ЛЕКЦІЯ 7-8.
ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

1. Постановка задачі

Параметрична оптимізація зводиться до вибору параметрів компонентів об'єкта при відомій його структурі.

Постановка задачі оптимізації має сенс лише тоді, коли з'являється необхідність вибору одного варіанта з декількох. Остаточний вибір проводиться з урахуванням розроблених правил вибору на основі встановлених критеріїв. Вибір критерію є важливим етапом постановки задачі оптимізації. В основі правил вибору лежить цільова функція, яка кількісно виражає якість об'єкта.

Вибір цільової функції носить суб'єктивний характер, тому об'єкт може бути оптимальним тільки з точки зору даного критерію.

В більшості випадків прийнято орієнтуватися на еталонні зразки, на думку ведучих вчених (експертні оцінки) та на техніко-економічні показники технічного завдання.

Якість функціонування будь-якої системи характеризується множиною вихідних параметрів $Y(y_1, y_2,...y_k)$. До них можна додати і вартість системи.

Типове технічне завдання включає в собі конкретні числові вимоги до основних вихідних параметрів, а також конкретні числові дані, які характеризують зовнішнє середовище.

Необхідні співвідношення між вихідними параметрами та технічними вимогами ТВ_i називають умовами придатності до роботи:

$y_i \le \text{ТВ}_i$;

$y_i > \text{ТВ}_i$;

$y_i = \text{ТВ}_i \pm \Delta y$.

Обґрунтований висновок про те, наскільки вдалим є те чи інше рішення, можна зробити лише після того, як визначені всі внутрішні параметри, побудована модель об'єкта і виконані розрахунки по визначенню вихідних параметрів та умов придатності до роботи.

Значення деяких внутрішніх параметрів призначаються і не можуть бути змінені. Це параметри уніфікованих компонентів або ті з них, значення яких обумовлені технічним завданням. Внутрішні параметри, значення яких можна змінювати, називаються управляючими параметрами.

Після визначення вихідних параметрів може статися, що умови технічного завдання не виконуються і необхідно провести повторний вибір внутрішніх параметрів. Враховуючи велику вартість аналізу, необхідно організувати цілеспрямований пошук значень цих параметрів, щоб отримати найкраще виконання заданих умов найбільш економічним чином. Параметрична оптимізація і повинна вирішувати ці задачі.

Початкове формулювання задачі оптимізації носить, як правило, словесний опис. Проблеми оптимізації мають два основних аспекти:

1) необхідно поставити задачу, формалізувавши поняття "оптимальний";

2) вирішити задачу, яка має математичну форму.

В будь-якому випадку необхідні такі етапи:

1) вибір цільової функції та управляючих параметрів;

2) призначення обмежень;

3) нормування управляючих та вихідних параметрів.

Основна проблема постановки екстремальних задач полягає в формулюванні цільової функції. Складність її вибору полягає в тому, що будь-який технічний об'єкт має векторний характер критеріїв оптимальності, причому покращання одних параметрів може погіршити інші, тому що всі вихідні параметри залежать від одних і тих же управляючих параметрів. Такі параметри називаються конфліктними. В той же час цільова функція повинна бути одна. Зведення задачі з багатьма критеріями до задачі з одним називається згорткою векторного критерію.

2. Вибір цільової функції

В залежності від того, яким чином вибирають і об'єднують вихідні параметри, розрізняють такі типи критеріїв:

1. Часткові критерії, які застосовують тоді, коли серед вихідних параметрів можна виділити один основний параметр, який в найбільшій мірі відображає ефективність роботи об'єкта. Цей параметр і приймають за цільову функцію. Прикладом таких параметрів може бути потужність споживання, вантажопідйомність, вага, а також вартість. Решту вихідних параметрів відносять до обмежень. Перевагою такого підходу до вибору критерію є простота. Недоліком є те, що великий запас по одному критерію може не забезпечити необхідної придатності до роботи по іншим параметрам.

2. Виважений адитивний критерій застосовують тоді, коли умови придатності до роботи дозволяють виділити дві групи вихідних параметрів. В першу групу входять параметри, значення яких повинно бути максимальним (Y^+) – продуктивність, завадостійкість тощо. В другу групу входять параметри, значення яким повинно бути мінімальним (Y^-) – витрати палива, енергія споживання, вага тощо. Тоді згортка векторного критерію має вигляд:

$$F(X)=\sum_{j=1}^{g}a_jY^-(X)-\sum_{j=g+1}^{m}b_jY^+(X), \qquad (1)$$

де $a_j > 0$, $b_j > 0$ – вагові коефіцієнти, які визначають важливість цього параметру.

3. Мультиплікативний критерій застосовують тоді, коли відсутні умови придатності до роботи типу рівностей і вихідні параметри не можуть мати нульового значення. В цьому випадку цільова функція має вигляд:

$$F(X)=\frac{\prod_{j=1}^{g}Y_j^-(X)}{\prod_{j=g+1}^{m}Y_j^+(X)}. \qquad (2)$$

Недоліком критерію 2 та 3 є те, що вони не враховують технічні умови до вихідних параметрів.

4. Критерій форми функції застосовують тоді, коли ставиться задача найкращого наближення заданої (еталонної) характеристики $Y_{\text{ТВ}}(X, \omega)$ з дійсною вихідною характеристикою $Y(X, \omega)$, де ω – деяка змінна (частота, час тощо). Такі задачі виникають в системах автоматичного регулювання, які повинні забезпечити необхідний вигляд перехідного процесу, в задачах пошуку параметрів пересічення балки тощо.

Безперервні характеристики замінюються кінцевою множиною вузлових точок та вибору однієї з наступних цільових функцій:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{p} a_j \left| Y(X,\omega) - Y_{TB}(X,\omega) \right|;$$

$$F(X) = \max(a_j) \left| Y(X,\omega) - Y_{TB}(X,\omega) \right|; \qquad (3)$$

$$F(X) = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} a_j \left[\left| Y(X,\omega) - Y_{TB}(X,\omega) \right| \right]^2},$$

де p – кількість вузлових точок.

a_j – вузловий коефіцієнт, значення якого повинно бути тим більшим, чим менше відхилення необхідно мати в цій точці.

5. Мінімаксні критерії дозволяють досягти однієї з цілей оптимізації проектування – найкращого задоволення умов придатності до роботи.

Можна ввести кількісну оцінку умов придатності до роботи, позначивши її через Z_j, і назвавши її запасом придатності до роботи:

$$Z_j = a_j \left(\frac{\text{ТВ}_j - Y_j^H}{\delta_j} - 1 \right), \qquad (4)$$

де a_j – ваговий коефіцієнт;

δ_j – відхилення відповідного параметру.

Обмеження об’єктивно з’являються при проектуванні технічних об’єктів і випливають з фізичної та технологічної реалізації параметрів внутрішніх компонентів.

Розрізняють прямі та функціональні обмеження. Перші мають вигляд:

$X_{\text{ін}} \le X_{\text{і}} \le X_{\text{ів}}$.

Функціональні обмеження являють собою параметри, які не входять в цільову функцію. Вони можуть мати вигляд:

$\varphi\,(x) \le 0;$

$\varphi\,(x) \ge 0.$

Обмеження утворюють допустиму область пошуку X_D. Будь-яка точка $X \in X_D$ є допустимим рішенням задачі оптимізації.

Простір управляючих параметрів є метричним простором. Для рішення задачі необхідно їх нормувати, щоб оперувати безрозмірними величинами.

Можливі різні способи нормування. Найчастіше застосовують логарифмічне нормування:

$$X_i = \lg\left(\frac{x_i}{\varepsilon_i}\right), \qquad (5)$$

де ε_i – коефіцієнт, який чисельно дорівнює одиниці вимірювання параметра.

Нормування можна виконати і за формулою (4.5).

Математично задача оптимізації зводиться до пошуку екстремуму цільової функції при заданих обмеженнях.

3. Методи пошуку екстремуму

В САПР рішення задачі оптимізації проводиться за допомогою пошукових методів математичного програмування, які використовують попередню інформацію, тобто ці методи є ітераційними методами.

Більшість задач параметричної оптимізації технічних об’єктів зводяться до задач нелінійного програмування, тобто цільова функція або обмеження описуються нелінійними залежностями. В окремих випадках ці задачі мають лінійний характер, і тоді задача зводиться до задачі лінійного програмування.

В залежності від типу екстремуму розрізняють методи локальної або глобальної, умовної або безумовної оптимізації. Практичні методи є, як правило, методами локального пошуку.

Надійні і водночас економічні методи пошуку глобального екстремуму в наш час невідомі. Надійним, але дуже неекономічним методом глобального пошуку, є метод сканування. При його застосуванні область визначення цільової функції розбивається на *k*-областей, в центрі яких визначається значення функції. Якщо функція залежить від *n* параметрів, то необхідно виконати K^n варіантів розрахунків, що нереально навіть для сучасних комп’ютерів, тому що область пошуку повинна бути малою (число *k* – велике).

Найбільшу групу складають методи безумовної оптимізації. В залежності від порядку похідних, які використовуються в них, ці методи розподіляють на методи першого та другого порядків.

В залежності від кількості управляючих параметрів в цільовій функції розрізняють методи одномірного та багатомірного пошуку. Останні складаються з множини кроків першого.

Практично всі методи оптимізації будують таку послідовність значень X_0, X_1, ...X_n, при якій $F(X_0) > F(X_1) > ..F(X_n)$ або $F(X_0) < F(X_1) <...F(X_n)$. У цьому випадку метод забезпечує збіжність і можна чекати, що екстремум буде знайдено.

Важливою характеристикою методів оптимізації є швидкість збіжності, яка залежить від вигляду цільової функції та вибору початкової точки.

4. Методи одновимірного пошуку

Ці методи виходять з того, що цільова функція є унімодальною (має один екстремум) на заданому інтервалі *ab*. Вважається, що на цьому відрізку функцію можна вичислити.

Методи одномірного пошуку можна розбити на послідовні та методи, які використовують апроксимацію функції.

Методи послідовного пошуку застосовують стратегію, при якій будь-яка пара обчислень звужує область пошуку. Знаходячи $F(X)$ в точках X_1 та X_2, таких що $a < X_1 < X_2 < b$ (при пошуку мінімуму), маємо:

якщо $F(X_1) < F(X_2)$ то $X^* \in a, X_1$;

якщо $F(X_1) = F(X_2)$ то $X^* \in X_1, X_2$;

якщо $F(X_1) > F(X_2)$ то $X^* \in X_2, b$.

Стратегія вибору X_1 та X_2 визначає суть різних методів послідовного пошуку.

Метод дихотомії є одним з найпростіших методів, при якому аргументи X_{1k} та X_{2k} вибираються на відрізку $\delta/2$ як праворуч, так і ліворуч інтервалу:

$$X_{1k} = \frac{a_k + b_k}{2} - \frac{\delta}{2}; \tag{6}$$

$$X_{2k} = \frac{a_k + b_k}{2} + \frac{\delta}{2}, \tag{7}$$

де δ – константа, яка визначає крок пошуку.

якщо $F(X_{1k}) < F(X_{2k})$ то $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = X_{2k}$,;

якщо $F(X_{1k}) = F(X_{2k})$ то $a_{k+1} = X_{1k}$; $b_{k+1} = X_{2k}$;

якщо $F(X_{1k}) > F(X_{2k})$ то $a_{k+1} = X_{1k}$; $b_{k+1} = b_k$.

Після n-кроків екстремум буде знаходитися в інтервалі:

$$l(n) = (b-a)\left[2^{-\frac{n}{2}} + (1 - 2^{-\frac{n}{2}})\delta\right]. \tag{8}$$

Цей інтервал можна застосувати для оцінки припинення пошуку.

Різновидністю цього алгоритму є алгоритм, за яким початкова точка знаходиться за правилом:

$$X_0 = \frac{b-a}{2}.$$

Наступна точка вибирається за таким же правилом, що й раніше:

якщо $F(b) < F(X_o)$ то $a_{k+1} = X_0$;

якщо $F(b) > F(X_0)$ то $b_{k+1} = X_0$;

Серед методів, що використовують апроксимацію функцій, найчастіше застосовують метод квадратичної інтерполяції. Алгоритм цього методу складається з таких кроків:

1. Знаходження $F(X)$ в точці X_0.
2. Призначення кроку h. Якщо $F(X+h) < F(X)$, то перехід до п.3. Інакше $h = -h$ і перехід до п.2
3. Якщо $F(X_{k+1}) \le F(X_k)$, то $h = 2h$ і перехід до п. 3. Якщо $F(X_{k+1}) > F(X_k)$, то $X_{k+1} = X_k$, $X_k = X_{k-1}$, $h = h/2$ і перехід до п.3 останній раз.

4. З чотирьох значень X_{k+1}, X_k, X_{k-1}, X_{k-2} виключається або X_{k-2}, або $X_{k=1}$, в залежності від

того, яке з них знаходиться далі від X_i, в якій $F(X_i)$ має найменше значення. З решти трьох точок визначаємо X^*:

$$X^* = X_k + \frac{h\left[F(X_{k-1}) - F(X_{k+1})\right]}{2\left[F(X_{k+1}) - 2F(X_{k-1})\right]}. \tag{9}$$

5. Лінійне програмування

В цьому класі задач показник якості виражається лінійно через параметри об’єкта, а умови, яким повинні задовольняти параметри, описуються у вигляді нерівностей.

Математично задачу лінійного програмування описують таким чином: знайти такі значення змінних $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$, які задовольняють системі обмежень:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} X_i R_j b_j, \quad j = 1, 2, \ldots m, \tag{10}$$

при яких має мінімум (максимум) цільова функція:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{11}$$

де R_j – один із знаків “=”, “≥” або “≤”.

Змінивши знаки на протилежні в обох частинах нерівностей типу “≥” і вводячи додаткові змінні $Y_i \geq 0$ (які не входять до цільової функції), можна систему обмежень звести до канонічного вигляду:

$$Y_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i = b_j. \tag{12}$$

Будь-який упорядкований набір значень змінних $X = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, який задовольняє системі обмежень (12), називається допустимим планом задачі. План $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$, який відповідає екстремуму цільової функції, називається оптимальним планом або рішенням задачі.

Очевидно, що задачу максимізації функції можна звести до задачі мінімізації і навпаки, якщо замість $F(X)$ взяти функцію $[-F(X)]$.

Для рішення задач лінійного програмування найбільш ефективним є симплекс - метод. Симплексом називається регулярний багатогранник в n-мірному просторі, утворений площинами або лініями обмежень. Рішення задачі знаходиться в одній з вершин цього багатогранника. Таке геометричне уявлення можливе при $i = 2$, а при більшій кількості обмежень застосовують аналітичні методи рішення.

Існує декілька модифікацій симплекс-методу. Один з них заснований на жорданових виключеннях.

Нехай маємо лінійну цільову функцію типу:

$$F(X) = C_1X_1 + C_2X_2 + ...C_nX_n. \tag{13}$$

Необхідно знайти її оптимальне значення при обмеженнях:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_i \geq b_j, \tag{14}$$

$x_i \geq 0.$

Переходячи від нерівностей до рівнянь, отримаємо:

$$Y_i - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_i = b_j, \tag{15}$$

$x_i \geq 0,$

$y_i \geq 0.$

Формули (13 ÷15) зобразимо у вигляді симплекс-таблиці (табл. 1).

Таблиця 1

	X_1	X_2	X_S	X_n	b_j
Y_1	a_{11}	a_{12}	a_{1s}	a_{1n}	b_1
Y_2	a_{21}	a_{22}	a_{2s}	a_{2n}	b_2
Y_r	a_{r1}	a_{r2}	a_{rs}	a_{rn}	b_r
Y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{ms}	a_{mn}	b_m
$F(X)$	$-C_1$	$-C_2$	$-C_s$	$-C_n$	0

Опорне рішення буде тоді, коли всі $b_j \geq 0$. Якщо ж в стовпчику вільних членів є хоч один від'ємний елемент, то отримана таблиця не відповідає опорному плану. В цьому випадку необхідно проаналізувати всі елементи рядка, для якого вільний член має від'ємне значення. Може мати місце три варіанти:

1. В рядку коефіцієнтів всі елементи більші за нуль. Така задача не має рішення.
2. В рядку коефіцієнтів є один від'ємний елемент, який і вибирається як вирішальний.
3. В рядку коефіцієнтів є декілька від'ємних елементів. Вибирається той з них, для якого відношення $b_j/a_{ij} \geq 0$ і є найменшим.

Нехай таким елементом в симплекс-таблиці буде елемент a_{rs}. Нова таблиця утворюється таким чином:

1. Змінні y_r та x_s міняються місцями.
2. На місце вирішального елемента ставиться одиниця.
3. Всі елементи вирішального рядка (крім вирішального елемента) зберігають свої значення.
4. Всі елементи вирішального стовпчика (крім вирішального елемента) змінюють знаки на протилежний.
5. Решта елементів таблиці перераховуються за формулою:

$$f_{ij} = a_{ij}a_{rs} - a_{js}a_{ri}. \tag{16}$$

6. Всі елементи таблиці необхідно поділити на a_{rs}.

Такі жорданові перетворення проводяться доки не отримаємо опорного рішення. Після цього можна перейти до пошуку оптимального рішення.

При пошуку максимуму діємо таким чином: необхідно добитися, щоб усі $C_i \geq 0$. Вирішальним буде стовпчик, у якому C_i найбільше по абсолютній величині і є від'ємним. Вирішальний елемент вибирається за найменшим співвідношенням $\frac{b_j}{a_{ij}} \geq 0$.

При пошуку мінімуму необхідно добитися, щоб усі $C_i \leq 0$. Вирішальний стовпчик визначається по найменшому за абсолютною величиною від'ємного C_i. Вирішальний елемент визначається так, як і для попереднього випадку.

Нехай необхідно знайти максимум функції:

$F(X) = -3X_1 + 4X_2$ при обмеженнях:

$X_1 - 2X_2 + 18 \geq 0;$

$X_1 + 2X_2 - 9 \geq 0;$

$-X_1 + X_2 + 3 \geq 0;$

$-3X_1 - X_2 + 45 \geq 0;$

$X_1, X_2 \geq 0.$

Перейдемо від нерівностей до рівнянь:

$Y_1 - X_1 + 2X_2 = 18;$

$Y_2 - X_1 - 2X_2 = -9;$

$Y_3 + X_1 + X_2 = 3;$

$Y_4 + 3X_1 + X_2 = 45.$

Симплекс-таблиця має вигляд згідно табл. 2.

Елемент $b_2 < 0$, тому ця таблиця не є опорним планом. Вирішальним елементом буде елемент a_{22}. Нова симплекс-таблиця має вигляд згідно табл. 3.

Таблиця 2

	X_1	X_2	b_j
Y_1	-1	2	18
Y_2	-1	-2	-9
Y_3	1	-1	3
Y_4	3	1	45
$F(X)$	3	-4	0

Таблиця 3

	X_1	Y_2	b_j
Y_1	-2	1	9
X_2	-1/2	-1/2	9/2

Y_3	3/2	-1/2	15/2
Y_4	5/2	1/2	81/2
$F(X)$	5	-2	18

В цій таблиці всі $b_j > 0$. Для пошуку максимуму необхідно, щоб всі $C_i \geq 0$. Тому що $C_2 < 0$, вибираємо як вирішальний другий стовпчик. Вирішальним елементом буде елемент a_{12}. Нова симплекс-таблиця має вигляд згідно табл. 4.

Таблиця 4

	X_1	Y_1	b_j
Y_2	-2	1	9
X_2	-1/2	1/2	9
Y_3	-1/2	1/2	12
Y_4	9/4	1/2	36
$F(X)$	1	2	36

З таблиці маємо: $X_1 = 0$; $X_2 = 9$; $F(X) = 36$

6. Цілочислене програмування

Особливе місце в оптимізації займають задачі, в яких всі або частина змінних повинна бути цілими числами. Такі вимоги накладають додаткові обмеження, внаслідок чого ці задачі стають нерегулярними.

В загальному випадку такі задачі аналогічні іншим задачам оптимізації і необхідно знайти вектор невідомих, який відповідає оптимуму цільової функції при заданих обмеженнях. Інколи на змінні накладають умови дискретності значень, не обов'язково цілочисельних. Нормуванням або спеціальним перетворенням ці дискретні значення можна звести до цілочисельних.

Методи рішення задач цілочисельного програмування розподіляють на чотири групи: метод відсічення, комбінаторні методи, наближенні та спеціальні методи.

Основна ідея методу відсічення полягає в послідовному додаванні до початкової задачі лінійних обмежень, яким відповідають всі рішення з цілими числами. При цьому приходимо до вирішення послідовності задач лінійного програмування.

В комбінаторних методах рішення задачі зводиться до направленого перебору варіантів рішення.

Наближені методи застосовують при вирішенні задач великої розмірності, для яких точні методи мало ефективні.

Метод відсічення має два варіанти в залежності від кількості змінних, які повинні бути цілими числами.

Якщо всі змінні повинні бути цілими числами, то застосовують перший алгоритм Гоморі, який зводиться до наступного:

1. Симплекс-методом знаходять рішення задачі без урахування вимог цілочисельності.

2. Серед усіх нецілочисельних рішень знаходимо елемент з найбільшою дрібною частиною.

3. Представимо цей елемент та елементи даного рядка у вигляді:

$$d_j = \lfloor d_j \rfloor + \{d_j\};$$

$$f_{ij} = \lfloor f_{ij} \rfloor + \{f_{ij}\}, \qquad (17)$$

де в квадратних дужках позначена ціла частина, а в фігурних дужках – дробна частина елементів. Тоді додаткове рівняння має вигляд:

$$S_j = -\{d_j\} + \sum_{i=1}^{n} \{f_{ij}\} Y_i . \qquad (18)$$

Це рівняння підставляють в симплекс-таблицю, яку знову перераховують. Якщо нові значення змінних не стали цілими числами, процедуру повторюють ще раз.

Нехай необхідно знайти максимум функції $F(X) = X_1 + 2X_2$ при обмеженнях:

$X_1 + 7X_2 \le 31;$

$9X_1 - 5X_2 \le 22;$

$X_1 + X_2 \le 8;$

X_1, X_2 – цілі числа.

Перейдемо від нерівностей до рівнянь:

$Y_1 + X_1 + 7X_2 = 31;$

$Y_2 + 9X_1 - 5X_2 = 22;$

$Y_3 + X_1 + X_2 = 8.$

Вирішимо задачу без урахування вимог цілочисельності змінних. Симплекс-таблиця має вигляд згідно табл. 5.

Таблиця 5

	X_1	X_2	b_j
Y_1	1	7	31
Y_2	9	-5	22
Y_3	1	1	8
$F(X)$	-1	-2	0

Всі $b_j > 0$, тому маємо опорний план. Для пошуку максимуму виберемо стовпчик X_2 як вирішальний. Вирішальним елементом в ньому буде елемент a_{12}. Нова симплекс-таблиця має вигляд згідно табл. 6.

Таблиця 6

	X_1	Y_1	Y
X_2	1/7	1/7	31/7
Y_2	68/7	5/7	309/7
Y_3	6/7	-1/7	25/7
$F(X)$	-5/7	2/7	62/7

Вирішальним стовпчиком буде стовпчик X_1, а вирішальним елементом в ньому – елемент a_{31}. Нова симплекс-таблиця наведена у табл. 7.

Таблиця 7

	Y_3	Y_1	b_j
X_2	-1/6	1/6	23/6
Y_2	-31/3	7/3	11/6
X_1	7/6	-1/6	25/6
$F(X)$	5/6	1/6	71/6

Маємо такі рішення:

$X_1 = 25/6 = 4 + 1/6$; $X_2 = 23/6 = 3 + 5/6$.

За змінну, по якій будується відсічення, необхідно вибрати змінну X_2:

$$X_2 = \frac{23}{6} - \frac{1}{6}Y_3 + \frac{1}{6}Y_1;$$

$$S_1 - \frac{5}{6}Y_3 - \frac{1}{6}Y_1 = -\frac{5}{6},$$

якщо коефіцієнт при Y_1 від'ємний, то в рівнянні S_1 беруться його доповнення до одиниці, тому що сума при Y_i повинна бути більшою за нуль, або дорівнювати йому. Додаткове рівняння вставляємо в табл. 7 і знову вирішуємо задачу. Рішення представлено у табл. 8.

Таблиця 8

	Y_3	Y_1	b_j
X_2	-1/6	1/6	23/6
Y_2	-34/3	7/3	11/3
X_1	7/6	-1/6	25/6
S_1	-5/6	-1/6	-5/6
$F(X)$	5/6	1/6	71/6

	S_1	Y_1	b_j
X_2	-1/5	1/5	4
Y_2	-68/5	23/5	15
X_1	7/5	2/5	3
Y_3	6/5	1/5	1
$F(X)$	1	0	11

$X_1 = 3$; $X_2 = 4$; $F(X) = 11$.

Основним недоліком першого алгоритму Гоморі є велика кількість ітерацій, що робить його громіздким для задач великої розмірності (при $n = 10$ кількість ітерацій може досягати 10^3).

Для задач, в яких тільки частина змінних повинна бути цілими числами, більш доцільно застосовувати другий алгоритм Гоморі, відомий як метод гілок та меж. Він зводиться до послідовного розподілу множини допустимих планів задачі на частини, які є деревом з відповідною кількістю рішень. Щоб зменшити кількість переборів, проводять оцінку утворених частин по оптимуму цільової функції. Це дозволяє на кожному кроку виключити ті частини, які не дають очікуваного результату.

Розподіл проводять таким чином: якщо змінна не має цілого значення, то вводять додаткові змінні, одна з яких дорівнює мінімальному цілому значенню, а друга – максимальному цілому значенню, тобто задача розбивається на дві задачі. Їх рішення показує необхідне ціле значення змінної. Цей процес повторюють доки всі необхідні змінні не стануть цілими числами.

З попереднього прикладу маємо:

$$X_1 = \frac{25}{6}; X_2 = \frac{23}{6}; F(X) = \frac{11}{6}.$$

Розіб’ємо цю задачу на дві задачі:

1. $X_1 \le 4$;

2. $X_1 \ge 5$

або $Y_4 + X_1 = 4$;

$Y_4 - X_1 = -5$.

Підставимо перше обмеження в початкову симплекс-таблицю. Рішення представлене у табл. 9 ÷ 11.

Таблиця 9

	X_1	X_2	b_j
Y_1	1	7	31
Y_2	9	-5	22
Y_3	1	1	8
Y_4	1	0	4
$F(X)$	-1	-2	0

Таблиця 10

	X_1	Y_1	b_j
X_2	1/7	1/7	31/7
Y_2	68/7	5/7	309/7
Y_3	6/7	-1/7	25/7
Y_4	1	6	4
$F(X)$	-5/7	2/7	62/7

Таблиця 11

	Y_4	Y_1	b_j
X_2	-1/7	1/7	27/7
Y_2	-68/7	5/7	309/7
Y_3	-6/7	-1/7	3
X_1	1	0	4
$F(X)$	5/7	2/7	82/7

Маємо рішення: $X_1 = 4$; $X_2 = 27/7$; $F(X) = 82/7$.

Вирішимо другу задачу. Це рішення представлене у табл. 12 ÷ 14.

Таблиця 12

	X_1	X_2	b_j
Y_1	1	7	31
Y_2	9	-5	22
Y_3	1	1	8
Y_4	-1	0	-5
$F(X)$	-1	-2	0

Таблиця 13

	Y_4	X_2	b_j
Y_1	1	7	26
Y_2	9	-5	-23
Y_3	1	1	3
X_1	-1	0	5
$F(X)$	-1	-2	10

Таблиця 14

	Y_4	Y_2	b_j
Y_1	68/5	7/5	-31/5
X_2	-9/5	-1/5	23/5
Y_3	14/5	1/5	-8/5
X_1	-1	0	5
$F(X)$	-3/5	-2/5	96/5

Задача не має рішення, тому що в рядку 1 та рядку 3 всі коефіцієнти додатні.

Знайдемо рішення для X_2. Маємо два варіанти:

1. $Y_5 + X_2 = 3$;
2. $Y_5 - X_2 = -4$.

Вирішимо першу задачу. Рішення представлено у табл. 15 ÷ 17.

Таблиця 15

	X_1	X_2	b_j
Y_1	1	7	31
Y_2	9	-5	22
Y_3	1	1	8
Y_4	1	0	4
Y_5	0	1	3
$F(X)$	-1	-2	0

Таблиця 16

	X_1	Y_5	b_j
Y_1	1	-7	10
Y_2	9	5	37
Y_3	1	-1	5
Y_4	1	0	4
X_2	0	1	3
$F(X)$	-1	2	6

Таблиця 17

	Y_4	Y_5	b_j
Y_1	-1	-7	6
Y_2	-9	5	1
Y_3	-1	-1	1
X_1	1	0	4
X_2	0	1	3
$F(X)$	1	2	10

Маємо таке рішення:

$X_1 = 4$; $X_2 = 3$; $F(X) = 10$.

Вирішимо другу задачу. Це рішення представлено табл. 18 ÷ 20.

Таблиця 18

	X_1	X_2	b_j
Y_1	1	7	31
Y_2	9	-5	22
Y_3	1	1	8
Y_4	1	0	4
Y_5	0	1	-4
$F(X)$	-1	-2	0

Таблиця 19

	X_1	Y_5	b_j
Y_1	1	7	3
Y_2	9	-5	42
Y_3	1	1	4
Y_4	1	1	4
X_2	0	-1	4
$F(X)$	-1	2	8

Таблиця 20

	Y_4	Y_5	b_j
Y_1	-1	-8	2
Y_2	-9	4	6
Y_3	-1	2	0
X_1	1	1	4
X_2	0	-1	4
$F(X)$	1	6	12

Маємо рішення:

$X_1 = 4$; $X_2 = 4$; $F(X) = 12$.

Останнє рішення дає більше значення цільової функції, тому воно приймається за остаточне.

7. Градієнтні методи оптимізації

Дані методи застосовують для вирішення задач з нелінійними цільовими функціями або при нелінійних обмеженнях.

Градієнтом n-мірної функції $F(X)$ в точці X_k є вектор, який визначається через часткові похідні:

$$gradF(X) = \nabla F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(X)}{\partial X_i} \vec{X}_i, \tag{19}$$

де $\vec{X}_i (i \in 1, 2, ...n)$ – одиничні вектори.

Найбільш суттєвим в цьому методі є те, що градієнт вказує напрямок, в якому похідна функції максимальна:

$$dF(X) = \frac{\partial F(X)}{\partial X_i} \vec{X}_1 + \frac{\partial F(X)}{\partial X_2} \vec{X}_2 + ... + \frac{\partial F(X)}{\partial X_n} \vec{X}_n = \nabla F(X) dX. \tag{20}$$

Скалярний добуток $\nabla F(X)$ максимальний тоді, і лише тоді, коли вектори $\nabla F(X)$ та dX співпадають за напрямком.

Градієнтний метод зводиться до руху з заданої початкової точки X_0, яка лежить на поверхні $F(X)$ = const, по кривій, яка перпендикулярна до поверхні цільової функції. Необхідно, щоб цільова функція мала екстремум, тобто:

$\frac{\partial F(X_0)}{\partial X_i} = 0$ для всіх i.

Алгоритм пошуку складається з таких кроків:

1. Вибираємо довільну початкову точку X_k.
2. Якщо $\frac{\partial F(X_{ik})}{\partial X_i} = 0$ пошук припиняємо. Інакше перехід до п.3.
3. Знаходимо нову точку $X_{i(k=1)} = X_{ik} + \Delta X_{ik}$ і знову переходимо до п.2.

Існує багато методів знаходження значення X_{ik}. В методі найшвидшого спуску:

$$\Delta X_k = -\nabla F(X_k) t_k, \tag{21}$$

де t_k – величина кроку.

Як правило, неможливо знайти таке X_{ik}, для якого всі похідні дорівнювали б нулю. Тому:

$$\frac{\partial F(X_k)}{\partial X_i} \le \varepsilon, \tag{22}$$

де ε – допустима похибка.

Якщо аналітично знайти часткові похідні неможливо, їх знаходять чисельно:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X_i} \approx \frac{\Delta F(X)}{\Delta X_i}. \tag{23}$$

В даному алгоритмі рух робочої точки спрямовано перпендикулярно по відношенню до попереднього напрямку, що прискорює пошук рішення.

8. Контрольні питання

1. Які задачі вирішує параметрична оптимізація комп'ютеризованих систем управління?
2. Які співвідношення необхідно забезпечити між вихідними параметрами об'єкта проектування та вимогами технічного завдання?
3. Назвіть можливі критерії, за якими об'єднуються вихідні параметри об'єкта проектування у цільову функцію.
4. Як встановлюються обмеження при параметричній оптимізації комп'ютеризованих систем управління?
5. Які методи пошуку екстремуму цільової функції існують?
6. Охарактеризуйте методи одновимірного пошуку екстремуму.
7. Дайте опис задачі лінійного програмування.
8. Послідовність дій у симплекс-методі вирішення задачі лінійного програмування.
9. Як скласти симплекс-таблицю для параметричної оптимізації системи управління?
10. Особливості цілочисельної оптимізації параметрів комп'ютеризованих систем управління.
11. Охарактеризуйте алгоритми вирішення задачі цілочисельної оптимізації.
12. Як застосовуються градієнтні методи до оптимізації складних технічних систем?