Символічне зображення синусоїдних функцій

Розрахунок кіл змінного струму значно спрощується, якщо зображувати синусоїдні струми, напруги та ЕРС векторами чи комплексними числами.

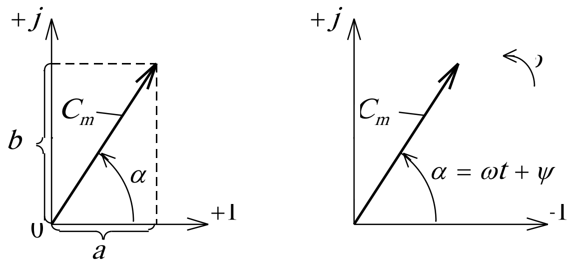
Комплексним числом називається співвідношення, що має вигляд:

$$C = a + jb,$$

де a, b – дійсні числа, j – уявна одиниця, що задовольняє рівність $j^2 = -1$.

Число a називається ***дійсною частиною***, число b – ***уявною частиною*** числа C, і позначаються відповідно: $a = ReC$, $b = ImC$. Таку форму запису комплексного числа називають алгебричною.

Комплексне число можна зобразити точкою чи відповідним радіус-вектором на комплексній площині. Осі Ox та Oy (у прямокутній декартовій системі координат) називаються відповідно дійсною та уявною осями. Додатний напрям дійсної осі прийнято позначати знаком $+1$, додатний напрям уявної осі – знаком $+j$ (рис. 2.7, *а*).



à) á)

Рис. 2.7

На комплексній площині комплексне число зображується радіус-вектором, проекція якого на дійсну вісь дорівнює a, на уявну – b. Тоді:

$$a + jb = C_m \cos\alpha + jC_m \sin\alpha = C_m e^{j\alpha}.$$

Одержані дві нові форми запису комплексного числа називаються відповідно тригонометричною та показниковою (полярною). Величина C_m називається ***модулем***, α – ***аргументом чи фазою*** комплексного числа.

Припустимо, що радіус-вектор з модулем C_m обертається на комплексній площині в напрямку проти годинникової стрілки з кутовою частотою ω. Тоді для будь-якого моменту часу t аргумент числа можна записати так:

$$\alpha = \omega t + \psi,$$

де ψ – початкова фаза при $t = 0$.

У такому випадку:

$$C_m e^{j(\omega t + \psi)} = C_m \cos(\omega t + \psi) + jC_m \sin(\omega t + \psi)$$

або $Re\left[C_m e^{j(\omega t + \psi)}\right] = C_m \cos(\omega t + \psi)$,

$$Im\left[C_m e^{j(\omega t + \psi)}\right] = C_m \sin(\omega t + \psi).$$

З останньої формули виходить, що синусоїдна функція часу може розглядатися як уявна частина відповідної комплексної функції. Часто кажуть, що функція $C_m e^{j(\omega t+\psi)}$ є ***символічним чи комплексним зображенням*** синусоїдної функції $C_m \sin(\omega t + \psi)$, і записують це так:

$$C_m \sin(\omega t + \psi) \sim C_m e^{j(\omega t+\psi)} .$$

Тоді:

$$C_m e^{j(\omega t+\psi)} = C_m e^{j\omega t} \cdot e^{j\psi} = \dot{C}_m e^{j\omega t} ,$$

де $\dot{C}_m$ – комплексна величина, модуль якої дорівнює C_m, а кут, під яким вектор C_m проведений відносно осі $+1$ на комплексній площині, дорівнює початковій фазі ψ. Величина

$$\dot{C}_m = C_m e^{j\psi} \qquad (2.12)$$

називається ***комплексною амплітудою*** (комплексні величини, що є зображеннями синусоїдних функцій часу, прийнято в електротехнічній літературі позначати великими літерами або з крапкою зверху, або підкресленими знизу. Обрано, таким чином, перший з цих варіантів).

Комплексна амплітуда – це комплексна величина, що не залежить від часу. Модуль і аргумент комплексної амплітуди дорівнюють відповідно амплітуді та початковій фазі гармонічної функції часу. Відповідність між комплексною амплітудою та синусоїдною функцією часу взаємно однозначна. Наприклад,
для синусоїдної функції $i = 12 \sin(\omega t + 48^\circ)$ комплексна амплітуда $\dot{I}_m = 12e^{j48^\circ}$, а комплексній амплітуді $\dot{E}_m = 45e^{-j115^\circ}$ відповідає синусоїдна функція $e = 45 \sin(\omega t - 115^\circ)$.

Введення поняття про комплексну амплітуду значно спрощує математичні операції над гармонічними функціями, а саме: замість перетворень синусоїдних функцій можна виконувати відповідні перетворення їх комплексних амплітуд, а потім результат цих перетворень переносити в площину часових функцій.

Дії над комплексними числами

Комплексне число, що відповідає точці, в якій лежить кінець вектора $\bar{A}$ (рис. 3), може бути записане в наступних формах:

алгебраїчній $\bar{A} = a_1 + ja_2$;

тригонометричній $\bar{A} = A\cos\alpha + jA\sin\alpha$;

показовій $\bar{A} = ae^{j\alpha} = a\exp(j\alpha)$;

полярній (кутовій) $\bar{A} = A\angle\alpha$.

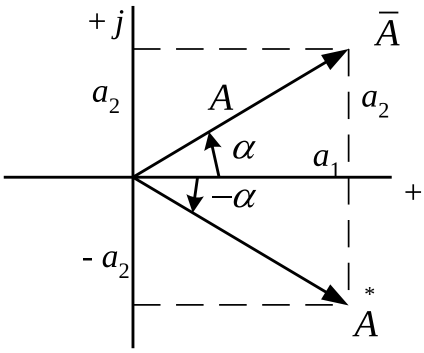


Рис. 3

Тут $a_1 = A\cos\alpha = \mathrm{Re}\left[\bar{A}\right]$ - дійсна частина комплексного числа $\dot{A}$;

$a_2 = A\sin\alpha = \mathrm{Im}\left[\bar{A}\right]$ - уявна частина комплексного числа $\dot{A}$;

$j = \sqrt{-1}$ - уявна одиниця.

$A = \left|\bar{A}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ - модуль комплексного числа $\dot{A}$ (завжди додатній)

α - аргумент комплексного числа, що дорівнює куту який складає вектор $\dot{A}$ з позитивною піввіссю дійсних чисел.

$\cos\alpha \pm j\sin\alpha = e^{\pm j\alpha}$ - формула Ейлера

Комплексне число $\overset{*}{A} = a_1 - ja_2 = Ae^{-j\alpha}$ називається комплексно-спряженим числу $\dot{A}$. Добуток комплексно-спряжених чисел – число дійсне, що дорівнює квадрату їх модуля

$$\bar{A}\overset{*}{A} = Ae^{j\alpha} \cdot Ae^{-j\alpha} = A^2 .$$

Додавання та віднімання комплексних чисел:

$$\bar{A} = a_1 + ja_2 = Ae^{j\alpha}; \quad \bar{B} = b_1 + jb_2 = Be^{j\beta} .$$

$$\bar{A} \pm \bar{B} = \left(a_1 \pm b_1\right) + j\left(a_2 \pm b_2\right) .$$

Множення:

$$\bar{A}\bar{B} = \left(a_1 + ja_2\right)\left(b_1 + jb_2\right) = \left(a_1b_1 - a_2b_2\right) + j\left(a_2b_1 + a_1b_2\right) =$$
$$= Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = ABe^{j(\alpha+\beta)}$$

Множення комплексного числа $\dot{A}$ на число $e^{j\varphi}$ зводиться до повороту вектора $\dot{A}$ в комплексній площині на кут φ:

$$\bar{A}e^{j\varphi} = Ae^{j\alpha} \cdot e^{j\varphi} = Ae^{j(\alpha+\varphi)}$$

тому $e^{j\varphi}$ - вважається оператором повороту на кут φ.

Тоді, $j = e^{j\pi/2}$ - оператор повороту на кут $\pi/2 = 90^o$ (множення на j зводиться до повороту вектора проти годинникової стрілки на кут $\pi/2$; а множення на $-j = e^{-j\pi/2}$ - до повороту вектора на прямий кут за годинниковою стрілкою);

Ділення:

$$\frac{\overline{A}}{\overline{B}}=\frac{a_1+ja_2}{b_1+jb_2}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{b_1^2+b_2^2}+j\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1^2+b_2^2}=\frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}}=\frac{A}{B}e^{j(\alpha-\beta)}.$$

Введення в ступінь:

$$\overline{A}^n=\left(Ae^{j\alpha}\right)^n=A^ne^{j\alpha n}=A^n\left(\cos n\alpha+j\sin n\alpha\right).$$

Добування кореня:

$$\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{Ae^{j\alpha}}=\sqrt[n]{A}\cdot e^{j\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)},$$

де k – ціле число, при цілому та позитивному n корінь має n різних значень, що відповідають числам k = 0, 1, 2, … (n - 1), тобто операція добування кореня багатозначна.

Оскільки додавання і віднімання комплексних чисел вимагає, щоб вони були записані в алгебраїчній формі запису, а множення, ділення, зведення в ступінь і добування кореня зручніше виконувати при записі комплексних чисел у показовій формі, то необхідно вміти здійснювати перехід від алгебраїчної форми запису в показову, і навпаки.

У теорії ланцюгів прийнято аргумент комплексного числа $\angle\alpha$ записувати зі значення від 0^{o} до $\pm 180^{o}$. Якщо комплексне число записано в показовій формі $\overline{A}=ae^{\pm j\alpha}$, тоді перехід до алгебраїчної форми запису комплексного числа:

$$a_1=A\cos(\pm\alpha) \qquad 0<\alpha<180^{o}$$
$$a_2=A\sin(\pm\alpha)$$

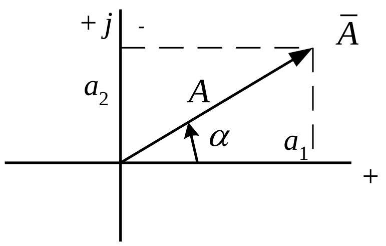
Зворотний перехід $\overline{A}=a_1+ja_2=Ae^{j\alpha}$ пропонується здійснювати, використовуючи наступний алгоритм:

1) знаходимо $\alpha'=arctg\frac{|a_2|}{|a_1|}$,

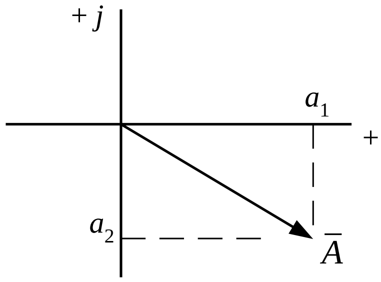
2) визначаємо $A=\frac{|a_2|}{\sin\alpha'}=\frac{|a_1|}{\cos\alpha'}$.

3) Визначаємо дійсний аргумент комплексного числа:

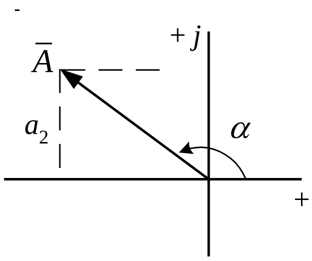
а) якщо $a_1>0$ *та* $a_2>0$, *тоді* $\alpha=\alpha'$ (рис. 4 а);



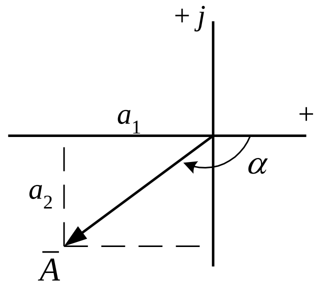
а)



б)



в)



г)

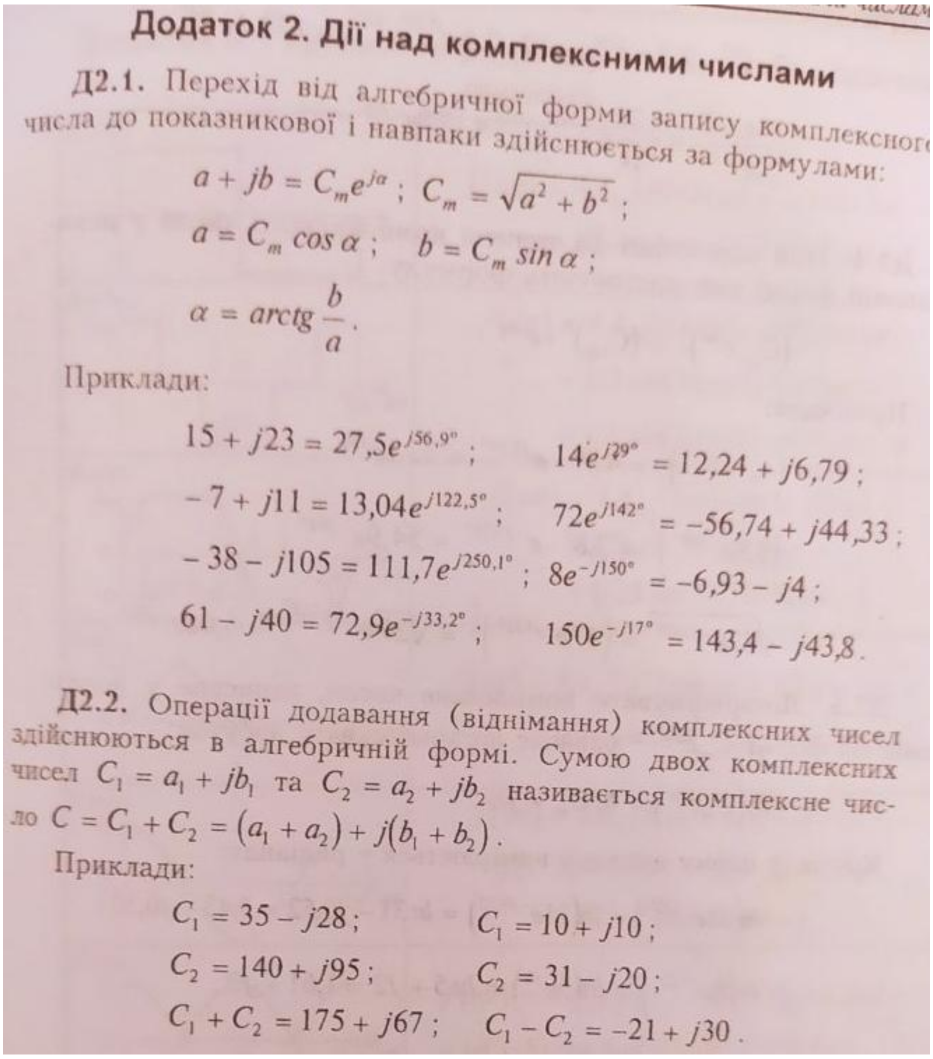
Рис.4

б) якщо $a_1 > 0$, а $a_2 < 0$, (рис. 4 б), тоді $\alpha = -\alpha'$;

в) якщо $a_1 < 0$, а $a_2 > 0$ (рис. 4 в), тоді $\alpha = 180^0 - \alpha'$;

г) якщо $a_1 < 0$ і $a_2 < 0$ (рис. 4 г), тоді $\alpha = -\left(180^0 - \alpha'\right)$.

Приклади перетворення:



Додаток 2. Дії над комплексними числами

Д2.1. Перехід від алгебричної форми запису комплексного числа до показникової і навпаки здійснюється за формулами:

$$a + jb = C_m e^{j\alpha}\ ;\ \ C_m = \sqrt{a^2 + b^2}\ ;$$

$$a = C_m \cos\alpha\ ;\quad b = C_m \sin\alpha\ ;$$

$$\alpha = arctg\frac{b}{a}\ .$$

Приклади:

$$15 + j23 = 27{,}5e^{j56{,}9^\circ}\ ; \qquad 14e^{j29^\circ} = 12{,}24 + j6{,}79\ ;$$

$$-7 + j11 = 13{,}04e^{j122{,}5^\circ}\ ; \qquad 72e^{j142^\circ} = -56{,}74 + j44{,}33\ ;$$

$$-38 - j105 = 111{,}7e^{j250{,}1^\circ}\ ; \qquad 8e^{-j150^\circ} = -6{,}93 - j4\ ;$$

$$61 - j40 = 72{,}9e^{-j33{,}2^\circ}\ ; \qquad 150e^{-j17^\circ} = 143{,}4 - j43{,}8\ .$$

Д2.2. Операції додавання (віднімання) комплексних чисел здійснюються в алгебричній формі. Сумою двох комплексних чисел $C_1 = a_1 + jb_1$ та $C_2 = a_2 + jb_2$ називається комплексне число $C = C_1 + C_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$.

Приклади:

$$C_1 = 35 - j28\ ; \qquad C_1 = 10 + j10\ ;$$

$$C_2 = 140 + j95\ ; \qquad C_2 = 31 - j20\ ;$$

$$C_1 + C_2 = 175 + j67\ ; \qquad C_1 - C_2 = -21 + j30\ .$$

Д2.3. Комплексні числа зручно множити (ділити), використовуючи показникову форму запису. При множенні (діленні) комплексних чисел перемножуються (діляться) модулі та додаються (віднімаються) фази:

$$C_{1m}e^{j\alpha_1} \cdot C_{2m}e^{j\alpha_2} = C_{1m} \cdot C_{2m}e^{j(\alpha_1+\alpha_2)};$$

$$\frac{C_{1m}e^{j\alpha_1}}{C_{2m}e^{j\alpha_2}} = \frac{C_{1m}}{C_{2m}}e^{j(\alpha_1-\alpha_2)}.$$

Приклади:

$$17e^{j31^\circ} \cdot 7{,}2e^{-j13^\circ} = 17 \cdot 7{,}2e^{j(31^\circ-13^\circ)} = 122{,}4e^{j18^\circ};$$

$$\frac{128e^{-j41^\circ}}{7{,}2e^{j15^\circ}} = \frac{128}{7{,}2}e^{j(-41^\circ-15^\circ)} = 17{,}8e^{-j56^\circ}.$$

Д2.4. При піднесенні до степеня комплексного числа у показниковій формі використовують формулу:

$$\left(C_{1m}e^{j\alpha}\right)^n = \left(C_{1m}\right)^n \cdot e^{jn\alpha}.$$

Приклади:

$$\left(4{,}7e^{j15^\circ}\right)^2 = 4{,}7^2 \cdot e^{j2\cdot15^\circ} = 22{,}1e^{j30^\circ};$$

$$\left(3{,}8e^{-j28^\circ}\right)^3 = 3{,}8^3 \cdot e^{-j3\cdot28^\circ} = 54{,}9e^{-j84^\circ};$$

$$\sqrt{37e^{-j142^\circ}} = \left(37e^{-j142^\circ}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{37}e^{-j\frac{1}{2}\cdot142^\circ} = 6{,}08e^{-j71^\circ}.$$

Д2.5. Логарифмувати комплексне число, записане у показниковій формі $C_m e^{j\alpha}$ – означає логарифмувати добуток:

$$ln\left(C_m e^{j\alpha}\right) = ln\,C_m + j\alpha.$$

Кут α у цьому випадку вимірюється у радіанах:

$$ln\left(31e^{-j30^\circ}\right) = ln\left(31e^{-j0{,}52}\right) = ln\,31 - j0{,}52 = 3{,}43 - j0{,}52;$$

$$ln\left(5e^{j115^\circ}\right) = ln\left(5e^{j2}\right) = ln\,5 + j2 = 1{,}61 + j2.$$