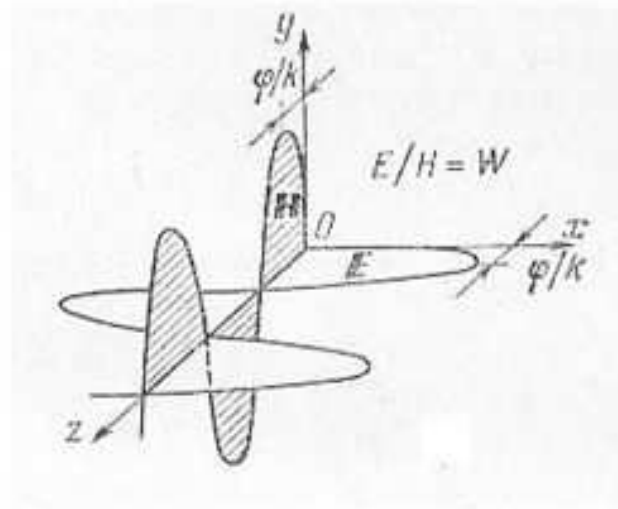
Хвилі в ідеальному діелектрику

У цьому випадку проникності ε, μ – дійсні.

Взявши один з розв'язків (при \dot{A} чи $\dot{B} = 0$), та перейшовши від комплексних амплітуд до векторів поля \vec{E}, \vec{H} , отримаємо:

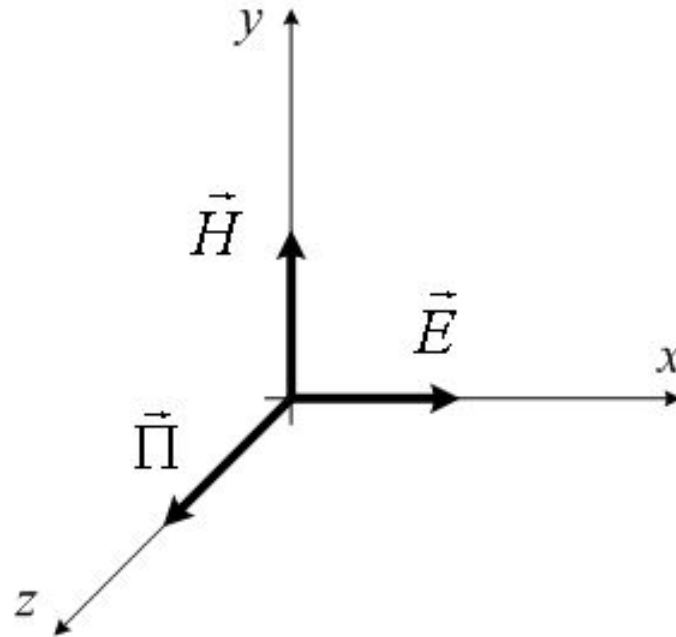
$$\vec{E} = \vec{x}_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi),$$
$$\vec{H} = y_0 \frac{A}{W} \cos(\omega t - kz + \varphi).$$

Це плоска однорідна гармонічна хвиля, яка поширюється уздовж вісі z . На рисунку показано «миттєвий знімок» розподілу поля цієї хвилі.



Хвилі в ідеальному діелектрику

Напруженості поля \vec{E}, \vec{H} взаємно перпендикулярні та лежать у площині фронту $z = const$, а вектор Пойнтінга $\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}]$ спрямовано у сторону поширення хвилі (рисунок).



Вектори \vec{E} , \vec{H} та $\vec{\Pi}$ утворюють праву трійку векторів, при цьому:

$$\vec{E} = W[\vec{H}, \vec{z}_0], \quad \vec{H} = \frac{1}{W}[\vec{z}_0, \vec{E}].$$

Хвилі в ідеальному діелектрику

Обчислимо енергетичні характеристики цієї хвилі. Використовуючи вирази для густин електричної та магнітної енергії (див. попередні лекції), отримаємо:

$$w^E = w^M = \frac{w}{2} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{A^2}{2} \cos^2(\omega t - kz + \varphi).$$

Вектор Пойнтінга:

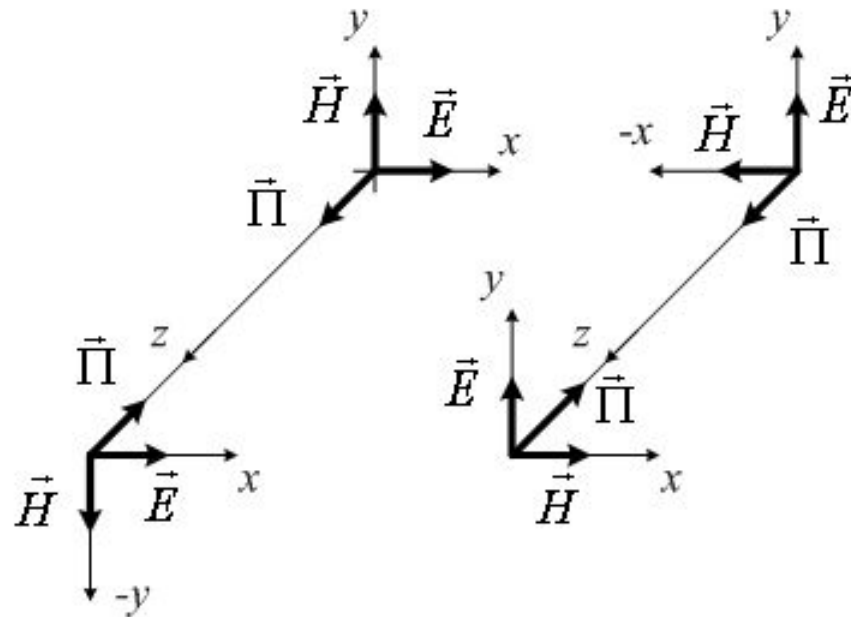
$$\vec{\Pi} = [\vec{E}, \vec{H}] = \vec{z}_0 \frac{A^2}{W} \cos^2(\omega t - kz + \varphi).$$

Комплексний вектор Пойнтінга при цьому $\dot{\vec{\Pi}}$ – величина суто дійсна, оскільки вектори \vec{E} та \vec{H} перебувають у фазі. Тому його середнє значення

$$\langle \dot{\vec{\Pi}} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^*] = \vec{z}_0 \frac{A^2}{2W} = \frac{1}{2} \vec{z}_0 \Pi_{\max}.$$

Хвилі в ідеальному діелектрику

Всі чотири хвилі, які можна отримати, розглядаючи розв'язки (2) при $\dot{B} = 0$ ($\dot{A} \neq 0$) і $\dot{A} = 0$ ($\dot{B} \neq 0$) і (3) при $\dot{D} = 0$ ($\dot{C} \neq 0$) і $\dot{C} = 0$ ($\dot{D} \neq 0$), описують одне і те ж саме електромагнітне поле при різних просторових орієнтаціях його векторів, що схематично показано на рисунку.



Другий та третій розв'язки переходять один в одного при повороті відносно вісі z на 90° .

Хвилі у поглинаючих середовищах

У цьому випадку проникності ε, μ – є комплексними, тому і хвильовий опір W є комплексним.

Враховуючи те, що $\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon''$, $\dot{\mu} = \mu' - i\mu''$, перепишемо хвильове число:

$$\dot{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon}_a \dot{\mu}_a} = k' - ik'' = \pm |k| \exp\left(-i \frac{\delta + \delta^M}{2}\right), \quad (4)$$

де $|k| = \frac{\omega}{c} \sqrt{|\dot{\varepsilon}| \cdot |\dot{\mu}|}$.

Для поглинаючих середовищ $\varepsilon'' \geq 0$ і $\mu'' \geq 0$, причому хоча б одна з них відмінна від нуля. Дійсні частини ε' і μ' вважатимемо додатними. Тоді кути δ, δ^M лежатимуть у межах $0 \dots 90^\circ$. Те ж саме можна сказати про їхню півсуму у (4). Звідси легко переконатись, що k' і k'' теж одного знаку, у подальшому вважатимемо $k' > 0$ і $k'' > 0$.

Розглянемо тепер частинний розв'язок (2) з урахуванням сказаного:

$$\dot{\vec{E}}_{ml} = \vec{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\vec{H}}_{ml} = \vec{y}_0 \frac{1}{W} \dot{A} e^{-ikz}. \quad (5)$$

Хвилі у поглинаючих середовищах

Нагадаємо, що тепер тут хвильовий опір величина комплексна: $\dot{W} = |\dot{W}| \exp(i\varphi_W)$.

Очевидно, що

$$\dot{\vec{E}}_m = \dot{W} \left[\dot{\vec{H}}_m, \vec{z}_0 \right], \quad \dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\dot{W}} \left[\vec{z}_0, \dot{\vec{E}}_m \right].$$

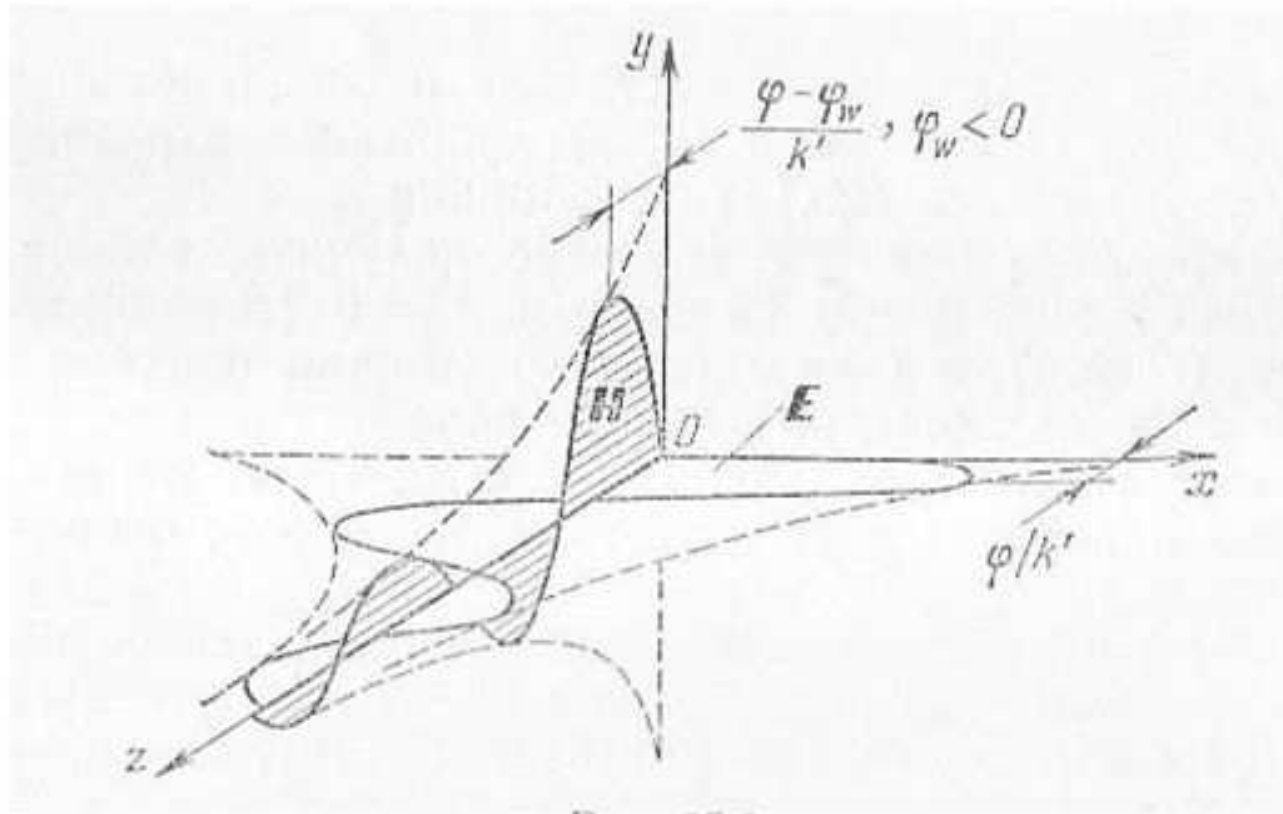
Здійснюючи у (5) перехід від комплексних величин до миттєвих значень векторів поля, отримаємо:

$$\vec{E} = \vec{x}_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi),$$
$$\vec{H} = y_0 \frac{A}{|\dot{W}|} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_W).$$

Це **затухаюча** хвиля, яка поширюється уздовж вісі z .

Хвилі у поглинаючих середовищах

На рисунку показано «миттєвий знімок» розподілу поля цієї хвилі.



На відміну від попереднього випадку (ідеальний, тобто непоглинаючий діелектрик), напруженості полів \vec{E} та \vec{H} тепер несинфазні.

Хвилі у поглинаючих середовищах

Середнє значення вектора Пойнтінга тепер

$$\langle \dot{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{\vec{E}}_m, \dot{\vec{H}}_m^* \right] = \vec{z}_0 \frac{A^2}{2|\dot{W}|} \exp(-2k''z) \cos \varphi_w.$$

Виділивши дійсну та уявну частини комплексного числа (у випадку відсутності магнітних втрат $\mu'' = 0$), маємо:

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)},$$

$$k'' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'} \sqrt{\frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} \right)}.$$

Якщо хвиля поширюється у діелектрику ($\operatorname{tg} \delta \ll 1$), то комплексне хвильове число зручно розкласти в ряд:

$$k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu' (1 - i \operatorname{tg} \delta)} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon' \mu'} \left(1 - i \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta}{8} + i \frac{\operatorname{tg}^3 \delta}{16} + \dots \right).$$

Хвилі у поглинаючих середовищах

У більшості випадків вищими степенями розкладу тангенса кута втрат можна знехтувати, звідки:

$$k' \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu'},$$
$$k'' \approx k' \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} = \frac{\sigma}{2} W_0 \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}.$$

Таким чином, фазова швидкість та довжина хвилі залежать лише від k' :

$$k' = \frac{\omega}{v_\phi} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

та не набувають суттєвих змін при переході від ідеального діелектрика до реального, а коефіцієнт втрат k'' можна вважати пропорційним до тангенса кута діелектричних втрат, який доволі малий.

Хвильовий опір для діелектрика з втратами:

$$\dot{W} = W_0 \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'(1 - i \operatorname{tg} \delta)}} \approx W_0 \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}} \left(1 + i \frac{\operatorname{tg} \delta}{2} \right).$$

Хвилі у провідниках

Для провідника $\operatorname{tg} \delta \gg 1$, звідки комплексне хвилеве число:

$$\dot{k} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu' (1 - i \operatorname{tg} \delta)} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu'} \sqrt{-i \operatorname{tg} \delta} = (1 - i) \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu'} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta}{2}},$$

звідки

$$\left. \begin{array}{l} k' \\ k'' \end{array} \right\} \approx \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon' \mu'} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \mu \sigma}{2}} = \frac{1}{\Delta_{sk}},$$

де Δ_{sk} – товщина скін-шару.

Оскільки тут залежність k' від частоти нелінійна, то від частоти буде залежати і фазова швидкість. **Зі збільшенням провідності σ фазова швидкість і довжина хвилі у провіднику зменшуються, а затухання збільшується.** У металах затухання набагато більше, ніж у діелектриках. **Коефіцієнт затухання при переході до ідеального діелектрика ($\sigma \rightarrow \infty$) необмежено збільшується, а це значить, що «повне затухання» процесу має відбуватись на будь-якій кінцевій відстані.** Звідси випливає, що в ідеальному діелектрику електромагнітне поле існувати не може.