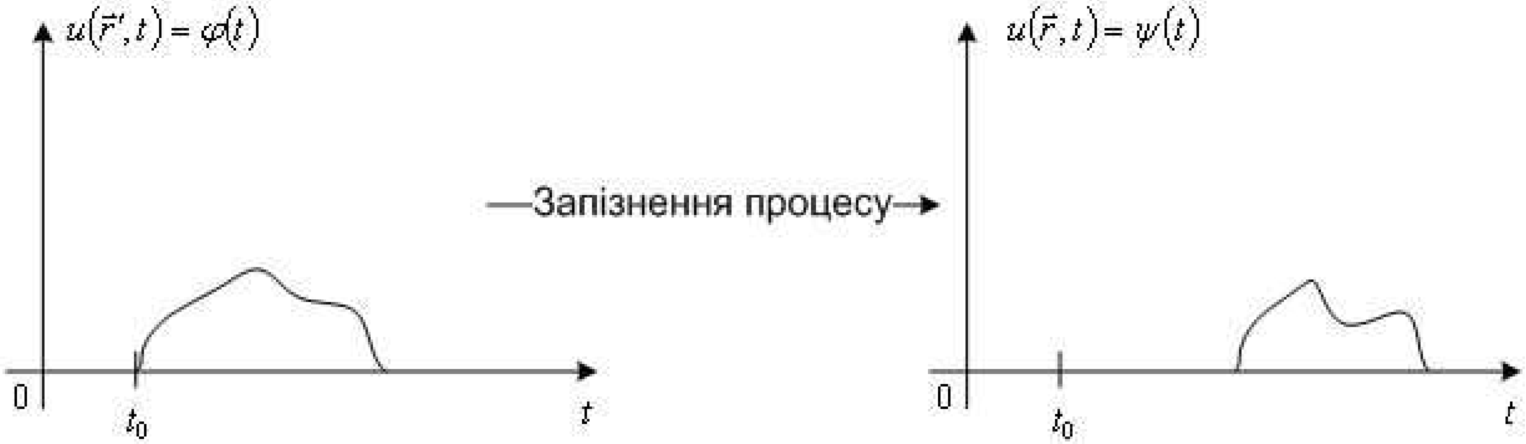
Кафедра БІ та Т
Біомедична інженерія
Телекомунікації та радіотехніка

Електродинаміка та техніка НВЧ

Плоскі однорідні хвилі

Загальні положення

Під **поширенням хвилі** розуміють поступове втягування середовища у деякий фізичний процес, що спричиняє передачу енергії у просторі.



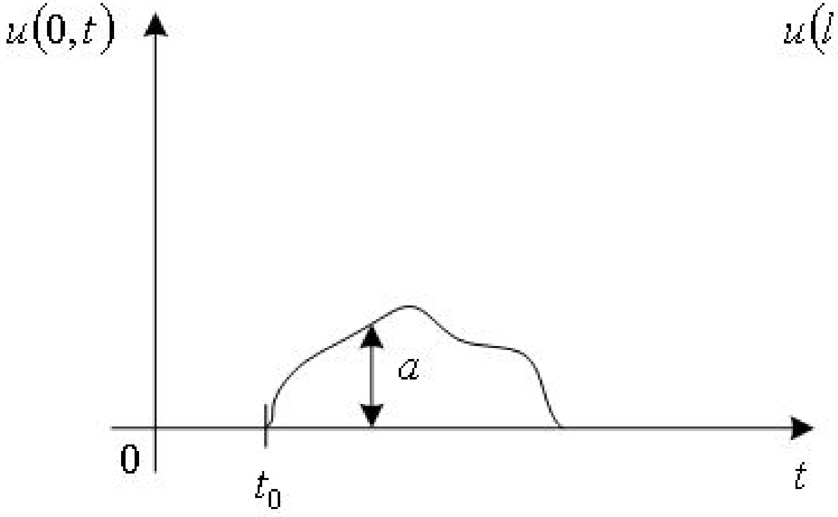
$u(\vec{r}',t)=\varphi(t)$ – деякий фізичний процес у точці $P(\vec{r}')$;
$u(\vec{r},t)=\psi(t)$ – цей самий процес у точці $M(\vec{r})$.

У найпростішому випадку помітимо лише запізнення $\psi(t)=\varphi(t-\tau)$, де τ – час, потрібний для проходження відстані $|\vec{r}-\vec{r}'|=l$ зі швидкістю v.

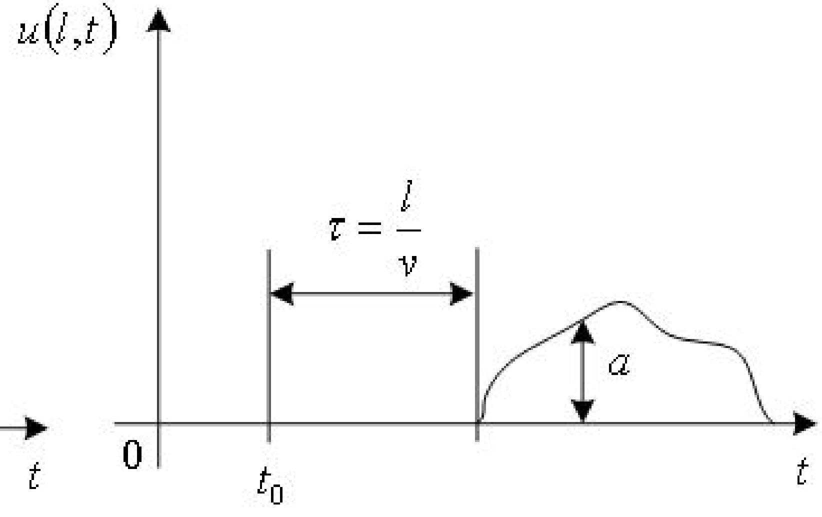
Загальні положення

Якщо у просторі існує залежність лише від координати z, а описання цього процесу у вигляді функції

$$u(z,t)=u\left(t-\frac{z}{v}\right). \qquad (1)$$



Побудова при $z=0$



Побудова при $z=l$

Загальні положення

Кажуть, що функція (1) описує хвилю. Таку хвилю називають плоскою та однорідною. Поклавши $z = const$, ми задаємо площину, на якій згідно з (1), миттєве значення функції u постійне. Таку площину називають фронт хвилі. Взявши “відлік” $u = a$, видно, що з часом він рухається.

Плоску однорідну хвилю, яка рухається у протилежному напрямі, записують так:

$$u(z,t) = u\left(t + \frac{z}{v}\right).$$

Однорідне хвилеве рівняння

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

у декартовій системі координат, для процесів, що не залежать від x, y набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Загальні положення

Йому задовольняють обидві (!) функції $u(z,t)=u\left(t+\frac{z}{v}\right)$. Тоді розв'язок цього рівняння описує вираз:

$$u(z,t)=u_1\left(t-\frac{z}{v}\right)+u_2\left(t+\frac{z}{v}\right),$$

де $u_{1,2}$ – довільні, двічі диференційовані функції.

Фізично – це накладання двох плоских однорідних хвиль, які рухаються у протилежних напрямах.

Пояснення:

Плоска – тому що у кожній точці площини $z=const$ фаза процесу u стала.

Однорідна – тому що у цій самій площині стала амплітуда.

Плоскі однорідні гармонічні хвилі

Якщо $u(z,t)$ така, що $u(z,t)=u_m\cos(\omega t+\varphi)$, то в кожній точці простору процес буде мати характер гармонічних коливань:

$$u(z,t)=u_m\cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)+\varphi\right],$$

або

$$u(z,t)=u_m\cos(\omega t-kz+\varphi),$$

де $k=\dfrac{\omega}{v}$ – хвилеве число;

λ – довжина хвилі, тобто та просторова відстань, на якій фаза коливання змінюється на 2π. Тому для довільного z маємо $u(z,t)=u(z+\lambda,t)\Rightarrow k\lambda=2\pi$, тобто:

$$k=\frac{\omega}{\lambda}=\frac{2\pi}{\lambda}=\left[\lambda=\frac{c}{f}\right]=\lambda f,$$

де $f=\dfrac{\omega}{2\pi}$ – частота процесу, v – фазова швидкість.

Плоскі однорідні гармонічні хвилі

Плоска однорідна гармонічна хвиля виражається одним з частинних розв'язків одновимірного хвилевого рівняння, яке для методу комплексних амплітуд виглядатиме так:

$$\frac{d^2\dot{u}_m}{dt^2} + k^2\dot{u}_m = 0.$$

Це одновимірна форма рівняння Гельмгольца, загальний розв'язок якого:

$$\dot{u}_m = \dot{P}e^{-ikz} + \dot{Q}e^{ikz},$$

де $\dot{P} = Pe^{i\varphi}$, $\dot{Q} = Qe^{i\psi}$ – комплексні константи.

Звідси

$$u(z,t) = \mathrm{Re}\left(\dot{u}_m e^{i\omega t}\right) = P\cos(\omega t - kz + \varphi) + Q\cos(\omega t + kz + \psi),$$

що є накладанням двох гармонічних хвиль, <u>які рухаються у протилежних напрямах</u>(!).

Кожну з цих хвиль називають **біжучою.**

Частинний випадок: якщо $P = Q$, $\varphi = \psi$, то такий результат

$$u(z,t) = 2P\cos kz \cdot \cos(\omega t + \varphi),$$

називають **стояча хвиля.**

Плоскі однорідні гармонічні хвилі

Якщо хвиля поширюється у середовищі з втратами, то в одновимірній формі рівняння Гельмгольца $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\dot{\varepsilon}\dot{\mu}} = \omega\sqrt{\dot{\varepsilon}_a\dot{\mu}_a} = k' - ik''$ – комплексне хвилеве число (комплексна стала поширення), k' – коефіцієнт фази, k'' – коефіцієнт послаблення:

$$u(z,t) = Pe^{-k''z}\cos(\omega t - k'z + \varphi) + Qe^{k''z}\cos(\omega t + k'z + \psi).$$

Коефіцієнт фази k' характеризує зміну фази гармонічних коливань при поширенні хвилі, а коефіцієнт послаблення k'' – характеризує затухання хвилі.

Затухання:

$$\mathrm{L} = \begin{cases} k''l, \text{Нп} \\ 20\lg e^{k''l} \approx 8{,}69k''l \text{ дБ} \end{cases}.$$

Хвиля залишиться однорідною і в тому випадку, якщо амплітуда u_m буде залежати від z: $u_m = u_m(z)$. Але хвиля

$$u(x,y,z,t) = u_m(x,y)\cos(\omega t - kz)$$

є плоскою, але неоднорідною: її амплітуда не залишається постійною у площині фронту $z = const$.

Види хвиль

У ширшому сенсі хвиля

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y)\cos[\omega t - kz + \varphi(x, y)]$$

плоска неоднорідна (комплексна амплітуда $\dot{u}_m(x, y) = u_m \exp(i\varphi)$ залишається постійною у кожній площині фронту $z = const$)

В загальному випадку хвиля

$$u(x, y, z, t) = u_m(x, y, z)\cos[\omega t - kz + \varphi(x, y, z)]$$

неплоска і неоднорідна.

Її фазовий фронт, який розуміється як поверхня постійної фази при $t = const$, визначається рівнянням:

$$\varphi(x, y, z) = const.$$

Якщо

$$\varphi(x, y, z) = kr + \varphi_0,$$

де r – сферична радіальна координата, $\varphi_0 = const$, то це буде сферична хвиля.

Якщо ж r – циліндрична радіальна координати, то це буде **циліндрична хвиля.**