

Операторний метод розрахунку перехідних процесів

10.1. Перетворення Лапласа та його застосування до розрахунку перехідних процесів

Розрахунок перехідних процесів у лінійному електричному колі зводиться, як уже відомо, до розв'язування систем лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Головні труднощі класичного методу, розглянутого у попередньому розділі, пов'язані з пошуками сталих інтегрування, що навіть у колах 2-го порядку завжди не просто.

Лінійні рівняння з постійними коефіцієнтами можна інтегрувати також *операторним методом*, який ґрунтується на *перетворенні Лапласа*. Суть методу полягає у тому, що перехідні величини, як функції часу, а також їх похідні та інтеграли замінюються операторними зображеннями. Ці зображення відшукують за прямим перетворенням Лапласа. В результаті такої математичної операції інтегродиференціальні рівняння для функцій часу – *оригіналів* перетворюються в алгебричні рівняння для *зображень по Лапласу*. Розв'язавши рівняння відносно зображень, шукають відповідні цим зображенням оригінали.

Нехай задається функція часу $f(t)$, яка може бути дійсною чи комплексною. Значення цієї функції для часу $t < 0$, як правило, дорівнює нулю. Цією функцією, наприклад, може бути напруга, до якої включається електричне коло при $t = 0$.

Зображення по Лапласу функції $f(t)$ шукають шляхом застосування прямого перетворення Лапласа:

$$L\{f(t)\} \equiv F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (10.1)$$

де $p = a + jb$ – комплексний оператор.

$F(p)$ – функція тільки комплексного змінного. Вона існує і визначається рівнянням (10.1), якщо існує інтеграл у правій частині. Оригінал $f(t)$ повинен задовольняти умови Діріхле: в межах інтервалу перетворення мати скінчену кількість розривів першого роду та скінчену кількість екстремумів. Крім того, $f(t)$ повинна бути обмеженою, тобто

повинні існувати такі постійні додатні числа M та S_0 , щоб виконувалася нерівність:

$$|f(t)| < Me^{S_0 t}$$

для будь-яких додатних значень t . Всі реальні фізичні величини електричних кіл задовольняють таким умовам.

Символічно відповідність між функціями $F(p)$ та $f(t)$ записують:

$$F(p) \doteq f(t) \text{ або } F(p) \overset{\cdot}{\rightarrow} f(t).$$

Будемо використовувати надалі перший варіант позначення.

Нагадаємо відомі з відповідних розділів курсу вищої математики деякі властивості перетворення Лапласа.

Властивість 1.

Зображення функції зі змінним масштабом незалежної змінної.

Якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } \alpha > 0. \quad (10.2)$$

Властивість 2. Лінійність зображення.

Нехай $f(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)$, де α_i – сталі. Якщо $f(t) \doteq F(p)$,

$f_i(t) \doteq F_i(p)$, то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p). \quad (10.3)$$

Властивість 3. Теорема зміщення.

Якщо $f(t) \doteq F(p)$, то

$$e^{-at} f(t) \doteq F(p + a). \quad (10.4)$$

В електротехніці деколи застосовують також перетворення Карсона, яке зв'язане з перетворенням Лапласа множником p :

$$\varphi(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p).$$

10.2. Зображення по Лапласу характерних для електричних кіл функцій часу

Знайдемо операторні зображення функцій часу, які звичайно входять у рівняння електричних кіл.

а) Нехай $f(t) = A$ – стала величина.

Зображення цієї функції:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

б) Для функції $f(t) = e^{-\alpha t}$ зображення:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-t(p+\alpha)} dt = -\frac{1}{p+\alpha} e^{-t(p+\alpha)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p+\alpha}.$$

в) Знайдемо зображення похідної функції $f'(t)$, якщо $f(t) \doteq F(p)$:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{df(t)}{dt} dt = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Тут інтегрування здійснюється частинами. Враховуючи, що $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$, а $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p)$, зображення похідної приймає вигляд:

$$L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = pF(p) - f(0). \quad (10.5)$$

г) Нехай $F(p) \doteq f(t)$. Знайдемо зображення інтегралу функції $f(t)$:

$$\int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d(e^{-pt}).$$

Інтегруючи частинами, маємо:

$$-\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(t) dt \right] d(e^{-pt}) = -\frac{1}{p} \left[\int_0^t f(t) dt \right] e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Перша складова праворуч дорівнює нулю, в силу накладених в розділі 10.1 обмежень на $f(t)$, а також обернення в нуль інтегралу

$\int_0^t f(t) dt$ на нижній границі.

Отже:

$$\int_0^t f(t)dt \doteq \frac{1}{p} F(p). \quad (10.6)$$

У табл. 10.1 приведені найпоширеніші у електротехніці оператори співвідношень $F(p) \doteq f(t)$.

Таблиця 10.1

№ п/п	Оригінал	Операторне зображення
1	2	3
1	A	$\frac{A}{p}$
2	$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$
3	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
4	t	$\frac{1}{p^2}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7	$e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$
8	$e^{-\delta t} \cos \omega t$	$\frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2}$
9	$t^n (n > 0)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
10	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
11	$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$

Продовження таблиці 10.1

1	2	3
12	$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$
13	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
14	$(1 - \alpha t)e^{-\alpha t}$	$\frac{p}{(p + \alpha)^2}$
15	$\frac{1}{a - b}(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p + a)(p + b)}$
16	$f(t - \tau)$	$e^{-p\tau} F(p)$

10.3. Операторні схеми заміщення елементів електричних кіл

Розглянемо найпоширеніші складові електричних кіл і, використовуючи операторні зображення часових функцій, що описують властивості цих елементів, складемо операторні схеми заміщення.

Якщо комутація відбувається у електричному колі постійного струму з джерелами енергії у вигляді ЕРС E та ДС J , то відповідно, використовуючи зображення по Лапласу сталої величини, для операторної схеми кола будемо мати ділянки з джерелами енергії (рис. 10.1, а).

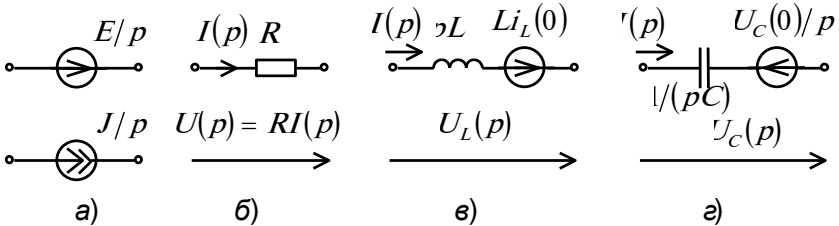


Рис. 10.1

Для ділянки кола з резистором R та функцією струму $i(t)$ напруга $U_R(t) = R \cdot i(t)$. В операторному вигляді ця ділянка показана на рис. 10.1, б, де $I(p) \doteq i(t)$.

Коли через індуктивність L протікає електричний струм $i_L(t)$, то напруга на цьому елементі $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$. Використавши зображення по Лапласу похідної $i_L(t)$ (10.5), отримуємо для напруги на індуктивності:

$$U_L(p) = L(p \cdot I(p) - i_L(0)) = pLI(p) - Li_L(0). \quad (10.7)$$

Перша складова зображення напруги $U_L(p)$ має співмножник pL , який є операторним опором котушки. Другу складову $Li_L(0)$ у схемі заміщення ділянки з котушкою слід враховувати у тому випадку, коли у момент часу $t = 0$ через індуктивність протікає струм. Цю складову називають **внутрішньою ЕРС** котушки і у схемі заміщення (рис. 10.1, в) зображують ЕРС, направленою, у відповідності з (10.7), за струмом $i_L(t)$.

Складемо операторну схему заміщення ділянки кола з ємністю C . Напруга на конденсаторі:

$$u_C = \frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C} \int_0^t idt + \frac{1}{C} \int_{-t}^0 idt = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0).$$

Використавши (10.6), запишемо зображення $U_C(p)$:

$$U_C(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}. \quad (10.8)$$

Тут $1/(pC)$ – опір конденсатора в операторному вигляді, $u_C(0)/p$ – **внутрішня ЕРС**, обумовлена наявністю напруги на обкладках конденсатора при $t = 0$. Направлена ця ЕРС, у відповідності з (10.8), проти струму $I(p)$ (рис. 10.1, з).

Внутрішні ЕРС у операторних схемах заміщення реактивних елементів враховують початкові умови у електричному колі. Вони обумовлені запасанням енергії у магнітному полі котушки чи електричному полі конденсатора до комутації.

Отже, аналізуючи формули (10.7) та (10.8), приходимо до висновку, що операторні зображення дають можливість звести операцію диференціювання до множення, а операцію інтегрування – до ділення.

Це дає можливість при розрахунках процесів у електричних колах перейти від розв'язку систем інтегро-диференціальних рівнянь до значно простіших завдань розв'язку алгебричних рівнянь.

10.4. Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі

Розглянемо узагальнену вітку ab електричного кола (рис. 10.2, а). Напряга на цій ділянці:

$$u_{ab}(t) = i(t)R - e_1(t) + \frac{1}{C} \int i(t)dt + e_2(t) + L \frac{di(t)}{dt}.$$

Застосуємо до цього рівняння перетворення Лапласа, врахувавши співвідношення (10.7) та (10.8):

$$U_{ab}(p) = I(p)R - E_1(p) + I(p) \frac{1}{pC} + \frac{U_C(0)}{p} + E_2(p) + I(p)pL - Li_L(0).$$

Отриманому рівнянню відповідає схема рис. 10.2, б). Зображення струму:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E_1(p) - \frac{U_C(0)}{p} + Li_L(0) - E_2(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}}. \quad (10.9)$$

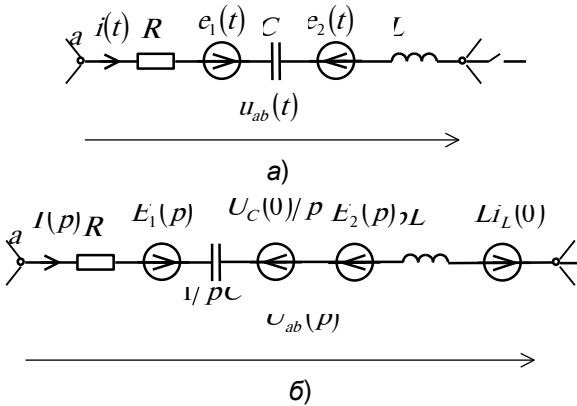


Рис. 10.2

Формула (10.9) є законом Ома в операторній формі, де **операторний опір** вітки ab :

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}. \quad (10.10)$$

Структура цього опору аналогічна структурі комплексного опору цієї ділянки змінному струму, якщо $j\omega$ замінити на p . Величина, обернена операторному опору, називається **операторною провідністю**:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}. \quad (10.11)$$

Многочлен у чисельнику (10.9), крім операторного зображення ЕРС $e_1(t)$ та $e_2(t)$, включає в себе внутрішні ЕРС котушки індуктивності $L i_L(0)$ та конденсатора $U_C(0)/p$. Додатній напрям ЕРС індуктивності співпадає з додатним напрямом струму у вітті, додатний напрям внутрішньої ЕРС ємності протилежний струму. Якщо на момент $t = 0$ індуктивний струм $i_L(0) = 0$ та ємнісна напруга $U_C(0) = 0$ (тобто, при нульових незалежних початкових умовах), внутрішні ЕРС також мають нульове значення.

Переведемо тепер на мову операторних зображень закони Кірхгофа.

Для першого закону Кірхгофа в диференційній формі:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

застосування перетворення Лапласа дає в операторній формі для вузла електричного кола:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0. \quad (10.12)$$

Для замкнутого контуру, що має n віток, за другим законом Кірхгофа:

$$\sum_{k=1}^n R_k i_k + \sum_{k=1}^n L_k \frac{di_k}{dt} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int i_k dt = \sum_{k=1}^n e_k.$$

Перейдемо до зображень:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n R_k I_k(p) + \sum_{k=1}^n (pL_k \cdot I_k(p) - L_k i_k(0)) + \\ & + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{pC_k} I_k(p) + \frac{U_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^n E_k(p). \end{aligned}$$

Отже, другий закон Кірхгофа в операторній формі:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left(R_k + pL_k + \frac{1}{pC_k} \right) I_k(p) = \\ & = \sum_{k=1}^n \left(E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{U_{Ck}(0)}{p} \right). \end{aligned} \quad (10.13)$$

Оскільки закони Ома та Кірхгофа покладені в основу усіх методів розрахунку електричних кіл, то, переклавши ці закони на операторну форму, можна отримати рівняння методів у операторному вигляді. Розв'язавши ці рівняння (до речі, алгебричні), отримують зображення по Лапласу шуканих струмів чи напруг.

10.5. Перехід від операторного зображення до оригіналу

Визначивши операторне зображення $F(p)$ функції струму, напруги чи потенціалу, необхідно знайти оригінал цієї функції $f(t)$. Для цього можна застосувати різні способи.

В теорії функції комплексного змінного для пошуків $f(t)$ пропонується зворотне перетворення Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

Для багатьох функцій $F(p)$ оригінал можна визначити за табл. 10.1 чи довідниками, де можна знайти близько 1500 формул відповідності.

У курсі теорії кіл найчастіше застосовують порівняно простий спосіб знаходження оригіналу за **теоремою розкладання**.

Зображення $F(p)$ при розрахунках перехідних процесів найчастіше має вигляд раціонального дробу:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + K + ap + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + bp + b_0}. \quad (10.14)$$

причому, $m < n$, тобто степінь поліному чисельника m менший степеня n поліному знаменника, a_k та b_k — дійсні числа, а многочлени $F_1(p)$ та $F_2(p)$ спільних коренів не мають.

У такому вигляді, зокрема, записуються передатні функції систем автоматичного керування, до аналізу яких широко застосовується теорія перехідних процесів.

У цьому випадку, як доводиться у курсі вищої математики, оригінал $f(t)$ зображення $F(p)$ можна знайти за формулою теореми розкладання:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2(p_k)} e^{p_k t}. \quad (10.15)$$

У цій формулі p_k – прості корені многочлена $F_2(p)$, причому серед них може бути і корінь рівним нулю. $F_1(p_k)$ – значення многочлена чисельника, тобто $F_1(p)$, обчислене з підстановкою замість p значення k -того кореня, тобто $p = p_k$. У знаменнику (10.15) – похідна $dF_2(p)/dp$, обчислена також з підстановкою $p = p_k$.

10.6. Розрахунок перехідних процесів операторним методом

У попередніх параграфах розділу були розглянуті загальні засади та особливості окремих етапів застосування перетворення Лапласа до розрахунку електричних кіл. Узагальнюючи все сказане вище, можна скласти такий алгоритм розрахунку:

- визначення незалежних початкових умов у схемі, тобто значення $i_L(0)$ та $u_C(0)$;
- складання операторної схеми заміщення скомутованого кола;
- застосування для визначення зображення шуканої величини одного із методів розрахунку електричних кіл;
- визначення оригіналу перехідної величини за допомогою формул розкладання;

10.7. Застосування операторного методу до розрахунку перехідних процесів у колах синусоїдного струму

Розрахунок перехідних процесів у колах синусоїдного струму супроводжується великим обсягом обчислень, особливо при використанні зображень по Лапласу синусоїдних функцій. Так, якщо:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

то операторне зображення цієї функції досить громіздке:

$$E(p) = E_m \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}. \quad (10.19)$$

Великий обсяг обчислень доводиться виконувати і при визначенні оригіналу. Тому для розрахунку перехідних процесів у колах синусоїдного струму застосовують дещо модифікований операторний метод. При цьому використовують операторні перетворення для комплексних зображень синусоїдних функцій.

Для синусоїдної функції, наприклад, ЕРС:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi)$$

символічне зображення:

$$e(t) \doteq \underline{E}_m e^{j\omega t}.$$

У свою чергу, використовуючи операторне зображення експоненціальних функцій (див. табл. 10.1), можна отримати за перетворенням Лапласа:

$$\underline{E}_m e^{j\omega t} \doteq \frac{\underline{E}_m}{p - j\omega} = \underline{E}_m(p).$$

У операторному вигляді напруги на індуктивностях та ємностях отримують у цьому випадку у вигляді:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &\doteq pL\underline{I}(p) - jL\underline{I}(0); \\ \frac{1}{C} \int idt &\doteq \frac{1}{pC} \underline{I}(p) + j \frac{U_C(0)}{p}. \end{aligned} \tag{10.20}$$

За загальним алгоритмом операторного методу визначається зображення шуканої величини та за формулами теореми розкладання розраховується оригінал – символічне зображення, а потім здійснюється перехід до миттєвих значень (тобто, часових функцій).