

## Електродинаміка та техніка НВЧ

# Система рівнянь Максвелла

# Система рівнянь Максвелла

у

## Рівняння Максвела

**Диференціальна форма** першого та другого рівнянь Максвела:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Якщо їх спроектувати на осі вибраної системи координат, то результатом цього будуть “рівняння Максвела у координатній формі”.

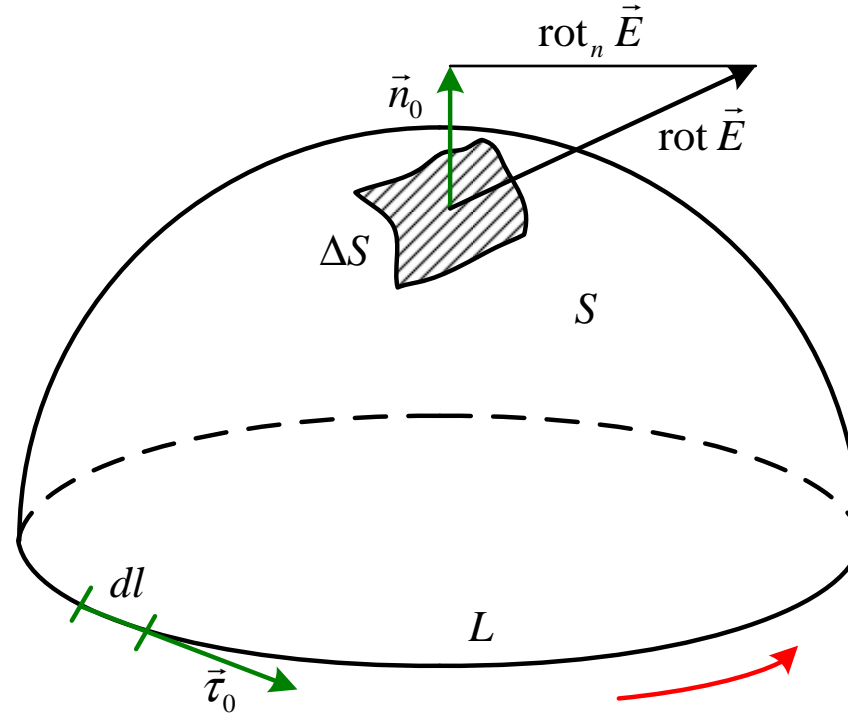
**Інтегральна форма** першого та другого рівнянь Максвела:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}$$

## Рівняння Максвела

Тут  $S$  – деяка поверхня (рисунок),  $L$  – її контур,  $d\vec{s} = \vec{n}_0 ds$ ,  $d\vec{l} = \vec{\tau}_0 dl$ .



$$\oint_L \vec{H} d\vec{l}$$

Це циркуляція напруженості магнітного поля уздовж довільного контуру  $L$

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l}$$

Це циркуляція напруженості електричного поля уздовж довільного контуру  $L$

## Рівняння Максвела

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{s} \quad - \text{ повний струм провідності, що протікає через поверхню } S$$

$$I_{зм} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} \quad - \text{ струм зміщення}$$

$$I_{зм} + I \quad \text{узагальнений (повний) струм, його густина} \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}$$

Циркуляція напруженості магнітного поля уздовж довільного контуру  $L$  дорівнює повному узагальненому струмові, що проходить через будь-яку поверхню  $S$ , яка опирається на цей контур. Тобто

за відсутності магнітного поля дорівнює нулю і повний узагальнений струм, а поява струму обов'язково спричиняє появу магнітного поля. Роль струму провідності та струму зміщення при цьому однакова.

## Рівняння Максвела

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s}$$

Циркуляція напруженості магнітного поля уздовж довільного контуру  $L$  дорівнює взятій з протилежним знаком похідній по часу потоку магнітної індукції через будь-яку поверхню  $S$ , яка опирається на цей контур. Тобто

**будь-яка зміна магнітного поля неминуче спричиняє появу електричного поля.**

## Рівняння Максвела

**Диференціальна форма** третього та четвертого рівнянь Максвела:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

**Інтегральна форма** третього та четвертого рівнянь Максвела отримується з їхніх диференціальних форм та з використанням теореми Остроградського-Гауса:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} dv = \oint_S \vec{F} d\vec{s}$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q$$

$$\oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0$$

Тут  $q = \int_V \rho dv$  повний заряд в області  $V$ , яку обмежено поверхнею  $S$ .

Гауса.

Інтегральна форма третього рівняння Максвела – це теорема

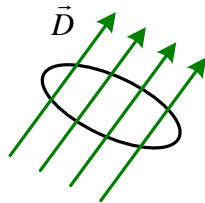
## Рівняння Максвелла

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

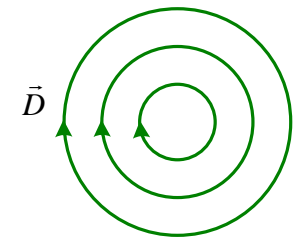
Дивергенція (розходження) електричної індукції дорівнює густині електричного заряду. Тобто векторні лінії  $\vec{D}$  можуть розпочинатись або закінчуватись лише у тих точках простору, де є заряд ( $\rho \neq 0$ ).

Якщо  $\rho = 0$  ж у всіх точках деякої області  $V$ , то векторні лінії  $\vec{D}$

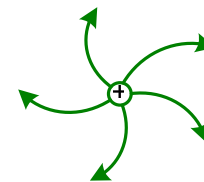
або пронизують її наскрізь



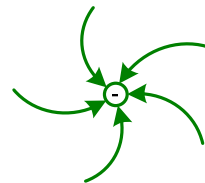
або є замкненими



Оскільки при  $\rho > 0$  розходження  $\vec{D}$  додатне



при  $\rho < 0$  розходження  $\vec{D}$  від'ємне,



то “джерелами” векторних ліній  $\vec{D}$  є додатні заряди, а “стоками” – від'ємні.



## Рівняння Максвела

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Рівність нулю розходження магнітної індукції означає, що векторні лінії  $\vec{B}$  (магнітні силові лінії) ніде не розпочинаються і не закінчуються: вони або замкнені, або йдуть у нескінченність. Потік магнітної індукції (магнітний потік) через будь-яку замкнену поверхню, згідно інтегральної форми цього рівняння, завжди дорівнює нулю.

Беручи рівняння  $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$ , та застосовуючи до обох його сторін операцію  $\operatorname{div}$ , з урахуванням тотожності  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ , отримаємо:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) = 0 \text{ або ж в інтегральній формі } \oint_s \left( \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \right) d\vec{s} = 0.$$

## Рівняння Максвела

Фізичний зміст виразів

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) = 0, \oint_S \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}\right) d\vec{s} = 0$$

характеризує важливу властивість узагальненого (повного) струму: **векторні лінії густини узагальненого струму неперервні (не мають ні початку, ні кінця); повний узагальнений струм, який виходить через будь-яку замкнену поверхню, дорівнює нулю.**

**Приклад:** конденсатор у колі змінного струму. Тут замкнена поверхня  $S$  може проходити між пластинами конденсатора, при цьому вона неминуче перетинає провід. Повний узагальнений струм через цю поверхню дорівнює нулю. Це означає, що струм зміщення, зосереджений головним чином всередині конденсатора, у кожний момент часу дорівнює за абсолютною величиною та протилежний за напрямом струму провідності у колі (вихідний з  $S$  струм вважають додатнім, вхідний – негативним).

## Система рівнянь Максвелла

Система рівнянь Максвелла у **диференціальній формі**:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$
$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E};$$

в **інтегральній формі**

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} d\vec{s} + \int_S \vec{j} d\vec{s}, \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{s},$$
$$\oint_S \vec{D} d\vec{s} = q, \quad \oint_S \vec{B} d\vec{s} = 0,$$
$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \mu \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E};$$

## Система рівнянь Максвелла

**Зверніть увагу:** сама по собі система рівнянь Максвелла не має визначених розв'язків. Певний розв'язок, тобто сукупність  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{j}, \sigma$  як конкретних функцій координат і часу, буде лише за умови накладання деяких додаткових умов, які характеризують певний реальний об'єкт. Іншими словами, після того як задачу про досліджуваний електромагнітний процес правильно сформульовано, він стає математичною задачею (задачею електродинаміки), яка складається з системи рівнянь Максвелла та додаткових умов (їх називають “**граничні умови**”), за яких існує розв'язок, який і описує цей процес.

**Закон збереження заряду:**

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ або ж в інтегральній формі } \int_V \left( \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0.$$

## **Типи середовищ**

## Типи середовищ

**Вектор поляризації**  $\vec{P}$  є мірилом відмінності електричної індукції у середовищі від індукції у вакуумі:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \\ \boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}, \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} =$$

$$= \boxed{[\varepsilon = 1 + \chi_e]} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} = \boxed{[\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon]} = \varepsilon_a \vec{E}.$$

**Намагніченість**  $\vec{M}$  є мірилом відмінності магнітної індукції у середовищі від індукції у вакуумі:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{M} = \vec{B} - \mu_0 \vec{H} \\ \boxed{\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}}, \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} =$$

$$= \boxed{[\mu = 1 + \chi_m]} = \mu_0 \mu \vec{H} = \boxed{[\mu_a = \mu_0 \mu]} = \mu_a \vec{H}.$$

У загальному випадку проникності є функціями частоти  $\varepsilon(f)$ ,  $\mu(f)$ , і  $\lim_{f \rightarrow \infty} \varepsilon(f) = 1$ ,  $\lim_{f \rightarrow \infty} \mu(f) = 1$ , причому  $\mu$  прямує до цієї границі швидше.

## Типи середовищ

Типи середовищ:

**Лінійні** – параметри  $\varepsilon$ ,  $\mu$  та  $\sigma$  не залежать від значень напруженостей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ .

**Нелінійні** – параметри  $\varepsilon$ ,  $\mu$  та  $\sigma$  (або хоча б один з них) залежить від значень напруженостей  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ .

**Однорідні** – параметри  $\varepsilon$ ,  $\mu$  та  $\sigma$  не залежать від просторових координат.

**Неоднорідні** – параметри залежать від координат ( $\varepsilon(\vec{r})$ ,  $\mu(\vec{r})$  та  $\sigma(\vec{r})$ ), або хоча б один з них залежить від координат.

**Ізотропні** – параметри середовища однакові у різних напрямках.

**Анізотропні** – [варіант визначення] параметри середовища не залежать від координат простору та значень  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ , але при цьому хоча б один з параметрів залежить від напрямку  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ;

[варіант визначення] параметри середовища чи хоча б один з них є величинами (величиною) тензорною:

$$\vec{j} = \|\sigma\| \vec{E}, \vec{D} = \varepsilon_0 \|\varepsilon\| \vec{E}, \vec{B} = \mu_0 \|\mu\| \vec{H},$$

або у скороченій формі:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_k, B_i = \mu_0 \mu_{ik} H_k, i, k = x, y, z$$

## Типи середовищ

*Приклади розгорнутої форми запису:*

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} D_x &= \epsilon_0 (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z) \\ D_y &= \epsilon_0 (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z) \\ D_z &= \epsilon_0 (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} B_x &= \mu_0 (\mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z) \\ B_y &= \mu_0 (\mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z) \\ B_z &= \mu_0 (\mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z) \end{aligned}$$



# **Провідники та діелектрики**

## Провідники та діелектрики

Питомі провідності типових провідників і діелектриків відрізняються на багато порядків, тому їхня поведінка в ЕМП суттєво відрізняється.

*Приклад.*

Речовина	$\sigma$ , См/м	Речовина	$\sigma$ , См/м
Срібло.....	$6,139 \cdot 10^7$	Кварц плавлений.....	$2 \cdot 10^{-17}$
Мідь.....	$5,8005 \cdot 10^7$	Парафін.....	$10^{-14} \dots 10^{-16}$
Алюміній промисловий...	$3,54 \cdot 10^7$	Слюда.....	$10^{-11} \dots 10^{-15}$
Залізо.....	$1,0 \cdot 10^7$	Скло.....	$10^{-12}$
Олово.....	$0,869 \cdot 10^7$	Бакеліт.....	$10^{-8} \dots 10^{-10}$
Свинець.....	$0,48 \cdot 10^7$	Мармур.....	$10^{-7} \dots 10^{-9}$
Ртуть.....	$0,1044 \cdot 10^7$		

У ряді випадків реальний діелектрик чи провідник замінюють ідеалізованими: використовують поняття **ідеального провідника** з необмеженою провідністю ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) та **ідеального діелектрика**, позбавленого провідності ( $\sigma = 0$ ).

## Провідники та діелектрики

Проте є середовища, які за електропровідністю займають проміжне положення – таблиця.

Середовище	$\epsilon$	$\sigma$ , См/м
Земля суха	3...6	$1,1 \cdot 10^{-5} \dots 2 \cdot 10^{-3}$
Земля волога	10...30	$3 \cdot 10^{-3} \dots 3 \cdot 10^{-2}$
Вода дистильована (0 Гц)	81,0	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода дистильована ( $10^6$ Гц)	80	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода дистильована ( $10^9$ Гц)	80	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода дистильована ( $3 \cdot 10^9$ Гц)	78	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода дистильована ( $10^{10}$ Гц)	64	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода дистильована ( $1,9 \cdot 10^{10}$ Гц)	44	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода дистильована ( $2,4 \cdot 10^{10}$ Гц)	35	$2 \cdot 10^{-4}$
Вода прісна природна	80	$10^{-3} \dots 2,4 \cdot 10^{-2}$
Вода морська	80	1...4,3

## Провідники та діелектрики

**У чому якісна відмінність між ідеальним провідником та ідеальним діелектриком?**

У тому, що:

**в ідеальному провіднику може існувати лише струм провідності, а в ідеальному діелектрику – лише струм зміщення.**

Щодо реальних середовищ, то діють за таким правилом:

якщо у середовищі домінує струм провідності ( $j \gg j_{3M}$ ), то його вважають близьким до ідеального провідника;

якщо ж у середовищі домінує струм зміщення ( $j \ll j_{3M}$ ), то його вважають близьким до ідеального діелектрика.

**Але співвідношення струмів залежить не лише від характеристик середовища  $\epsilon$  та  $\sigma$ , але і від швидкості зміни поля!**

Розглянемо це на прикладі гармонічних полів, з якими доводиться мати справу найчастіше.

## Провідники та діелектрики

Нехай напруженість електричного поля є функція  $\vec{E} = \vec{E}_m(\vec{r})\cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]$ , чому відповідають гармонічні коливання з коловою частотою  $\omega$ . У довільній точці простору  $M(\vec{r})$  густини струмів провідності  $j = \sigma E = \sigma E_m \cos(\omega t + \varphi)$ ,

зміщення  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\omega \epsilon_0 \epsilon E_m \sin(\omega t + \varphi)$ ,

а відношення їхніх амплітуд дорівнює  $\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)_m = \frac{j_m}{\omega \epsilon_0 \epsilon}$ . **Це і є**

**шукана міра оцінки властивостей середовища за даної частоти:**

якщо  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \gg 1$ , то **середовище вважають провідником на цій частоті**,

якщо ж  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \ll 1$ , то **середовище вважають діелектриком на цій**

**частоті**. Якщо ж  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \approx 1$ , тоді його вважають напівпровідником.

## Провідники та діелектрики

Тобто з точки зору електродинаміки, поділ середовищ на провідники та діелектрики відносний, оскільки питання щодо приналежності до одного з цих класів вирішується залежно від властивостей поля (для гармонічних коливань – від частоти).

У загальному випадку параметри  $\epsilon$  та  $\sigma$  є функціями частоти (про це вже йшла мова раніше). Проте аж до тих частот, доки коливання частинок матерії ще далекі від своїх резонансів, ці параметри можна вважати частото-незалежними і тоді в оцінці “діелектрик чи провідник” їх вважають константами.