Основи побудови та застосування БМА

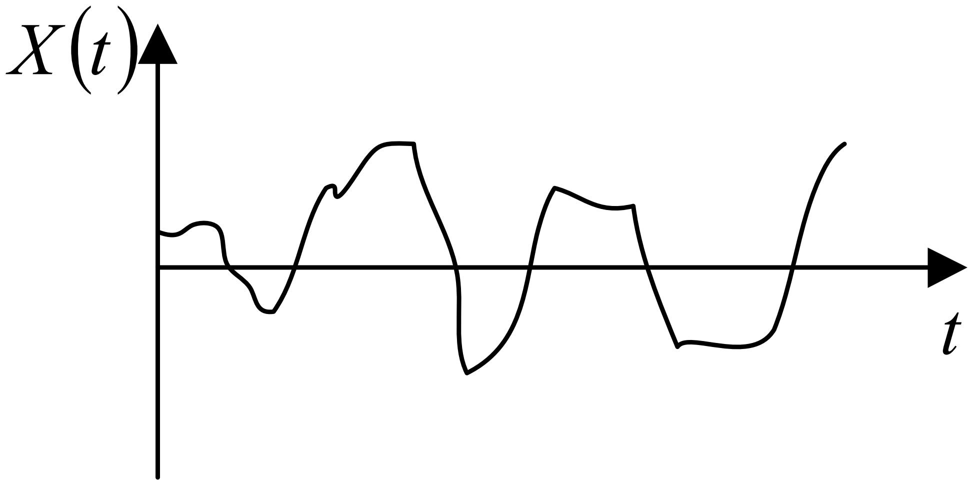
Характеристики випадкових сигналів (завад)

Загальна інформація

Завади – електромагнітні коливання, які заважають відновленню інформації з прийнятого сигналу.

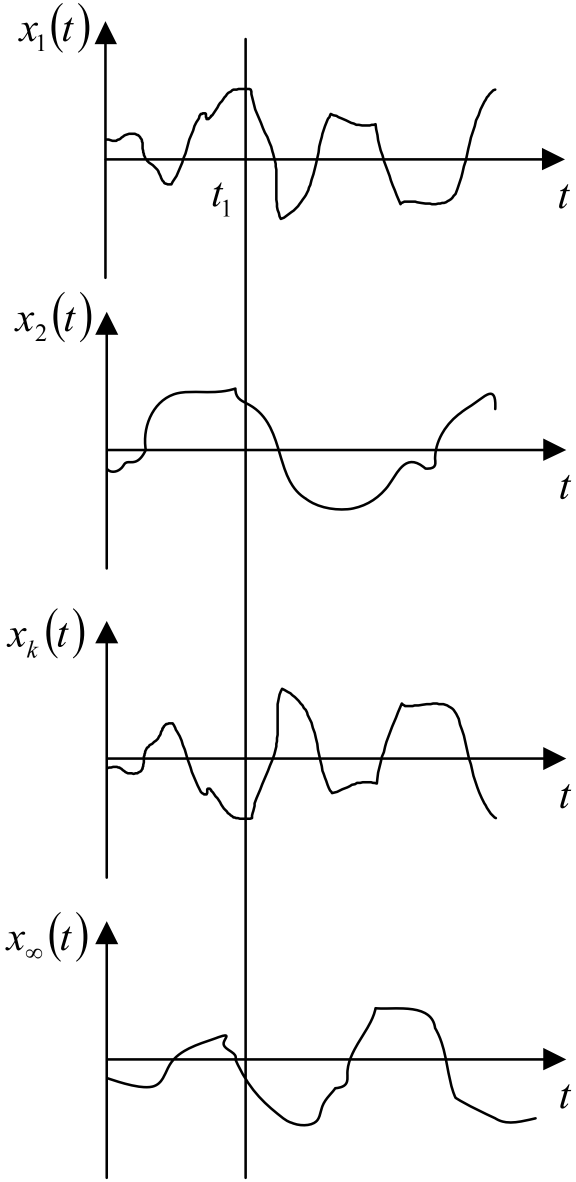
Випадковий процес *X(t)* – функція, яка у будь-який момент часу набуває значень, які є випадковими величинами.

Фіксуючи на певному часовому проміжку часу миттєві значення випадкового сигналу, отримують одну з реалізацій випадкового процесу – рисунок.



Реалізація випадкового процесу

Загальна інформація



$$\{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t), \ldots, x_\infty(t)\}$$

- статистичний ансамбль.

$$\{x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_k(t_2), \ldots, x_\infty(t_2)\}$$

- переріз статистичного ансамблю.

Статистичний ансамбль на його переріз

Основні параметри випадкового процесу

Математичне сподівання:

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x;t) dx$$

$p(x;t)$ – одновимірна густина розподілу випадкового процесу.

Характеризує середнє значення процесу X(t) у поточний момент часу.

Дисперсія:

$$D_x(t) = M\left\{[x(t) - m_x(t)]^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 p(x;t) dx$$

Характеризує ступінь відхилення миттєвих значень, яких набувають окремі реалізації у фіксований момент часу, відносно середнього значення.

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{M\left\{[x(t) - m_x(t)]^2\right\}} = +\sqrt{D_x(t)}$$

Основні параметри випадкового процесу

Кореляційна функція (флуктуаційна складова випадкового процесу):

$$R_x(t_1,t_2)=M\{[x(t_1)-m_x(t_1)][x(t_2)-m_x(t_2)]\}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x(t_1)-m_x(t_1)][x(t_2)-m_x(t_2)]p(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

$p(x_1,x_2;t_1,t_2)-$ двовимірна густина розподілу $x(t_1)\,та\;x(t_2)$.

Характеризує ступінь статистичного зв'язку тих випадкових величин, які спостерігають у моменти часу $t_1\;та\;t_2$.

При $\boxed{t=t_1=t_2:\;R_x(t_1,t_2)=D_x(t)}$

Основні параметри випадкового процесу

Коваріаційна функція:

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[x(t_1)x(t_2)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1)x(t_2)p(x_1, x_2; t_1, t_2)dx_1dx_2$$

Характеризує статистичне усереднення добутку значень випадкового процесу X(t) у моменти часу t_1 *та* t_2.

Зв'язок між коваріаційною та кореляційною функціями:

$$\boxed{R_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)}$$

Стаціонарні випадкові процеси

До стаціонарних процесів належать процеси, у яких *n*-вимірна густина імовірності не залежить від моментів часу, а залежить тільки від часових інтервалів між цими моментами часу. Виконання цієї умови дає підстави вважати, що математичне сподівання, середній квадрат та дисперсія не залежать від часу, а кореляційна функція залежить не від самих моментів часу

t_1 *та* t_2, а від інтервалу між ними $\tau = t_2 - t_1$.

Тому ***для стаціонарних випадкових процесів*** (в сенсі наведеного визначення) основні параметри можна записати так:

$$m_x = M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx, \qquad K_x(\tau) = M[x(t)x(t+\tau)],$$

$$\boxed{R_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2,} \qquad \boxed{D_x = K_x(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2,}$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - m_x^2}, \qquad \boxed{R_x(\tau) = R_x(-\tau),}$$

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x} -$$ нормована кореляційна функція.

Ергодичні випадкові процеси

Стаціонарний випадковий процес, називають **ергодичним**, якщо при визначенні будь-яких статистичних характеристик усереднення за множиною реалізацій еквівалентне усередненню за часом однієї теоретично нескінченної реалізації.

Умова ергодичності випадкового процесу містить умову його стаціонарності. Для ергодичних випадкових процесів основні параметри можна записати так:

$$m_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \qquad K_x(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2 \qquad D_x = K_x(0) - m_x^2 = R_x(0) = \sigma_x^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{K_x(0) - m_x^2}$$

Основні параметри випадкового процесу

Коваріаційна та кореляційна (у т.ч. нормована) функції характеризують зв'язок (кореляцію) між значеннями $x(t)$, розділеними проміжками часу τ. Чим повільніше, плавніше змінюється в часі $x(t)$, тим більший проміжок часу τ, у межах якого спостерігається статистичний зв'язок між миттєвими значеннями випадкової функції.

Приклади випадкових процесів:

1) гармонічне коливання з випадковою амплітудою – нестаціонарний та неергодичний випадковий процес.

2) гармонічне коливання з випадковою початковою фазою – стаціонарний та ергодичний випадковий процес.

3)) гармонічне коливання з випадковою амплітудою та початковою фазою – стаціонарний, але неергодичний випадковий процес (у різних реалізацій різна дисперсія).

Практичне використання отриманих результатів

Для описання властивотей процесу *x(t)* можна використати два простори:

1) часовий, використовуючи $p(x_1, x_2; t_1, t_2)$
2) частотний, використовуючи спектр потужності випадкового процесу.

Якщо під *x(t)* розуміти напругу або струм, то середній квадрат цієї функції можна розглядати як середню потужність, яка виділяється на опорі 1 Ом. Чому середній квадрат?

Якщо спектральну характеристику *к*-ї реалізації

$$\dot{X}_k(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_k(t) e^{-i\omega t} dt,\ k \in [1, 2, ...),$$

а потім усереднити $\dot{X}_k(\omega)$ по всіх функціях, то спектр процесу буде нульовим (за нульового математичного сподівання) в силу випадковості та незалежності складових у різних реалізаціях. Тому **введення поняття спектральної густини середнього квадрата випадкової функції є доцільним, адже значення середнього квадрата не залежить від співвідношення фаз гармонік, які складаються.**

Практичне використання отриманих результатів

Для цього виділимо з ансамблю будь-яку реалізацію $x_k(t)$, обмежимо її тривалість кінцевим інтервалом *T*, тоді $x_k(t) \leftrightarrow \dot{X}_k(\omega)$. Звідси енергія цього відрізка реалізації (за формулою Парсеваля):

$$E_{kT} = \int_{-T/2}^{T/2} x_k^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|X_{kT}(\omega)\right|^2 d\omega$$

Середня потужність цієї *к*-ї реалізації на відрізкові *T*:

$$\overline{x_{kT}^2(t)} = \frac{E_{kT}}{T} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|X_{kT}(\omega)\right|^2}{T} d\omega$$

При збільшенні тривалості відрізка *T* значення енергії E_{kT} також збільшується, проте співвідношення $\frac{E_{kT}}{T}$ прямує до деякої межі.

Спектральна густина середньої потужності

Тому

$$\overline{x_k^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\left|\dot{X}_{kT}(\omega)\right|^2}{T} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_k(\omega) d\omega,$$

де

$$\boxed{W_k(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\left|\dot{X}_{kT}(\omega)\right|^2}{T}}$$

спектральна густина середньої потужності розглядуваної *к*-ї реалізації.

У загальному випадку $W_k(\omega)$ потрібно усереднити по множині реалізацій. Для стаціонарного та ергодичного процесу можна вважати, що знайдена шляхом усереднення по одній реалізації функція $W(\omega)$ характеризує весь процес в цілому, тому індекс *к* можна опустити.

Спектральна густина середньої потужності

Звідси остаточний вираз для середньої потужності:

$$\overline{x^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\omega)d\omega, \text{ де } W_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{\left|\dot{X}_T(\omega)\right|^2}{T}.$$

Спектральна густина середньої потужності є парною та додатньою функцією, що випливає з її визначення.

Теорема Вінера-Хінчіна

Зміст теореми:

$$W_x(\omega) \leftrightarrow K_x(\tau),$$

або в розгорнутій формі :

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \; K_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Для випадкових процесів з нульовим значенням математичного сподівання:

$$R_x(\tau) = K_x(\tau) - m_x^2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} K_x(\tau) = R_x(\tau) + m_x^2 \\ m_x = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow K_x(\tau) = R_x(\tau).$$

Звідси:

$$W_x(\omega) \leftrightarrow R_x(\tau),$$

або в розгорнутій формі :

$$W_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \; R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Теорема Вінера-Хінчіна та білий шум

Фізичний зміст теореми: чим ширший спектр випадкового процесу, тим менший інтервал кореляції, і навпаки – чим більший інтервал кореляції, тим вужчий спектр процесу.

Білий шум (БШ):

$$W_x(\omega) = W_0 = const, \; -\infty < \omega < +\infty$$

Скориставшись теоремою Вінера-Хінчіна, для білого шуму маємо:

$$R_x(\tau) = \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega = W_0 \delta(\tau),$$

Тобто:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau = 0 \\ 0, & \tau \neq 0 \end{cases}$$

Тобто цей шум має голкоподібну структуру з щільно розташованими, незкінченно тонкими випадковими викидами. Іноді його ще називають дельта-корельованим процесом. Дисперсія БШ нескінченно велика.

Проходження випадкого процесу через лінійне коло

Задано: є лінійний чотириполюсник з відомим частотним коефіцієнтом передачі $\dot{K}(i\omega)$ (чи імпульсною характеристикою *h(t)*). Також відомі спектральна густина середньої потужності випадкового процесу $W_x(\omega)$ на вході цього чотириполюсника, його кореляційна функція $R_x(\tau)$ та дисперсія D_x

Знайти: $W_y(\omega)$, $R_y(\tau)$, D_y на виході цього чотириполюсника.

Розв'язок: є простим лише для нормального розподілу вхідного процесу

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

Тобто при будь-яких лінійних операціях з гаусівським процесом (підсилення, фільтрація, диференціювання, інтегрування тощо) розподіл залишається нормальним, змінюються лише функції $R(\tau)$, $W(\omega)$. Тому подальші результати наведено на випадок будь-якого розподілу, але стаціонарних процесів.

Проходження випадкого процесу через лінійне коло

Таким чином:

$$W_y(\omega) = K^2(\omega) W_x(\omega),$$

де $K^2(\omega) = \left|\dot{K}(i\omega)\right|^2 = K_p(\omega)$ – частотний коефіцієнт передачі за потужністю.

Кореляційна функція випадкового процесу на виході:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_y(\tau) e^{-i\omega\tau}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\tau) K_p(\omega) e^{-i\omega\tau}\,d\omega.$$

Дисперсія вихідного випадкового процесу (при $m_x = 0$):

$$D_y = R_y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_y(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_x(\tau) K_p(\omega)\,d\omega.$$