Розділ 5. **Кола періодичного несинусоїдного струму**

5.1. Розкладання періодичних несинусоїдних функцій у тригонометричний ряд Фур'є

Для багатьох електротехнічних пристроїв робочим режимом роботи є такий режим, при якому форми кривих струмів та напруг суттєво відрізняються від синусоїдних. Періодичні сигнали у вигляді імпульсів різної форми находять широке застосування у різноманітних пристроях автоматики та управління. Нарешті, у нелінійних колах навіть при синусоїдній формі вхідних сигналів виникають сигнали – відгуки несинусоїдної форми.

З курсу математики відомо, що періодичні несинусоїдні функції, які задовольняють умовам Дирихле[1], можна розкласти у тригонометричний ряд Фур'є, тобто представити несинусоїдну функцію сумою гармонічних складових.

Нехай періодична функція $f(t)$ (рис. 5.1) має період T, тобто:

$$f(t) = f(t+T).$$

Позначимо $\omega = 2\pi/T$ і будемо називати ω основною кутовою частотою. Гармонічні складові ряду з такою частотою створюють ***основну гармоніку***. Складові з більш високими кутовими частотами називаються ***вищими гармоніками***.

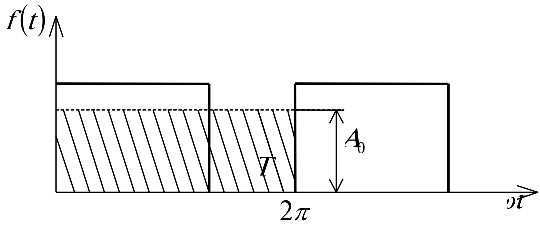

Рис. 5.1

[1] Згідно з умовами Дирихле, така функція має кінцеве число відносних максимумів та мінімумів, а також точок розриву першого роду на деякому кінцевому інтервалі.

Гармонічний ряд Фур'є у тригонометричній формі записується у вигляді:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} \cos k\omega t . \qquad (5.1)$$

Тут A_0 – постійна складова або ***нульова гармоніка***. Вона дорівнює середньому значенню функції $f(t)$ за її період.

Геометрично середнє значення функції за період визначається висотою прямокутника з основою T, площа якого обмежена віссю абсцис та графіком функції $f(t)$ за період (рис. 5.1). Постійну складову напруги чи струму вимірюють приладами магнітоелектричної системи. Якщо площі додатних та від'ємних значень функції $f(t)$ за період однакові (як, наприклад, для гармонічних сигналів), то середнє значення за період такої функції дорівнює нулю.

Інші складові ряду (5.1) визначають набір гармонічних складових, частоти яких кратні основній частоті ω:

B_{km} – амплітуда синусної складової k-ї гармоніки;

C_{km} – амплітуда косинусної складової k-ї гармоніки.

Об'єднавши синусну та косинусну складову кожної гармоніки у одну еквівалентну синусоїду, ряд Фур'є можна переписати і у іншій формі:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) . \qquad (5.2)$$

Коефіцієнти A_0, B_{km}, C_{km}, A_{km}, ψ_k рядів (5.1) та (5.2) визначаються за співвідношеннями:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) d(\omega t);$$

$$B_{km} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t);$$

$$C_{km} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega t dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega t) \cos k\omega t d(\omega t); \qquad (5.3)$$

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2}; \ \psi_k = arctg \frac{C_{km}}{B_{km}} .$$

Приклади розкладання у ряд Фур'є деяких простих функцій, найбільш вживаних у електротехніці, наведені у додатку 3.

Сукупність гармонічних складових несинусоїдної періодичної функції називають її ***дискретним частотним спектром***. Спектр характеризує залежність від частоти $k\omega$ амплітуд (***спектр амплітуд***) та фаз (***спектр фаз***) періодичної несинусоїдної функції.

5.2. Розрахунок кіл періодичного несинусоїдного струму

Оскільки періодичні несинусоїдні функції ЕРС, струмів та напруг завжди можна розкласти на гармонічні складові, то для розрахунку таких кіл потрібно застосовувати принцип накладання. Адже формально розкладання періодичного несинусоїдного сигналу $e(t)$ (рис. 5.4, *а*) на гармонічні складові можна зобразити ділянкою електричного кола, показаною на рис. 5.4, *б*, де замість одного джерела маємо декілька. Теоретично ряд Фур'є має нескінченно велику кількість членів, одначе форма багатьох електричних сигналів така, що ряд швидко сходиться, і для розрахунків можна обмежитися порівняно невеликою кількістю гармонік.

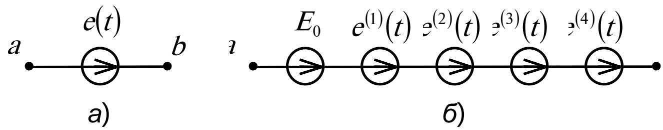

Рис. 5.1

Розраховують електричне коло для кожної гармоніки окремо, склавши потім результати підрахунків. При цьому необхідно враховувати, що опори реактивних елементів залежать від частоти: індуктивний опір для k-ї гармоніки $X_L^{(k)} = k\omega L$, опір ємності $X_C^{(k)} = 1/k\omega C$.

Кожна гармоніка на комплексні площині зображується вектором, що має свою певну кутову частоту, тому не можна складати в одне результати комплексних розрахунків для різних гармонік.

Результати підрахунків теж записують у вигляді ряду гармонічних складових.

5.3. Діючі та середні значення несинусоїдних ЕРС, напруг та струмів

Діюче значення періодичної функції (або середньоквадратичне значення за період) визначається за відомою з § 2.1 формулою:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt}\,.$$

Для кіл періодичного несинусоїдного струму у загальному випадку для функції $f(t)$ можна записати ряд:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)\,.$$

Тоді для визначення діючого значення F маємо:

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)\right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T A_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \psi_k)dt + \\ &+ \frac{1}{T}\sum_{\substack{i=0\\k=0\\i\neq k}}^{\infty}\int_0^T A_{im}A_{km} \sin(i\omega t + \psi_i)\sin(k\omega t + \psi_k). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Кожен з інтегралів першої суми визначає діюче значення k-тої гармоніки (див. (2.3)), кожен з інтегралів другої суми дорівнює нулю.

Отже, діюче значення періодичної несинусоїдної функції:

$$F = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2} = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + \ldots}\,, \tag{5.5}$$

де A_k – діюче значення відповідних гармонічних складових.

Для кіл періодичного несинусоїдного струму діюче значення ЕРС, напруг чи струмів є однією з найважливіших кількісних характеристик. Вимірюються діючі значення приладами електромагнітної, електродинамічної, електростатичної та теплової систем.

Середнє значення функції по модулю визначається за формулою:

$$F_{сер} = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|dt\,. \tag{5.6}$$

Якщо функція $f(t)$ має однакові додатні та від'ємні півхвилі, то середнє значення функції визначається за додатний півперіод:

$$F_{сер} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt .$$

Вимірюється середнє значення періодичної несинусоїдної величини приладами магнітоелектричної системи з випрямлячем.

При аналізі роботи електротехнічних та електронних схем у режимі несинусоїдних періодичних сигналів використовуються поняття про коефіцієнти форми $k_ф$, амплітуди k_a, спотворень k_c, гармонік $k_г$.

Коефіцієнт форми визначається відношенням діючого значення функції F до середнього значення по модулю $F_{сер}$:

$$k = F/F_{сер} . \tag{5.7}$$

Коефіцієнт амплітуди k_a визначається, як відношення максимального значення функції F_m до її діючого значення:

$$k_a = F_m/F . \tag{5.8}$$

Коефіцієнт спотворень дорівнює відношенню діючого значення основної гармоніки до діючого значення всієї функції:

$$k_c = A_1/F . \tag{5.9}$$

Коефіцієнт гармонік визначається, як відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення основної гармоніки:

5.4. Потужність у колах періодичного несинусоїдного струму

У колах періодичного несинусоїдного струму мають справу з активною, реактивною та повною потужністю, як і у колах синусоїдного струму. Крім того, для кіл несинусоїдного струму вводиться поняття про так звану потужність спотворення.

Активна потужність P для кіл змінного струму визначається, як середнє значення миттєвої потужності за період (див. § 2.7):

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt .$$

Якщо:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_{u_k}\right);$$

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin\left(k\omega t + \psi_{i_k}\right),$$

то для несинусоїдного струму формула для активної потужності записується у вигляді:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\sum_{k=0}^{\infty} U_{km}\sin\left(k\omega t + \psi_{u_k}\right)\sum_{k=0}^{\infty} I_{km}\sin\left(k\omega t + \psi_{i_k}\right)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^T U_{km}\sin\left(k\omega t + \psi_{u_k}\right) I_{km}\sin\left(k\omega t + \psi_{i_k}\right)dt +$$

$$+ \frac{1}{T}\sum_{\substack{j=0\\k=0\\j\neq k}}^{\infty}\int_0^T U_{jm} I_{km}\sin\left(j\omega t + \psi_{u_j}\right)\sin\left(k\omega t + \psi_{i_k}\right)dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos\left(\psi_{u_k} - \psi_{i_k}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k .$$

Таким чином, активна потужність у колах несинусоїдного струму дорівнює сумі активних потужностей усіх гармонік.

Реактивна потужність у колах несинусоїдного струму розраховується, як сума реактивних потужностей усіх гармонік:

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k .$$

Повна потужність S визначається, як добуток діючого значення несинусоїдної напруги на діюче значення несинусоїдного струму; сума квадратів активної та реактивної потужностей у колі несинусоїдного струму не дорівнює квадрату повної потужності:

$$S^2 > P^2 + Q^2 .$$

Це обумовлено тим, що деякі гармонічні складові струму можуть бути у схемі відсутніми при наявності цих гармонік у вхідній напрузі. Тоді відсутній і внесок цих гармонік у активну та реактивну потужності, хоча у діючих значеннях для підрахунку S ці складові є. Для оцінки невідповідності у формах кривих напруги та струму вводять потужність спотворень T:

$$P^2 + Q^2 = S^2 - T^2 .$$

Відношення активної потужності P до повної S позначається літерою χ і називається коефіцієнтом потужності:

$$\chi = \frac{P}{S} .$$

Приклад

Розрахувати активну, реактивну та повну потужності кола, приведеного в умові прикладу 5.3.

Розв'язок.

Миттєві значення ЕРС та струму у задачі:

$$e(t) = \left[20 + 35\,sin\,\omega t + 15\,sin\left(3\omega t + 40^{o}\right)\right]\text{В};$$

$$i(t) = \left[1{,}2\,sin\left(\omega t + 57{,}3^{o}\right) + 0{,}44\,sin\left(3\omega t + 40^{o}\right)\right]\text{А}.$$

Активна потужність кола:

$$P = P_1 + P_3.$$

$P_0 = 0$, оскільки, хоча на вході діє нульова гармоніка ЕРС, постійної складової струм не має. Отже:

$$P = E_1 I_1\,cos\varphi_1 + E_3 I_3\,cos\varphi_3 =$$

$$= \frac{35}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\,cos\left(0 - 57{,}3^{o}\right) + \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{0{,}44}{\sqrt{2}}\,cos\,0^{o} = 11{,}3 + 3{,}3 = 14{,}6\ \text{Вт}.$$

Реактивна потужність $Q = Q_1 + Q_3 = Q_1$. (Нагадаємо, що за умовою задачі у схемі відбувається резонанс напруг на третій гармоніці, тобто характер кола на частоті третьої гармоніки чисто активний):

$$Q_1 = E_1 I_1\,sin\varphi_1 = \frac{35}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\,sin\left(-57{,}3^{o}\right) = -17{,}7\,\text{Вар}.$$

Повна потужність кола:

$$S = EI = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_3^2} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_3^2} =$$

$$= \sqrt{20^2 + \left(\frac{35}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{2}}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}44}{\sqrt{2}}\right)^2} = 30{,}3\,\text{ВА}.$$

Потужність спотворень:

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 19{,}6\,\text{ВА}.$$