Кафедра БІ та Т
○ Біомедична інженерія
○ Телекомунікації та радіотехніка

Електродинаміка та техніка НВЧ

Енергія електромагнітного поля

Енергія електромагнітного поля

1) **Електромагнітне поле може віддавати або відбирати енергію.**
2) **Електромагнітне поле здатне переносити енергію у просторі.**

$$\frac{dW}{dt} < 0 \Rightarrow$$ Це зменшення енергії (поглинання, перехід її у теплову енергію, випромінювання, тощо)

$$\frac{dW}{dt} > 0 \Rightarrow$$ Це збільшення енергії (генерування, регенеративні процеси, притік енергії зовні тощо)

Тут W – енергія ЕМП у деякий момент часу, у деякому об’ємі V.

Врахування наявності сторонніх сил

Врахування наявності сторонніх сил робиться такими способами:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}_{ст}\right) \quad \text{або} \quad \vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{ст}$$

Тут $\vec{E}_{ст}$ - напруженість сторонніх сил (стороння напруженість),

$\vec{j}_{ст}$ - густина стороннього струму.

Також у розгляд вводяться:

$p = \vec{j}\vec{E}$ - густина потужності в об'ємі;

$p_{втр} = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2 = \dfrac{j^2}{\sigma}$ - густина потужності втрат.

$P_{втр} = \int\limits_V \vec{j}\vec{E}\mathrm{dv} = \int\limits_V \sigma E^2 \mathrm{dv} = \int\limits_V \dfrac{j^2}{\sigma}\mathrm{dv}$ - потужність втрат у деякому об'ємі V (закон Джоуля-Ленца);

Врахування наявності сторонніх сил

$$P_{ст} = -\int\limits_V \vec{j}\vec{E}_{ст}\mathrm{dv}$$ - потужність сторонніх сил у деякому об’ємі V.

або

$$P_{ст} = \int\limits_V \vec{j}_{ст}\vec{E}\mathrm{dv}$$ - потужність сторонніх сил у деякому об’ємі V.

Коментар щодо знака “мінус”: якщо сторонні сили здійснюють роботу “проти сил поля” (тобто відбувається перетворення енергії деякого неелектромагнітного процесу в енергію електромагнітного поля), то величини Рст від’ємні.

Якщо є область V з границею S, а на її поверхні (чи на її частині) діють сторонні сили, то формалізація цього у рівняннях Максвела така:

$$\vec{E}_{\tau} = \vec{E}_{ст} \text{ на } S$$

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга у диференціальній формі)

Друге рівняння Максвела домножують на вектор H: $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \mid \vec{H}$

Перше рівняння Максвела домножують на вектор E: $\operatorname{rot}\vec{H} = \dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \mid \vec{E}$

Від першого добутку віднімають другий, причому використовують при цьому тотожність:

$$\operatorname{div}\left[\vec{A},\vec{B}\right] = \vec{B}\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{B}$$

Результат:

$$\vec{H}\operatorname{rot}\vec{E} = -\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$-$$

$$\vec{E}\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\left[\vec{E},\vec{H}\right] = -\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{j}\vec{E}} \qquad (1)$$

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга в інтегральній формі)

Вибираючи деяку замкнену поверхню S, інтегруємо (1) по об'єму V, обмеженому цією поверхнею S та використовуючи теорему Остроградського-Гауса

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{F}\,\mathrm{dv} = \oint_S \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s},$$

отримаємо:

$$\boxed{\oint_S \left[\vec{E},\vec{H}\right]\mathrm{d}\vec{s} = -\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\mathrm{dv} - \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{dv}} \qquad (2)$$

Зміст отриманого результату доцільно розпочати з останнього члена виразу (2).

Враховуючи попередні вирази: $\vec{j} = \sigma\vec{E} + \vec{j}_{ст}$, $P_{втр} = \int_V \vec{j}\vec{E}\mathrm{dv}$ отримаємо, що

$$\boxed{\int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{dv}} = P = P_{втр} + P_{ст}$$

- це повна потужність, тобто всі процеси перетворення енергії в об'ємі V пов'язано зі струмом провідності (при j=0 перетворення енергії відсутнє)

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга в інтегральній формі)

У частинному випадку, коли область V енергетично ізольовано:

$$P = -\frac{dW}{dt}, \tag{3}$$

де W – запас енергії ЕМП в об'ємі V.

За енергетичної ізоляції поле не проникає за межі області V, тому поверхневий інтеграл в (2) дорівнює нулю. Звідси:

$$P = -\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \mathrm{dv} \tag{4}$$

Порівнюючи вирази (3) та (4), отримаємо:

$$\boxed{\int_V \left(\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \mathrm{dv} = \frac{dW}{dt}}$$

Тобто другий член у (2) – це похідна за часом запасу енергії в об'ємі.

Рівняння балансу енергії (теорема Пойнтінга в інтегральній формі)

Остаточно маємо:

$$\boxed{P_\Sigma + \frac{dW}{dt} + P = 0,}$$

де $P_\Sigma = \oint\limits_S \left[\vec{E}, \vec{H}\right] \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_S \vec{\Pi}\, \mathrm{d}\vec{s}$ - потік вектора Пойнтінга

$$\boxed{\vec{\Pi} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]}$$

- **вектор Пойнтінга**

Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

Якщо $\vec{\Pi} \neq 0 \left(\text{тобто}\, P_{\Sigma} \neq 0 \right)$ то має місце енергетичний контакт області

V з навколишнім простором через границю S.

Можливі типи балансу енергії поля:

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P < 0 \Rightarrow P_{\Sigma} > 0}$$

- активний баланс

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P = 0 \Rightarrow P_{\Sigma} = 0}$$

- нейтральний баланс

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P > 0 \Rightarrow P_{\Sigma} < 0}$$

- пасивний баланс

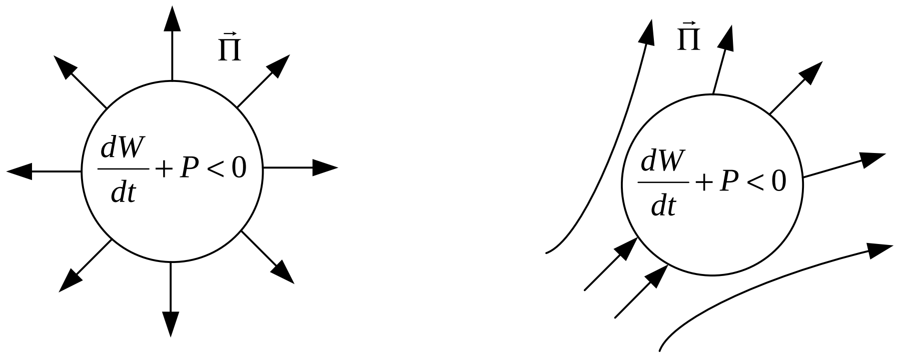
Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P < 0 \Rightarrow P_{\Sigma} > 0}$$ **- активний баланс**

Фізична суть: сума швидкості зміни запасу енергії в області dW/dt та повної потужності P від'ємна. Ця від'ємна величина врівноважується додатнім потоком вектора Пойнтінга. Зменшення запасу енергії у V, як і генерування (ці процеси можуть відбуватись одночасно), спричиняють перехід енергії через границю S у зовнішнє середовище, тобто випромінювання.

У цьому випадку потік вектора Пойнтінга дорівнює випромінюваній за одиницю часу енергії (потужність випромінювання).

Найпростіший випадок: dW/dt=0 (запас енергії незмінний) і Pвтр=0 (поглинання відсутнє). Тоді $P_{\Sigma} = -P_{ст}$.

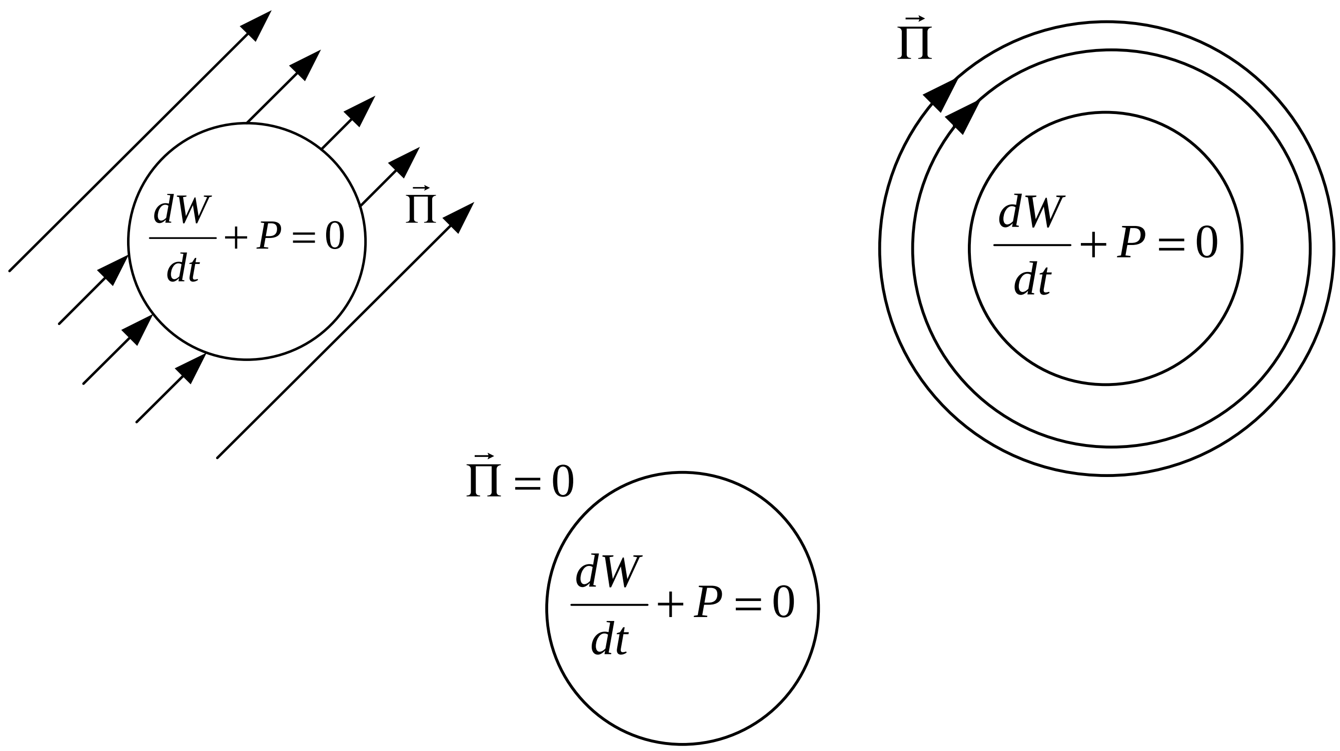


Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

$$\boxed{\frac{dW}{dt} + P = 0 \Rightarrow P_{\Sigma} = 0}$$

- нейтральний баланс

Фізична суть: цей випадок необов’язково означає, що область енергетично ізольовано. Цей тип балансу можливий і за відкритої границі.



Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

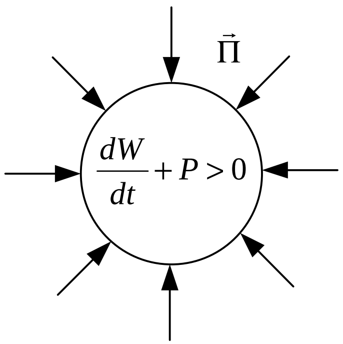
$$\frac{dW}{dt} + P > 0 \Rightarrow P_\Sigma < 0$$

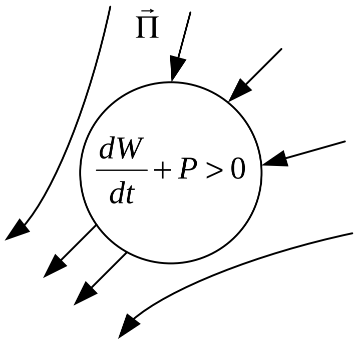
- пасивний баланс

Фізична суть: сума швидкості зміни запасу енергії в області dW/dt та повної потужності P додатня. Ця додатня величина врівноважується від'ємним потоком вектора Пойнтінга. Внутрішні втрати (P>0) і (або) втрати енергії на збільшення її запасу W покриваються притоком енергії зовні. Енергія поглинається через границю S із зовнішнього середовище, тобто це поглинання.

У цьому випадку потік вектора Пойнтінга дорівнює поглинутій за одиницю часу енергії (потужність поглинання).

Найпростіший випадок: dW/dt=0 (запас енергії незмінний) і Рст=0 (поглинання відсутнє). Тоді $P_\Sigma = -P_{втр}$.





Потік вектора Пойнтінга та баланс енергії

Потік вектора Пойнтінга дорівнює за абсолютним значенням енергії, що проходить через поверхню S за одиницю часу – це потік енергії.

Якщо значення вектора Пойнтінга додатнє – це віддача енергії, випромінювання.

Якщо значення вектора Пойнтінга від’ємне – це поглинання енергії.

Локалізація енергії електромагнітного поля

Вважаючи, що процеси поляризації та намагнічування безінерційні (тобто відносні діелектрична та магнітна проникності не залежать від часу), а також за відсутності анізотропії, маємо:

$$\vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}^{\,2}}{2}\right),\quad \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mu_0\mu\vec{H}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu_0\mu\vec{H}^{\,2}}{2}\right).$$

Інтегруючи ці вирази по деякому об'єму *V*, та винісши при цьому оператор диференціювання за знак інтегралу, отримаємо:

$$W=\frac{1}{2}\int_V\left(\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}^{\,2}+\mu_0\mu\vec{H}^{\,2}\right)\mathrm{dv}=\frac{1}{2}\int_V\left(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}\right)\mathrm{dv}, \qquad (5)$$

де $$w=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}^{\,2}+\mu_0\mu\vec{H}^{\,2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}\right) \qquad (6)$$

слід тлумачити як

Локалізація енергії електромагнітного поля

густину енергії ЕМП:

$$w = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}.$$

Вирази (5), (6) показують характер розподілу енергії поля у просторі, її локалізацію.

Важливо те, що вираз (5) складається з двох доданків, один з яких залежить лише від магнітного поля, а другий – лише від електричного.

Тому розрізняють електричну енергію:

$$W^E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}^2 \mathrm{dv} = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\vec{D} \mathrm{dv}$$

та магнітну енергію

$$W^M = \frac{1}{2}\int_V \mu_0 \mu \vec{H}^2 \mathrm{dv} = \frac{1}{2}\int_V \vec{H}\vec{B} \mathrm{dv}$$

електромагнітного поля.