

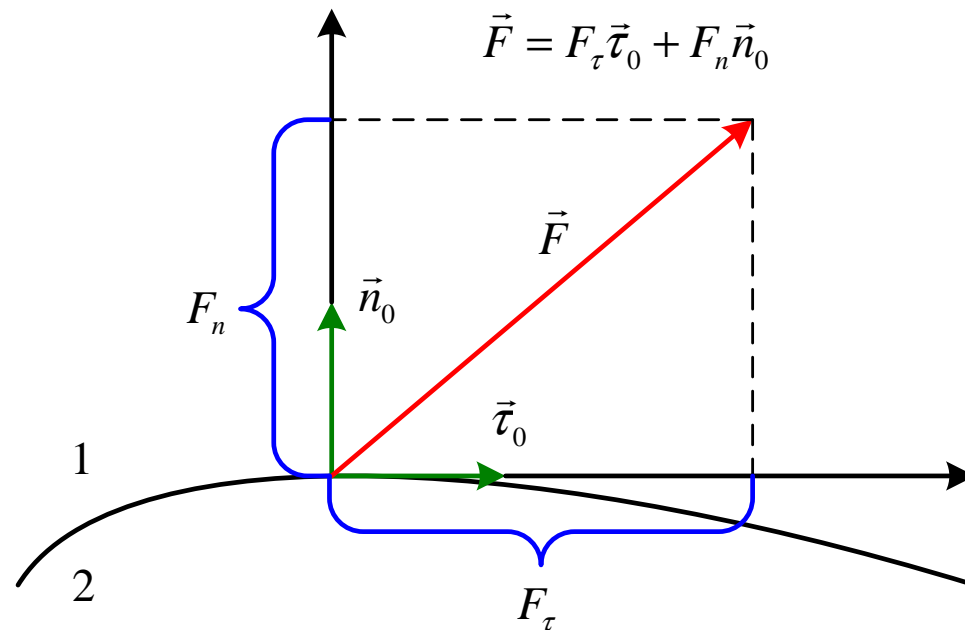
## **Електродинаміка та техніка НВЧ**

### **Поля на границях розподілу середовищ**

## Загальні відомості

Поверхні фізичних тіл є границями, які розділяють середовища з різними властивостями. За такої ситуації, при переході з одного середовища в інше, властивості полів змінюються, оскільки параметри середовищ змінюються стрибкоподібно.

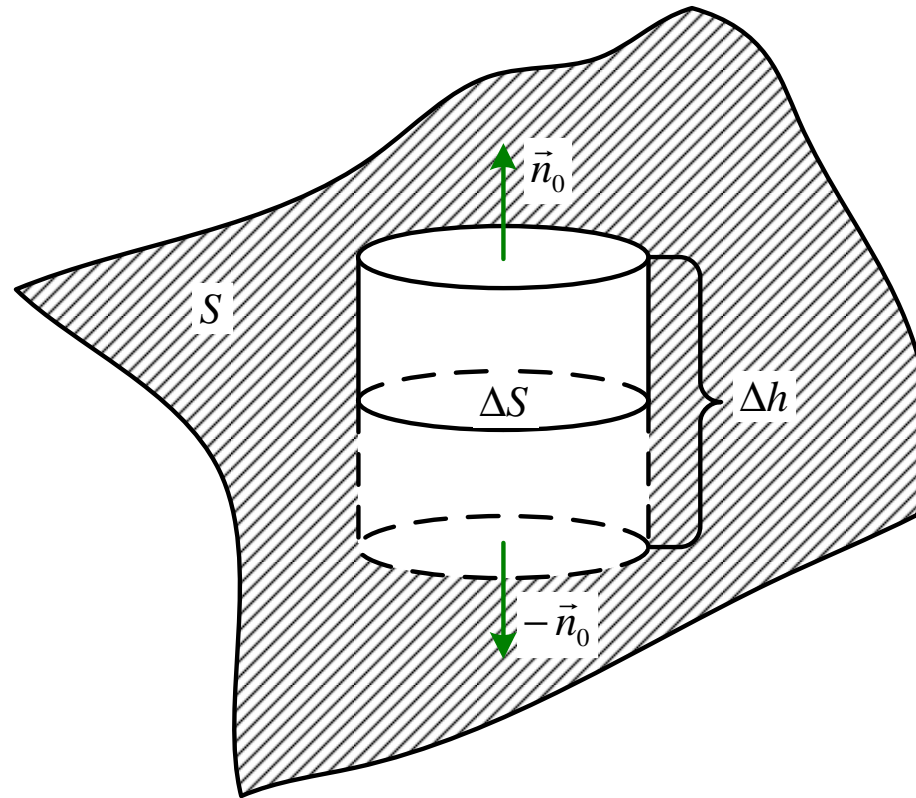
Рівняння Максвелла у диференціальній формі при цьому використати не вдасться. Тому доведеться використати їхні інтегральні аналоги, які за своїм математичним змістом такі, що їх можна застосовувати до областей  $V$  з поверхнями  $S$ , які містять всередині ці границі, на яких вектори поля мають розрив.



## Нормальні компоненти векторів поля, **електрична** індукція

“Досить малий елемент поверхні  $\Delta S$ ” – це такий, що елемент  $\Delta S$  можна вважати елементом площі, а поле в ньому – однорідним (незмінним) уздовж границі в обох середовищах.

Пригадуємо третє рівняння Максвелла: 
$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = \int_V \rho dv$$



Геометрія задачі

## Нормальні компоненти векторів поля, електрична індукція

Оскільки поле у межах  $\Delta S$  – однорідне, то потік вектора електричної індукції через верхню та нижню основи циліндра – це просто добуток на площу  $\Delta S$  скалярного добутку цього вектора та одиничної нормалі ( $\vec{n}_0$  та  $-\vec{n}_0$ ), зовнішньої до поверхні циліндра. Потік вектора електричної індукції через бокову поверхню циліндра позначимо як  $F_{side}^e$ . Таким чином, з третього рівняння Максвела отримуємо:

$$\vec{D}_1 \vec{n}_0 \Delta S - \vec{D}_2 \vec{n}_0 \Delta S + F_{side}^e = \Delta q,$$

де  $\Delta q$  – заряд всередині циліндра.

Тепер зменшуватимемо висоту циліндра  $\Delta h$  доти, доки при  $\Delta h \rightarrow 0$  основа циліндра співпадає з  $\Delta S$ . При  $\Delta h \rightarrow 0$  площа бокової стінки циліндра прямуватиме до нуля також і  $F_{side}^e \rightarrow 0$ .

Якщо припустити існування заряду на самій граничній поверхні і, відповідно до цього, виділити у  $\Delta q$  дві частини  $\Delta q = \Delta q_V + \Delta q_S$  (заряди в об'ємі та на поверхні), то зникне лише  $\Delta q_V$ . Звідси маємо:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}_0 \Delta S = \Delta q.$$

## Нормальні компоненти векторів поля, **електрична індукція**

Ввівши у розгляд густину поверхневого заряду  $\xi$ :

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

і, оскільки поле у граничній області  $\Delta S$  однорідне, величина  $\xi$  тут постійна, тому  $\Delta q_s = \xi \cdot \Delta S$ . Звідси

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}_0 = \xi.$$

Оскільки  $\vec{D}_1 \vec{n}_0 = D_{1n}$ ,  $\vec{D}_2 \vec{n}_0 = D_{2n}$  – нормальні компоненти вектора електричної індукції при підході до границі зі сторони першого та другого середовищ, то **нормальна компонента вектора електричної індукції має розрив, значення якого дорівнює густині поверхневого заряду  $\xi$** . У частинному випадку ( $\xi=0$ , тобто на поверхні розподілу відсутній заряд), нормальна компонента вектора електричної індукції неперервна:

$$(\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}_0 = \xi \Big|_{\xi=0} \Rightarrow (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \vec{n}_0 = 0 \Rightarrow (\epsilon_0 \epsilon_1 \vec{E}_1 - \epsilon_0 \epsilon_2 \vec{E}_2) \vec{n}_0 = 0 \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n} \Big|_{\xi=0}.$$

і значення стрибка буде пропорційне відношенню  $\epsilon_2 / \epsilon_1$ .

## Нормальні компоненти векторів поля, **магнітна індукція**

Для вектора магнітної індукції алгоритм такий само, як і для вектора електричної індукції, але при цьому за основу береться четверте рівняння Максвела. В результаті маємо:

$$\vec{B}_1 \vec{n}_0 \Delta S - \vec{B}_2 \vec{n}_0 \Delta S + F_{side}^m = 0,$$

де  $F_{side}^m$  – потік магнітної індукції через бокову поверхню.

Тепер зменшуватимемо висоту циліндра  $\Delta h$  доти, доки при  $\Delta h \rightarrow 0$  основа циліндра співпадає з  $\Delta S$ . При  $\Delta h \rightarrow 0$  площа бокової стінки циліндра прямуватиме до нуля також і  $F_{side}^m \rightarrow 0$ , тому

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \vec{n}_0 = 0.$$

Оскільки  $\vec{B}_1 \vec{n}_0 = B_{1n}$ ,  $\vec{B}_2 \vec{n}_0 = B_{2n}$  – нормальні компоненти вектора магнітної індукції при підході до границі зі сторони першого та другого середовищ, то **нормальна компонента вектора магнітної індукції завжди неперервна:**

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_0 \mu_1 \vec{H}_{1n} = \mu_0 \mu_2 \vec{H}_{2n} \Rightarrow \mu_1 \vec{H}_{1n} = \mu_2 \vec{H}_{2n}.$$

## Нормальні компоненти векторів поля, узагальнений (повний) струм

Тут береться за основу властивість узагальненого струму  $\oint_s \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) d\vec{s} = 0$ ,

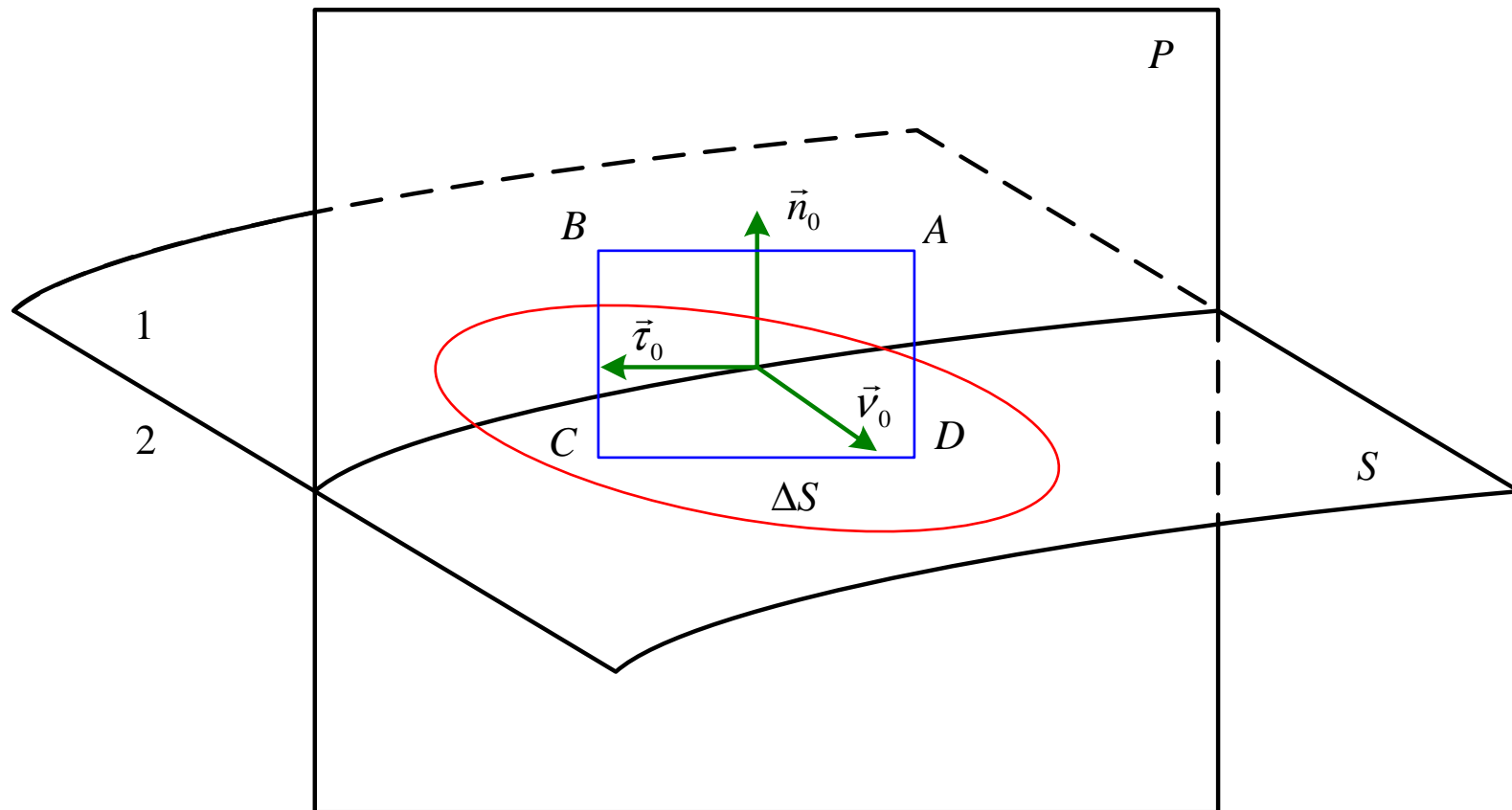
звідки маємо:

$$\left( \frac{\partial \vec{D}_1}{\partial t} + \vec{j}_1 \right) \vec{n}_0 - \left( \frac{\partial \vec{D}_2}{\partial t} + \vec{j}_2 \right) \vec{n}_0 = 0,$$

**Нормальна компонента густини узагальненого (повного) струму завжди неперервна на границях розподілу середовищ.** У частинному випадку – для стаціонарних процесів ( $\partial/\partial t = 0$ ), маємо неперервності компоненти густини струму провідності:  $j_{1n} = j_{2n}$ .

## Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, **електричний** вектор

Площина  $P$  перпендикулярна до площадки  $\Delta S$  границі  $S$  в околі розглядуваної точки.  $ABCD$  – прямокутний контур у площині  $P$ , який перетинає площину  $S$  у межах площадки  $\Delta S$ , при цьому  $AB=CD=\Delta l$ ,  $BC=AD=\Delta h$ , а бокова сторона контура паралельна нормалі  $\vec{n}_0$ . Дотичний орт вибрано так:  $\vec{\tau}_0 = [\vec{v}_0, \vec{n}_0]$ .



Геометрія задачі



## Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, **електричний** вектор

Застосувавши до контуру  $ABCD$  друге рівняння Максвела  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}$ ,

та врахувавши мализну розглядуваної ділянки, отримаємо:

$$\vec{E}_1 \vec{\tau}_0 \Delta l - \vec{E}_2 \vec{\tau}_0 \Delta l + C_{side}^e = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{\nu}_0 \Delta l \Delta h,$$

У лівій частині цього виразу – це циркуляція електричного вектора по сторонах  $AB$  та  $CD$  (два перших доданки), а третій доданок – циркуляція електричного вектора – боковими частинами контура  $ABCD$ .

Коли  $\Delta h \rightarrow 0$  то сторони  $AB$  і  $CD$  співпадуть на границі, при цьому  $C_{side}^e \rightarrow 0$ ,

$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \vec{\nu}_0 \Delta l \Delta h \rightarrow 0$ , в результаті маємо:

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0.$$

## Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, **електричний** вектор

Оскільки орієнтація напрямку орта  $\vec{\tau}_0$  на границі розподілу довільна відносно поля (можна обертати площину  $P$  відносно нормалі до площини  $S$ ), тому можна вважати, що  $\vec{\tau}_0$  співпадає з проекцією вектора електричного поля на  $S$  за напрямом. Це означає, що величини  $\vec{E}_1 \vec{\tau}_0 = E_{1\tau}$ ,  $\vec{E}_2 \vec{\tau}_0 = E_{2\tau}$  рівні, тобто **тангенційна (дотична) компонента  $E_\tau$  вектора електричного поля завжди неперервна на границі розподілу середовищ.**

Отриманий результат можна записати в інший спосіб:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\tau}_0 = [\vec{V}_0, \vec{n}_0] \\ (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \vec{\tau}_0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) [\vec{V}_0, \vec{n}_0] = [\vec{n}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] \vec{V}_0 = 0.$$

Оскільки ця рівність не повинна залежати від напрямку вектора  $\vec{V}_0$ , що враховує орієнтація площини  $P$ , відносно поля, то остаточно маємо:

$$[\vec{n}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0.$$

Зручність такого варіанта у тому, що вектор нормалі  $\vec{n}_0$  є цілком визначеним (для гладких поверхонь) та ніяк не пов'язано з досліджуваним полем.

## Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, **магнітний** вектор

Для магнітного вектора алгоритм такий само, як і для електричного вектора, але при цьому за основу береться перше рівняння Максвела

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}. \quad \text{В результаті маємо:}$$

$$\vec{H}_1 \vec{\tau}_0 \Delta l - \vec{H}_2 \vec{\tau}_0 \Delta l + C_{side}^m = \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) \vec{\nu}_0 \Delta l \Delta h,$$

де  $C_{side}^m$  – внесок у циркуляцію магнітного вектора бокових сторін контура.

Звідси при обмеженості густини узагальненого струму в результаті граничного переходу  $\Delta h \rightarrow 0$  ми повинні отримати рівність, схожу на попередню, лише з заміною векторів  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ . Проте ця умова не виконуватиметься, якщо припустити можливість існування на границі поверхневого струму провідності. Це така ж само макроскопічна абстракція, як і поверхневий заряд (“не займає об’єм”).

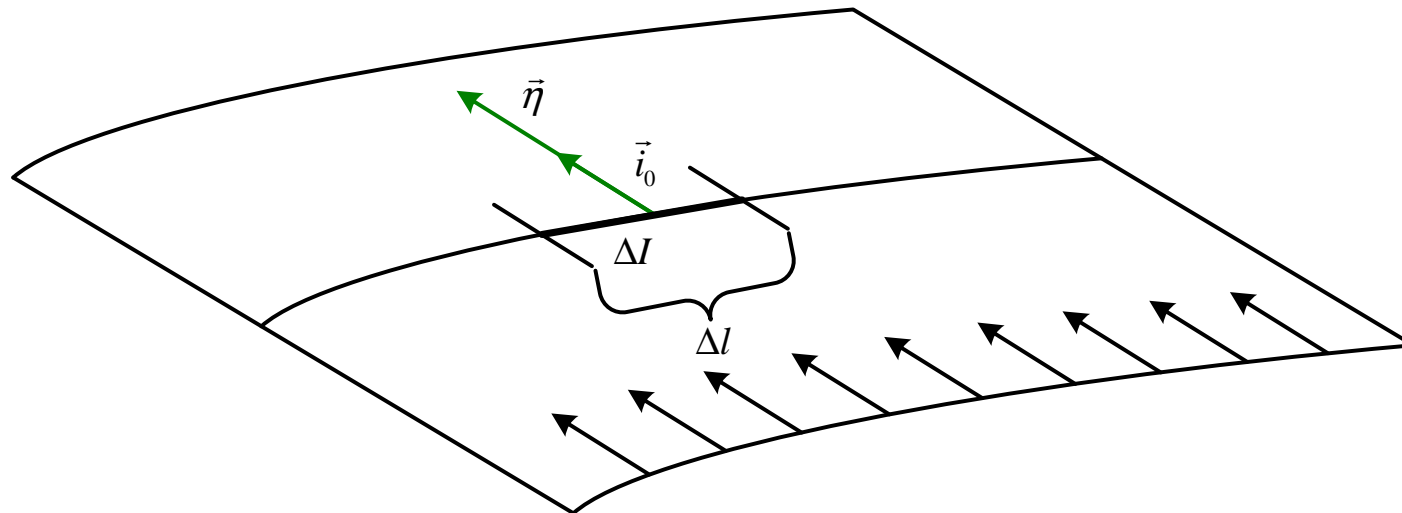
## Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, **магнітний** вектор

Звідси **густина поверхневого струму провідності**

$$\vec{\eta} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \vec{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l},$$

де  $\vec{i}_0$  – одиничний вектор, що вказує напрям струму;

$\Delta l$  – елемент лінії, що перетинається струмом  $\Delta I$  перпендикулярно (рисунок).



До визначення густини поверхневого струму провідності

## Тангенційні (дотичні) компоненти векторів поля, **магнітний** вектор

Струм провідності не є обмеженою функцією у випадку поверхневого струму, а враховуючи те, що за походженням це інтеграл виду

$$\int_{\Delta l \Delta h} j ds \Rightarrow \vec{v}_0 \Delta l \int_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \left( \begin{array}{l} x_2 - x_1 = \Delta h \\ x = x_0 \text{ на } S, x_2 > x_0 > x_1 \end{array} \right).$$

Тобто при стягуванні контура  $L$  до відрізка  $\Delta l$  на границі (при  $\Delta h \rightarrow 0$ ) цей інтеграл не зникне, оскільки через  $\Delta l$  проходить весь поверхневий струм.

Очевидно, що

$$\vec{v}_0 \Delta l \int_{x_1}^{x_2} \vec{j} dx \rightarrow \vec{v}_0 \vec{n} \Delta l \Rightarrow (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \vec{\tau}_0 = \vec{n} \vec{v}_0,$$

або (у зручнішій формі)

$$[\vec{n}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2] = \vec{n}.$$

Тобто за наявності поверхневого струму на границі розподілу середовищ дотична компонента магнітного вектора має розрив. Вектори  $\vec{H}_1 - \vec{H}_2$  та  $\vec{n}$  перпендикулярні. Якщо ж поверхневий струм відсутній, дотична компонента магнітного вектора є неперервною:

$$\vec{H}_{1\tau} = \vec{H}_{2\tau} \Big|_{\vec{n}=0}$$

## Граничні умови, підсумок

**Граничні умови** (за традиціями) – це **ряд співвідношень, яким підпорядковано нормальні та тангенційні складові компоненти векторів поля на границі розподілу середовищ.**

Основні з них:

- для **нормальних компонент:**

$$\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\vec{n}_0 = \xi, \quad \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\vec{n}_0 = 0;$$

- для **тангенційних компонент:**

$$\left[\vec{n}_0, \vec{E}_1 - \vec{E}_2\right] = 0, \quad \left[\vec{n}_0, \vec{H}_1 - \vec{H}_2\right] = \vec{\eta}.$$

**Завдяки цим умовам ми володіємо деякою інформацією про характер поля на деякій границі, ще не знаючи самого поля (!), тобто граничні умови універсальні!**

**Вони потрібні для знаходження розв'язків рівнянь Максвела за наявності різнорідних середовищ. У частинному випадку – змінних полів поблизу поверхні ідеального провідника.**

## Граничні умови, підсумок, **метали з кінцевою провідністю**

Змінні поля проникають у матеріал з кінцевою провідністю. Проте, якщо вважати провідник ідеальним, то заряди всередині нього настільки рухливі, що миттєво реагують на будь-які швидкі зміни поля, створюючи на його поверхні густину заряду  $\xi = \vec{E}_1 \vec{n}_0$ , яка забезпечує нульове електричне поле всередині провідника. Аналогічно, при зміні у часі магнітного поля поверхневі заряди рухаються та створюють поверхневий струм  $\vec{\eta} = [\vec{n}_0, \vec{H}_1]$ , завдяки чому магнітне поле всередині провідника відсутнє.

Цю ідеалізацію часто використовують при розгляді поблизу провідних поверхонь, оскільки провідність реальних металів дійсно доволі велика, і припущення, що вона нескінченна, призводить до незначної похибки при визначенні поля у діелектрику.

Таким чином, **поле в ідеально-провідному середовищі відсутнє:**

$$\vec{E}_2 = \vec{D}_2 = \vec{H}_2 = \vec{B}_2 = 0.$$

звідки маємо:

$$\begin{aligned} \vec{D}_1 \vec{n}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1 \vec{n}_0 = \xi, \quad \vec{B}_1 \vec{n}_0 = B_{1n} = 0 = H_{1n}, \\ [\vec{n}_0, \vec{E}_1] = E_{1\tau} = 0, \quad [\vec{n}_0, \vec{H}_1] = \vec{\eta}. \end{aligned}$$

## Граничні умови, підсумок, метали з кінцевою провідністю

Деталізуємо цей результат:

$$E_{1\tau} = 0, H_{1n} = 0$$

тангенційна складова напруженості електричного поля та нормальна складова напруженості магнітного поля поблизу поверхні ідеального провідника відсутні;

$$\vec{D}_1 \vec{n}_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1 \vec{n}_0 = \xi$$

нормальна складова електричного поля визначається розподілом поверхневого заряду;

$$[\vec{n}_0, \vec{H}_1] = \vec{\eta}$$

густина електричного струму на поверхні провідника дорівнює за значенням та перпендикулярна за напрямом тангенційної складової напруженості магнітного поля поблизу поверхні.



## Граничні умови, підсумок, **метали з кінцевою провідністю**

Також можна показати, що

$$\frac{\partial H_{1\tau}}{\partial n} = 0,$$

тобто **тангенційна складова магнітного поля досягає на границі ідеального провідника екстремального значення (у напрямі нормалі до границі).**