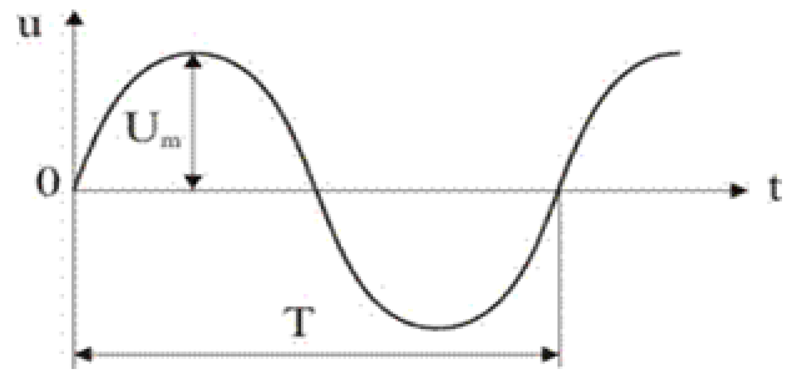
Синусоїдальний струм
Основні поняття та визначення

Коренівська О.Л.

Основні поняття та визначення синусоїдального струму

Змінним називається струм, що змінює свою величину та напрям за 1 період.

Період Т - це проміжок часу, за який струм повністю змінюється, вимірюється в секундах.



$$i(t)=I_m \sin(\omega t+\psi_i),$$

Кількість періодів в одиницю часу, тобто величина зворотна періоду, називаються **частотою** f та вимірюється в герцах Гц. $f=\frac{1}{T}$

В Європі промисловою частотою є частота 50 Гц.

Миттєве значення - значення струму, напруги та ЕРС у довільний момент часу. Миттєві величини позначаються малими латинськими літерами *e*, *u*, *i*, *p*. Миттєвих значень за 1 період безкінечна кількість.

Максимальне значення (амплітудне) - найбільше миттєве значення за період. Максимальні величини позначаються Великими латинськими літерами з індексом m: I_m, U_m, E_m.

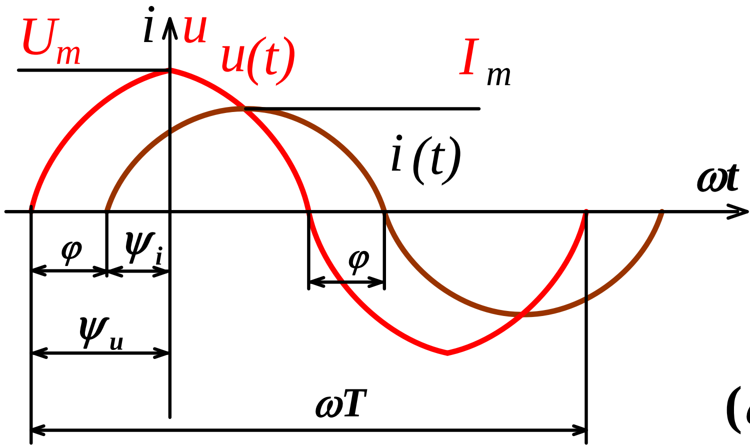
Величину змінного струму, еквівалентну постійному струму та рівною йому чисельно називають **діючим значенням змінного струму**. Діючі значення позначають латинськими буквами без підстрочних індексів: I, U, E.

Діюче значення синусоїдного струму - це його середньоквадратичне значення за період і воно менше за амплітудне у $\sqrt{2}$ раз:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{,}707\, I_m \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \qquad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

На шкалі вимірювальних приладів електромагнітної системи та у технічній документації на устаткування, вказують ці значення струму та наруги.

У змінному струмі ***i(t)*** (напрузі ***u(t)***), величина періодично змінюється в часі за довільним законом



$$i(t)=I_m \sin(\omega t+\psi_i),$$

$$u(t)=U_m \sin(\omega t+\psi_u)$$

$$e(t)=E_m \sin(\omega t+\psi_e)$$

$u(t)$, $i(t)$ або u, i – миттєві значення функцій,

U_m, I_m – амплітудні (максимальні) значення

$(\omega t+\psi)$ – фаза, що визначається в момент часу

ψ_u, ψ_i – початкові фази функцій, що визначають їх значення в момент $t=0$, залежать від вибору початку відліку часу

$\varphi = \psi_u - \psi_i$ – кут зсуву фаз (різниця початкових фаз) між напругою і струмом, не залежить від вибору початку відліку часу

Фаза синусоїдального струму з часом безперервно зростає, збільшуючись протягом періоду на величину 2π.

$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ [c^{-1}] або [рад/с] – кутова частота – показує швидкість з якою змінюється фаза

$$i(t)=I_m \sin(2\pi t/T+\psi_i),$$

Гармонійні функції є найпростішими періодичними функціями і наділені наступними важливими для теорії ланцюгів властивостями:

1) додавання (віднімання) синусоїдальних функцій дає синусоїдальну функцію тієї ж частоти:

$$\sum A_{mк} \cos(\omega t + \alpha_{к}) = A_m \cos(\omega t + \alpha);$$

2) диференціювання та інтегрування гармонійних функцій (вироблене елементами L і C) дають також гармонійні функції тієї ж частоти.

$$\frac{dA_m cos(\omega t + \alpha)}{dt} = \omega A_m \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\int A_m \cos(\omega t + \alpha)\,dt = \frac{A_m}{\omega} \cos\left(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

Наслідком цих властивостей є те, що вид функції вимушеної складової струмів гілок (реакція ланцюга) відомий.

$$i = I_m \cos(\omega t + \alpha_i),$$

а реакція ланцюга (див. властивості 1 і 2) виражається в зміні амплітуди і початкової фази сигналу, причому, як випливає з приведених вище співвідношень, ступінь зміни залежить від частоти прикладеного сигналу.

Тому повний аналіз усталеного гармонійного режиму полягає у визначенні залежностей амплітуди та початкової фази реакції від частоти. Ці залежності називаються частотними характеристиками ланцюга.

При $\omega = const$ задача аналізу усталеного режиму полягає у визначенні двох параметрів: амплітуди та початкової фази реакції.

Середнє і дійсне значення змінного струму і напруги

Середнє значення $F_{ср}$ довільної функції часу $f(t)$ за інтервал часу T визначається за формулою

$$F_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot dt$$

Для змінного синусоїдального струму (напруги) середнє значення визначають за половину періоду (T/2) між двома нульовими значеннями

$$I_{cp} = \frac{1}{\frac{T}{2}}\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin\omega t\cdot dt = \frac{2I_m}{\omega T}\int_0^{\pi} \sin\omega t\cdot d(\omega t) = \frac{2I_m}{\frac{2\pi\cdot T}{T}}\left|-\cos\omega t\right|_0^{\pi} \approx \frac{2I_m}{\pi} \approx 0{,}637\cdot I_m$$

$$E_{сер} = \frac{2E_m}{\pi} \quad U_{сер} = \frac{2U_m}{\pi}$$

Діючі значення визначаюься як середньоквадратичне значення функції за період

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2\omega t\cdot dt} = \sqrt{\frac{I^2{}_m}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)dt} = \sqrt{\frac{I^2{}_m}{T}\cdot\frac{1}{2}T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\cdot I_m$$

В електроенергетиці прийнято всі теоретичні розрахунки та експериментальні вимірювання виконувати для діючих значень струмів і напруг.

Енергія змінного струму

$$W = \int_0^T Ri^2 dt$$

Потужність змінного струму

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2 dt = RI^2$$

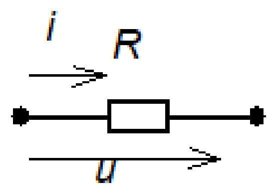
Змінний струм в однорідних ідеальних елементах
Коло з ідеальним резистором *R*

Нехай до кола з резистором *R* прикладена змінна напруга: $u(t)=U_m sin(\omega t+\psi_u)$

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} sin(\omega t + \psi) = I_m sin(\omega t + \psi).$$

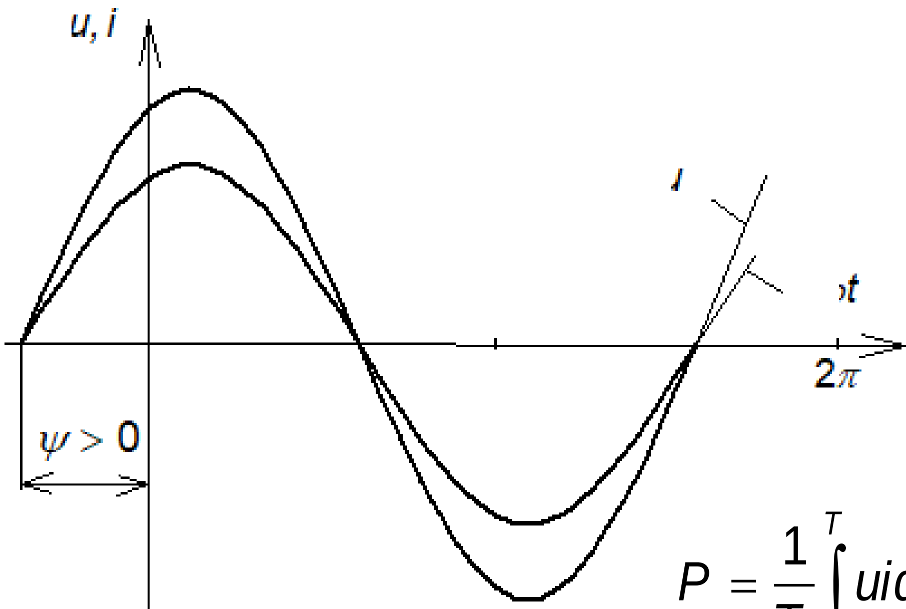
Таким чином, закон Ома зв'язує між собою миттєві, амплітудні та діючі значення струму та напруги:

$$i = \frac{u}{R};\ I_m = \frac{U_m}{R};\ I = \frac{U}{R}. \qquad (2.5)$$



Кут зсуву фаз між напругою й струмом, дорівнює нулю - в колі з резистором ***R*** струм і напруга збігаються за фазою

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 0 = 0$$



Миттєва потужність у колі з резистором ***R*** завжди додатна

$$p = ui = U_m sin\omega t \cdot I_m sin\omega t = U_m I_m sin^2 \omega t \geq 0$$

Середнє значення миттєвої потужності за період в колах змінного струму називають ***активною потужністю***

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T uidt = \frac{1}{T}\int_0^T [UI - UI\ cos(2\omega t + 2\psi)]dt = UI = I^2R$$

Коло з ідеальною котушкою *L*

Нехай до кола з ідеальною котушкою L прикладена змінна напруга $u(t)=U_m sin(\omega t+\psi_u)$

Струм та напруга на затискачах котушки пов'язані між собою законом електромагнітної індукції

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt} \qquad u_L = -e = L\frac{di}{dt}$$

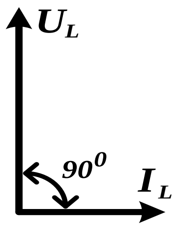
$$i = \frac{1}{L}\int u_L \cdot dt = \frac{U_m}{L}\int sin\omega t \cdot dt = \frac{U_m}{\omega L}(-cos\,\omega t) = I_m\,sin(\omega t - 90^o) \Leftrightarrow \dot{I} = Ie^{-j90^o}$$

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \omega L I_m\,sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= U_m\,sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) = U_m\,sin(\omega t + \psi_u),$$

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-90^0) = 90^0$$ кут зсуву фаз **90^0**.

Рівняння закону Ома для амплітудних та дійсних значень функцій



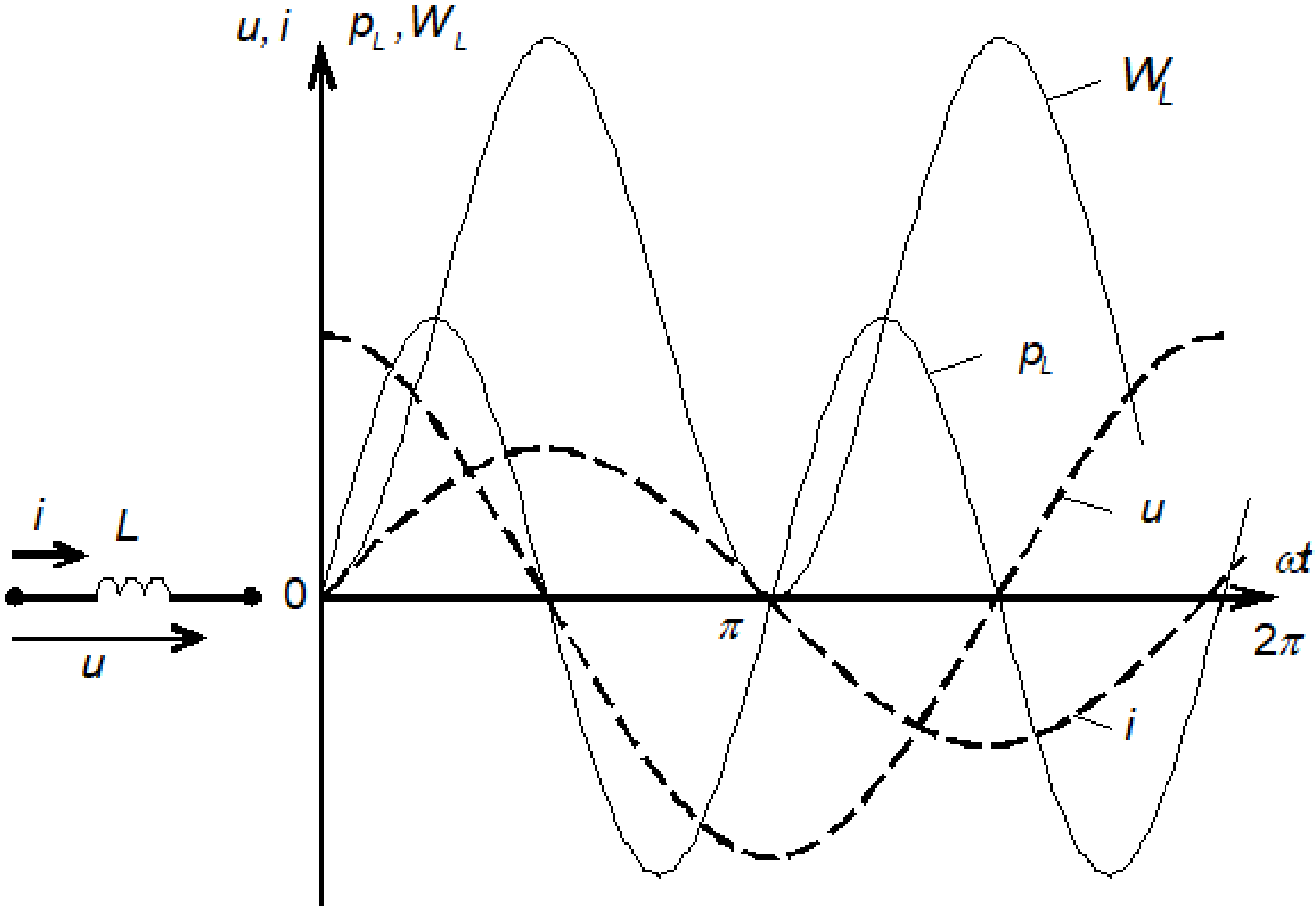
$$I_m = \frac{U_m}{X_L},\ I = \frac{U}{X_L}$$

У колі з котушкою *L* струм відстає від напруги (напруга випереджає струм) на 90^0

Коли струм проходить через нуль, напруга на індуктивності досягає максимального (додатного чи від'ємного) значення, оскільки швидкість зміни струму при його проходженні через нуль максимальна. У колах постійного струму при $I = const$, $dI/dt = 0$ і, як наслідок, u_L дорівнює нулеві.

По-друге, добуток ωL (має розмірність опору) – це опір індуктивного елемента при частоті струму ω. Його позначають X_L і називають ***реактивним опором*** індуктивності:

$$X_L = \omega L.$$



u, i
p_L, W_L
W_L
p_L
u
i
ωt
0
π
2π
i
L
u

Розглянемо миттєву потужність, що поступає до індуктивності:

$$p_L = ui = U_m I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \frac{U_m I_m}{2} 2\cos(\omega t + \psi_i)\sin(\omega t + \psi_i) =$$

$$= UI \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

Миттєва потужність має амплітуду UI та коливається з подвійною частотою (рис. 2.4, *б*). Вона більша нуля для інтервалів часу, коли одночасно $i > 0$ та $u_L > 0$ або $i < 0$ та $u_L < 0$, в противному разі потужність від'ємна. Середнє значення миттєвої потужності за період (активна потужність P) дорівнює нулеві.

Енергія магнітного поля, що накопичується в індуктивності:

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}\sin^2(\omega t + \psi_i) =$$

$$= \frac{LI^2}{2}\left(1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)\right).$$

Вона змінюється в часі з подвійною частотою в межах від 0 до $LI^2/2$, досягаючи максимального значення при амплітудному значенні струму та зменшуючись до нуля при $i = 0$ (рис. 2.4, *б*). При $p_L > 0$ енергія забирається від джерела та запасається у магнітному полі котушки, при $p_L < 0$ енергія магнітного поля повертається назад до джерела. Так відбувається коливання енергії між джерелом та індуктивністю.

Коло з ідеальним конденсатором *C*

Нехай до кола з ідеальним конденсатором ***C*** прикладена змінна напруга $u(t)=U_m sin(\omega t+\psi_u)$

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi_u) = I_m \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right), \qquad I_m = \omega C \cdot U_m$$

Рівняння закону Ома для амплітудних та дійсних значень функцій $I_m = \frac{U_m}{X_C}, I = \frac{U}{X_C}$

Комплексний опір конденсатора є суто уявним і від'ємним

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ – ємнісний реактивний опір

Миттєва потужність кола змінюється за синусоїдальним законом з частотою 2ω:

Миттєва потужність, що надходить до ємності:

$$p_{Ñ} = ui = U_m I_m \sin(\omega t + \psi_u)\sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right) = UI \sin 2(\omega t + \psi_u).$$

Вона змінюється за таким само законом, як і для індуктивного елемента.

$$p = U_m \sin\omega t \cdot I_m \sin(\omega t + 90^o) = \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t$$

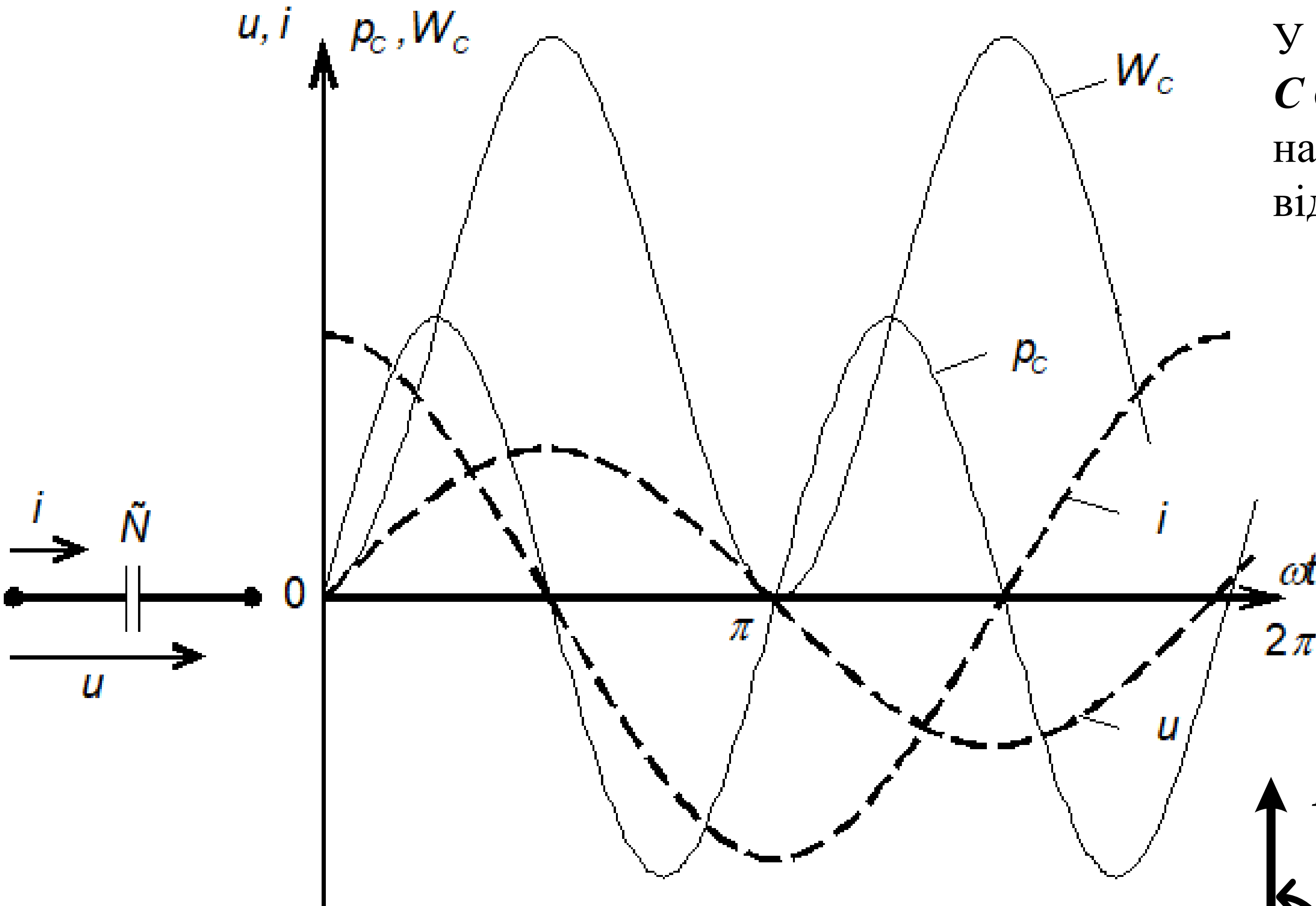
Енергія електричного поля ємності:

$$W_{Ñ} = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}\sin^2(\omega t + \psi_u) = \frac{CU^2}{2}\left(1 - \cos 2(\omega t + \psi_u)\right)$$

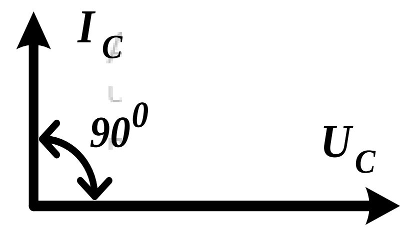
змінюється періодично з частотою 2ω у межах від 0 до $CU^2/2$.

Надходячи від джерела, енергія запасається в електричному колі ємності, а потім знову повертається до джерела.

Таким чином, як і в випадку індуктивності, відбувається коливання енергії між джерелом та ємністю.



У колі з конденсатором ***C*** струм випереджає напругу (напруга відстає від струму)



$\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90^0 = -90^0$ Кут зсуву фаз **90⁰**

Таким чином, як випливає з формули, ***струм через ємність випереджає за початковою фазою напругу*** u_C ***на кут*** $\pi/2$, тобто, при максимальних (додатних чи від'ємних) значеннях напруги u_C, а значить і заряду q, струм i дорівнює нулеві.

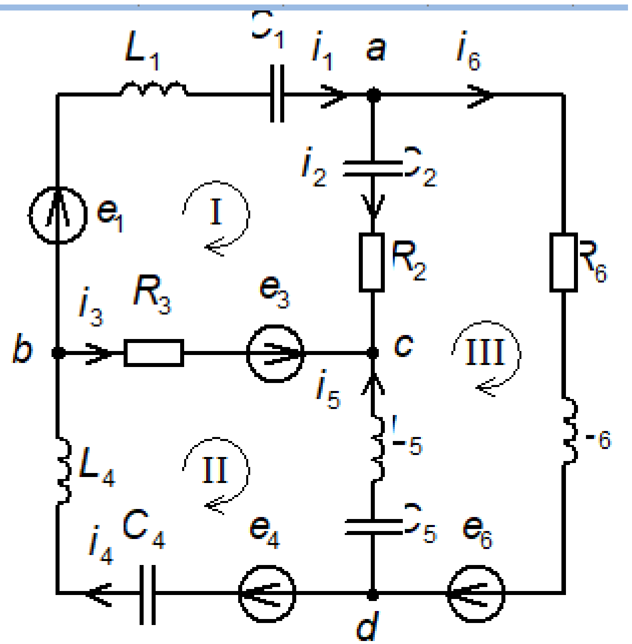
Закони Кірхгофа в диференційній формі

Зв'язок між струмами та напругами в електричних колах синусоїдного (як і в колах постійного) струму визначається законами Кірхгофа. Для складання рівнянь за законами Кірхгофа довільно вибирають додатні напрями миттєвих значень струмів у вітках та додатні напрями обходу незалежних контурів.

Перший закон Кірхгофа формулюється так: алгебрична сума миттєвих значень струмів віток, що сходяться у вузлі електричного кола, дорівнює нулеві.

Другий закон Кірхгофа: алгебрична сума миттєвих значень падінь напруг у замкненому контурі дорівнює алгебричній сумі миттєвих значень ЕРС у цьому контурі.

Правила знаків залишаються такими самими, як і для кіл постійного струму.



вузол a: $i_1 - i_2 - i_6 = 0$;

вузол b: $i_4 - i_1 - i_3 = 0$;

вузол c: $i_2 + i_3 + i_5 = 0$.

Контур I: $L_1 \dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{1}{C_1}\int i_1 dt + \dfrac{1}{C_2}\int i_2 dt + i_2 R_2 - i_3 R_3 = e_1 - e_3$;

контур II: $i_3 R_3 - L_5 \dfrac{di_5}{dt} - \dfrac{1}{C_5}\int i_5 dt + \dfrac{1}{C_4}\int i_4 dt + L_4 \dfrac{di_4}{dt} = e_3 + e_4$;

контур III: $i_6 R_6 + L_6 \dfrac{di_6}{dt} + \dfrac{1}{C_5}\int i_5 dt + L_5 \dfrac{di_5}{dt} - i_2 R_2 - \dfrac{1}{C_2}\int i_2 dt = e_6$.