

Лекція 2. ПКСУ ТП

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ КОМП'ЮТЕРИЗОВАНИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ

2.1. Класифікація та вимоги до математичних моделей комп'ютеризованих систем управління

Блочно-ієрархічний підхід до проектування комп'ютеризованих систем управління потребує відповідного математичного забезпечення. Тому на кожному ієрархічному рівні використовують свої математичні моделі, складність яких узгоджено з можливостями їх аналізу на комп'ютері [1, 6, 14, 17, 20, 21, 23].

Найбільш великими ієрархічними рівнями є рівні, які назвемо нижнім (рівень В або мікрорівень), середнім (рівень Б або макрорівень) та найвищим (рівень А або мегарівень).

Якщо при розробці деякого об'єкта кількість фактичних рівнів перевищує три, то вони вважаються підрівнями одного з вищевказаних рівнів.

Рівень В називають рівнем проектування базових компонентів або мікрорівнем. Він застосовується при розробці транзисторів, діодів, резисторів тощо. На цьому рівні фазові змінні є функціями деяких незалежних змінних, до яких належать просторові координати та час і які розглядаються як безперервні. Математичні моделі (ММ) цього рівня повинні відображати процеси, які відбуваються в суцільному середовищі. Компонентами цього рівня є області об'ємної структури, наприклад, область опору в інтегральній мікросхемі, несуча конструкція будинку, величина напруги полів, концентрація часток тощо.

Внутрішніми параметрами можуть бути, наприклад, коефіцієнти теплопровідності, концентрація часток, геометричні розміри, а вихідними параметрами – гідравлічний опір частини трубопроводу, електричний опір резистора, жорсткість пружини тощо. ММ цього рівня є система диференційних рівнянь часткових похідних. Ці моделі часто називають розподіленими моделями. Рішення таких рівнянь викликає великі труднощі, тому їх застосування обмежується малою кількістю областей.

На рівні Б використовують уявлення про середовище з дискретним простором, що означає перехід до зосереджених моделей. Цей рівень називають також макрорівнем. Компонентами цього рівня будуть об'єкти, які на рівні В розглядалися як системи (резистор, транзистор тощо). Параметри цих компонентів, які на рівні В були вихідними, на рівні Б стають внутрішніми. Прикладами вихідних параметрів рівня Б будуть коефіцієнти підсилення, тяга двигуна тощо. Типовими фазовими змінними цього рівня будуть струми та напруга, швидкість та сила, потоки та тиск.

ММ цього рівня є система звичайних диференційних рівнянь, яка часто перетворюється на алгебраїчні або трансцендентні. Зі збільшенням кількості компонентів і відповідно порядку системи рівнянь можливості рішення задач на основі ММ цього рівня зменшується і стає необхідним перехід до наступного ієрархічного рівня.

Рівень А називають інформаційним рівнем. Системи цього рівня – складні пристрої та комплекси типу обчислювальних машин, радіолокаційних станцій, систем регулювання. Функціонування таких систем розглядається як

ланцюг подій, які проходять в дискретні моменти часу і які зводяться до зміни стану компонентів. Дискретне представлення простору та часу зумовлює дискретність фазових змінних, якими є величини, що характеризують стан цих компонентів. Роль компонентів та внутрішніх параметрів виконують системи та вихідні параметри рівня Б. Так компонентом комп'ютера на рівні А можна вважати арифметичний пристрій, оперативну пам'ять, пристрої вводу /виводу. Фазові змінні, які характеризують стан цих компонентів, можуть приймати два значення – значення “зайнято”, якщо компонент в даний момент працює, і значення “вільний”, якщо компонент знаходиться в стані очікування. Для побудови ММ рівня А застосовують математичну логіку, теорію масового обслуговування, теорію автоматичного регулювання.

На кожному рівні проектування слід розрізняти ММ компонентів та ММ систем. Останні отримують об'єднанням ММ компонентів в загальну систему рівнянь і називають повними моделями.

ММ, які менш складні в порівнянні з повними моделями, називають макромоделями. Їх отримують апроксимацією повних моделей.

За призначенням макромоделі можуть бути:

- першого класу – макромоделі класу А або факторні моделі. Вони призначенні для використання на більш високому рівні проектування, як моделі компонентів наступного рівня. Такі моделі забезпечують інформаційний зв'язок між різними рівнями проектування;
- другого класу – макромоделі класу Б або фазові моделі. Вони використовуються на тому ж рівні проектування, на якому вони утворюються. Ці моделі використовують для зменшення розмірності задач даного рівня заміною повної моделі макромоделлю.

До ММ пред'являють вимоги точності, економічності та універсальності.

Точність ММ – властивість, яка відображає ступінь співпадіння передбачених за її допомогою значень параметрів з дійсними значеннями цих параметрів. Кількісна оцінка точності в більшості випадків утруднена з таких причин:

1. Реальні об'єкти, а також їх моделі, характеризуються не одним а декількома параметрами. Звідси впливає векторний характер оцінки точності і необхідність зведення векторної оцінки до скалярної величини для співставлення моделей одна з одною.

2. Моделі складаються для багаторазового використання при аналізі різних варіантів об'єкта або для багатьох типів об'єктів певного класу. Оскільки характер поведінки тих чи інших властивостей залежить від особливостей зв'язку об'єкта з зовнішнім середовищем або з іншими об'єктами, то показники точності теж залежать від конкретних умов функціонування об'єкта. Тому оцінка точності перестає бути однозначною.

3. За дійсні значення параметрів об'єкта приймають експериментальні значення. Але похибка експерименту дуже часто дорівнює похибці моделі і навіть більша за неї. Тому для порівняння потрібна більш точна модель, що не завжди можливо.

Для зведення векторної оцінки до скалярної величини застосовують нормування. Нехай об'єкт має m параметрів $X_i (i \in 1, 2, \dots, m)$, а отримані при

моделюванні значення цих параметрів дорівнюють X_{in} . Тоді вектор похибок дорівнює:

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m), \quad (2.1)$$

де

$$\varepsilon_i = \frac{X_i - X_{in}}{X_i}.$$

Як оцінку точності використовують максимальну оцінку:

$$\varepsilon_m = \max |\varepsilon_i|. \quad (2.2)$$

Часто використовують також середньоквадратичну оцінку:

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2}. \quad (2.3)$$

Щоб уникнути впливу середовища функціонування, порівняння моделей проводять в стандартних ситуаціях, які називають тестовими ситуаціями.

Економічність ММ та машинних розрахункових методів визначаються витратами машинного часу, які складають основну частину всіх витрат. Вклад ММ у витрати машинного часу можна оцінити кількістю арифметичних операцій, які використовуються при одноразовому вирішенні рівнянь моделі. Показником економічності моделі може служити також і кількість внутрішніх параметрів, які використовуються. Чим більше цих параметрів, тим більший об'єм оперативної пам'яті необхідно мати.

Ступінь універсальності ММ визначається пристосованістю до аналізу більш чи менш чисельної групи однотипних об'єктів, до їх аналізу в одному чи багатьох режимах функціонування об'єкта.

Вказані вимоги суперечливі. Чим більшу точність має модель, тим більшим є об'єм обчислень. Тому необхідно мати декілька моделей різної точності для одного і того ж компонента (системи).

Для САПР характерним є те, що ММ об'єкта складає сам комп'ютер. Це висуває певні вимоги до вхідних мов САПР, за допомогою яких задається інформація про об'єкт. З'являються певні вимоги до ММ та до програм їх реалізації. Тому існує певна суперечливість між вимогами розробника систем і вимогами розробника програм.

Вимоги розробника системи зводяться до наступного:

1. ММ повинна бути побудована відносно параметрів, які мають певний схемотехнічний зміст, щоб мати можливість оцінити вплив кожного компонента моделі на властивості системи.

2. Для кожного параметра необхідно мати середнє значення, статистичну межу їх змін, температурні та режимні властивості.

Вимоги розробника програм зводяться до того, що ММ повинна бути зручною для включення в програму і для реалізації різних чисельних методів аналізу. Цьому сприяють такі властивості ММ:

1. Безперервність моделі, тобто справедливність одного і того ж виразу для всього робочого діапазону моделі.

2. Мала чутливість величин, що обчислюються, до помилок розрахунків (обумовленість моделі). Так для діода, який працює в режимі прямого

зміщення, залежність $U(i)$ обумовлена краще, ніж залежність $i(U)$, а для діода, який працює в режимі зворотного зміщення – навпаки.

3. Простота, яка визначається кількістю та складністю рівнянь ММ.

На точність моделі впливає і точність комп'ютерних обчислень. В більшості випадків цей вплив незначний. Але є випадки, коли похибки обчислень вносять суттєвий внесок в загальну похибку. Це буває при діленні на малі числа (наприклад, в методі Гауса), коли похибки округлення досить великі.

Розглянутий розподіл ММ за складністю пов'язаний з ієрархією рівнів проектування. ММ можна класифікувати і за іншими ознаками:

1. В залежності від характеру якостей ММ розподіляються на функціональні та структурні. Функціональні моделі відображають процеси функціонування об'єкта і мають вигляд рівнянь. Структурні моделі відображають структурні (наприклад, геометричні) властивості і мають вигляд матриць, графів, списків векторів і виражати взаємне розташування компонентів (взаємозв'язок компонентів). Вони також можуть мати вигляд рівнянь.

2. За способами отримання функціональні моделі розподіляються на теоретичні та формальні. Останні отримують при розгляді об'єкта як кібернетичного чорного ящика. Теоретичні моделі отримують на основі вивчення фізичних закономірностей. Структура таких рівнянь та їх параметри мають певний фізичний зміст. Теоретичний підхід дозволяє отримати більш точні (і, як правило, більш складні), більш універсальні моделі, які справедливі для широкого діапазону змін зовнішніх параметрів. Формальні моделі більш точні поблизу тієї точки простору параметрів, в якій проводилися вимірювання.

3. В залежності від лінійності або нелінійності рівнянь ММ розподіляють на лінійні та нелінійні.

4. В залежності від потужності множини значень змінних ММ розподіляються на безперервні та дискретні.

5. За формою зв'язків між вхідними, внутрішніми та зовнішніми параметрами розрізняють моделі у вигляді системи рівнянь (алгоритмічні моделі) та у вигляді явних залежностей вихідних параметрів від решти (аналітичні моделі).

6. В залежності від урахування інерційності процесів моделі можуть бути динамічні та статичні.

2.2. Особливості математичних моделей компонентів електричних схем

Властивості системи визначаються типом застосованих елементів та способом зв'язку їх між собою. Моделі, які описують властивості компонентів, будемо називати компонентними моделями. Моделі, які описують зв'язки компонентів між собою, будемо називати топологічними. Останні залежать від конкретної системи, тоді як перші – тільки від типу компонента. Повну модель системи можна отримати об'єднанням компонентної та топологічної моделей. Цей підхід і застосовується в САПР.

При створенні моделей рівня Б найчастіше застосовують теоретичний підхід. При цьому першим етапом моделювання буде виділення компонентів шляхом розподілу загальної структури системи на окремі частини. На другому етапі здійснюється перехід до середніх значень параметрів та фазових змінних.

Іншими словами, параметри цього рівня є зосередженими параметрами [2, 7, 12, 17, 22, 24].

Поведінка більшості технічних об'єктів описується за допомогою фазових змінних, які пов'язують кінетичну та потенціальну енергію в об'єкті і які утворюють вектор невідомих в моделях.

Закон функціонування компонента системи задається компонентними рівняннями, які пов'язують фазові змінні в цьому компоненті.

Кількість різних типів компонентів схеми дуже велика (сотні типів транзисторів, діодів, резисторів тощо). Універсальність ММ вимагає відносно невеликої кількості таких елементів. Це можливо, якщо окремі компоненти замінити схемами заміщення, в яких буде невелика кількість компонентів.

В більшості об'єктів можна виділити три найпростіших компоненти:

- компонент типу R , на якому кінетична енергія перетворюється на теплову;
- компонент типу C , на якому може накопичуватися потенціальна енергія;
- компонент типу L , на якому може накопичуватися кінетична енергія.

Подібність цих компонентів в системах різної фізичної природи можна узагальнити в табл. 2.1.

Для кожної фізичної системи характерні свої закони, але форма їх представлення (рівняння) однакові, що дозволяє застосовувати для їх вирішення однакові програми та алгоритми.

В електричній системі рівняння перехідного процесу має вигляд:

$$U = U_R + U_C + U_L;$$

$$U_R = I \cdot R, \quad I = \frac{U_R}{R} \text{ – закон Ома для резистора;}$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt \text{ – рівняння для ємності;}$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} \text{ – рівняння для індуктивності.}$$

Таблиця 2.1

Подібність систем різної фізичної природи

Система	Фазові змінні		Компонент		
	Типу потенціалу	Типу потоку	R	C	L
Електрична система	Напруга U	Струм I	Опір R	Ємність C	Індуктивність L
Механічна поступальна	Сила F	Швидкість v	Опір тертя k_1	Жорсткість $1/k_2$	Маса m
Механічна обертальна	Момент M	Кутова швидкість ω	Опір тертя $k_{1\omega}$	Обертальна жорсткість $1/k_{2\omega}$	Момент інерції

Гідропневматична система	Тиск P	Витрата (потік) Q	Гідроопір	Гідроємність	Гідроіндуктивність
Теплова система	Температура T	Тепловий потік Φ	Тепловий опір	Теплоємність	—

Рівняння руху механічної коливальної системи:

$$F_g - F_1 - F_2 = F_3;$$

$$F_1 = k_1 \cdot v - \text{закон в'язкого тертя};$$

$$F_2 = k_2 \cdot x - \text{закон Гука};$$

$$F_3 = m \frac{dv}{dt} - \text{2-й закон Ньютона},$$

де F_g – сила тяжіння, що діє на масу m , x – переміщення, k_1 – коефіцієнт опору тертя; k_2 – коефіцієнт жорсткості пружини.

Аналогічні рівняння можна отримати і для інших фізичних систем.

До компонентів схеми також відносять незалежні джерела напруги та джерела струму, які вважаються ідеальними. Реальні джерела мають внутрішні витрати енергії, що можна врахувати введенням внутрішнього опору.

Схемними компонентами також є залежні джерела напруги. В загальному випадку залежними джерелами можуть управляти струм та напруга будь-якого компонента схеми. Маємо такі залежні джерела струму та напруги:

1. ДСУС – джерело струму, яке управляється струмом:

$$i_1 = f(i_2).$$

Графічне зображення такого джерела наведено на рис. 2.1.

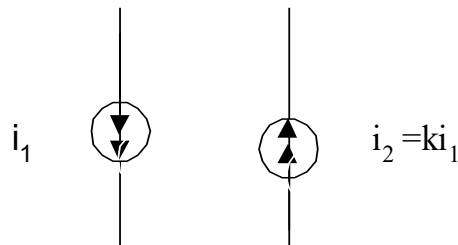


Рис. 2.1

3. ДСУН – джерело струму, яке управляється напругою:

$$i_1 = f(U_2).$$

Графічне зображення такого джерела струму наведено на рис. 2.2.

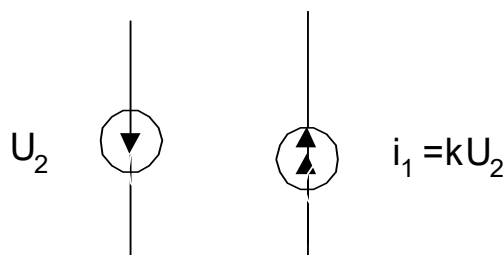


Рис. 2.2

4. ДНУС – джерело напруги, яке управляється струмом:

$$U_1 = f(i_2).$$

Графічне зображення такого джерела наведено на рис. 2.3.

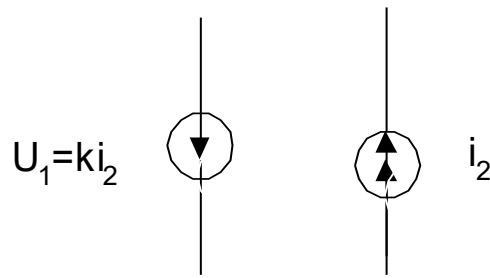


Рис. 2.3

4. ДНУН – джерело напруги, яке управляється напругою:

$$U_1 = f(U_2).$$

Графічне зображення такого джерела наведено на рис. 2.4.

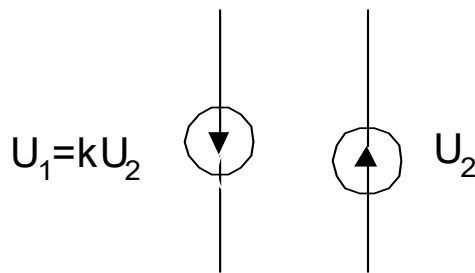


Рис. 2.4

Введення типових компонентів схем дозволяє звести велику кількість різноманітних реальних компонентів до відносно невеликої кількості ідеальних схемних компонентів, різні сполучення яких з необхідною точністю відображають електричні (та інші) кола та їх компоненти.

2.3. Математичні моделі активних та пасивних компонентів

Моделі діодів

Аналітична модель випрямляючого діода описується формулою Еберса-Молла [12, 24, 25].

Ця формула є універсальною моделлю діода в усіх можливих режимах його роботи. Ця модель застосовується досить рідко, тому що є доволі складною та містить параметри, які відомі тільки розробникам конкретної моделі діода. Досить часто замість аналітичних моделей застосовують відповідні їм схеми заміщення. Для діода така схема заміщення наведена на рис. 2.5 [12, 25, 30].

Для грубих розрахунків можна застосувати кусочно-лінійну модель діода, яку отримують апроксимацією його вольт-амперної характеристики. Така модель наведена на рис. 2.6.

В схеми на рис. 2.5 та 2.6 входять такі величини:

r_6 – опір бази;

C_6 – бар'єрна ємність;

C_d – дифузійна ємність;

R_y – опір витоку;

R_{np} – опір пробою;

U_o – напруга відсічки;

U_{np} – напруга пробою.

Ці параметри діода визначаються експериментальним шляхом і вводяться в базу даних.

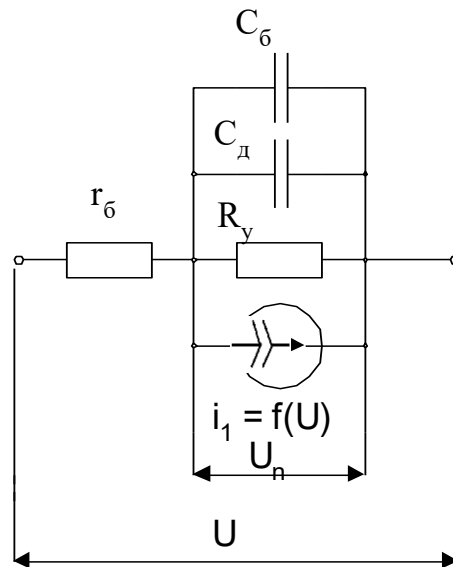


Рис. 2.5

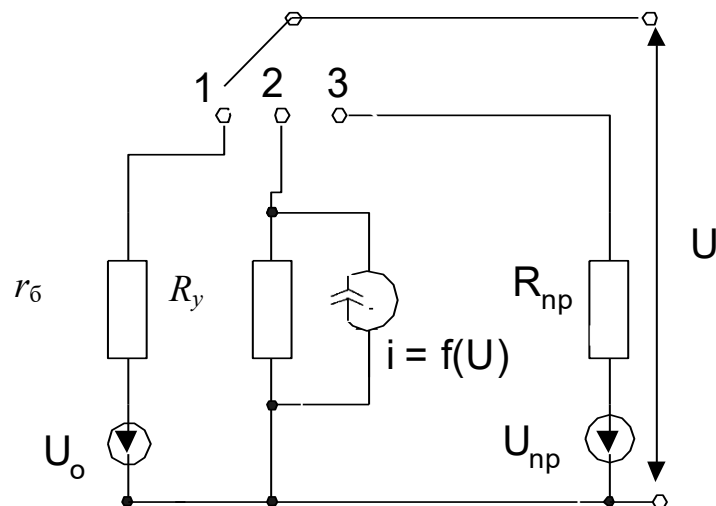


Рис. 2.6

Для низькочастотних транзисторів, які працюють в квазілінійному режимі, можна застосувати матричне зображення їх моделей. При цьому транзистор розглядається як компонент схеми, що має три полюси [11, 12, 30, 32] (рис. 2.7).

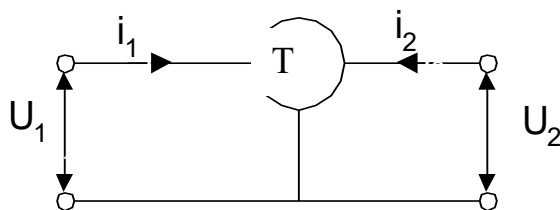


Рис. 2.7

Для схеми включення транзистора з загальною базою модель його у вигляді матриці має вигляд:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Для схеми включення транзистора з загальним емітером модель у вигляді матриці має вигляд:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Для схеми включення транзистора з загальним колектором модель у вигляді матриці має вигляд:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Параметри g , r та h можна знайти у відповідних довідниках або визначити експериментально. Ці параметри транзисторів взаємопов'язані. Коли відомі одні з них, інші можуть бути знайдені по залежностям, представленими в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Взаємозв'язок параметрів транзисторів

Параметр	Обчислюєма величина		
	r	g	h
r	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{ r } \begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} r & -r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}$
g	$\frac{1}{ g } \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{21} & g \end{bmatrix}$
h	$\frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} h & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 & -h_{12} \\ h_{21} & h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

В цій таблиці:

$$|r| = r_{11} \cdot r_{22} - r_{12} \cdot r_{21},$$

$$|g| = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21},$$

$$|h| = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}.$$

Низькочастотні лінійні моделі біполярного транзистора у вигляді схем заміщення наведені на рис. 2.8 (r_e , r_b , r_k – опори емітера Е, бази Б та колектора К відповідно).

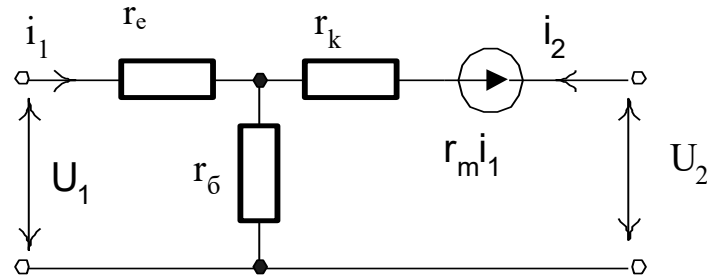


Рис. 2.8

Замість залежного джерела напруги $U=r_m i_1$ можна ввести залежне джерело струму, яке підключається паралельно колекторному опору.

Існує досить велика кількість універсальних моделей біполярного транзистора. Одна з них наведена на рис. 2.9 (C_b , C_d – відповідно бартерна та дифузна ємності p - n переходу, i_e , i_b , i_k – струми емітера Е, бази Б та колектора К відповідно).

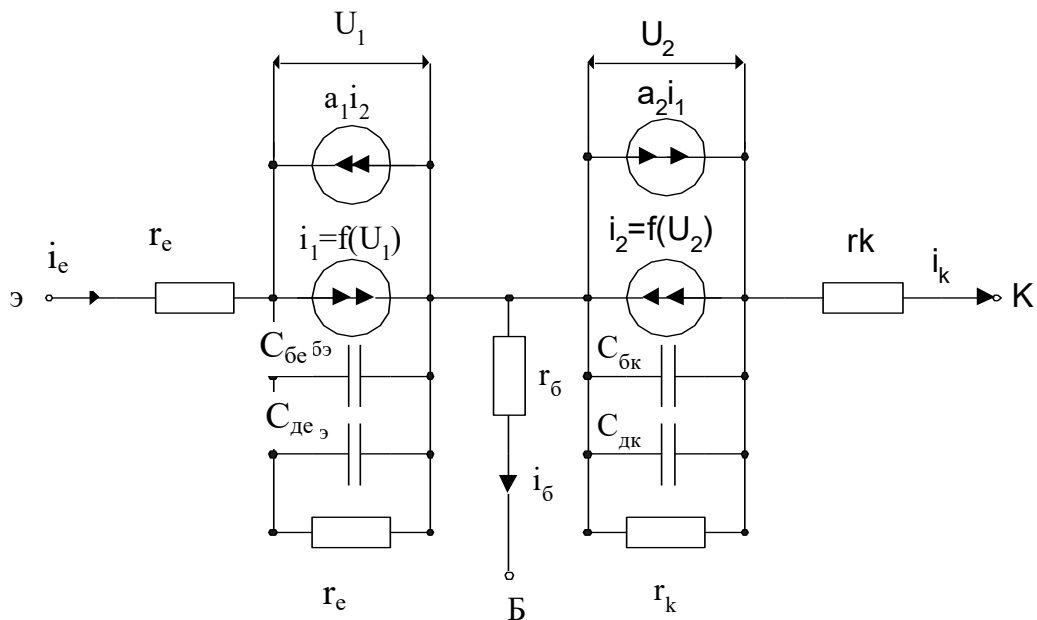


Рис. 2.9

Більшість моделей транзисторів засновані на припущенні, що процес переносу носіїв від емітера до колектора протікає в умовах, близьких до ідеальних: структура транзистора симетрична відносно бази, всі області працюють однаково активно, струм між переходами зумовлений тільки процесом дифузії, щільність інжекттованих в базу носіїв набагато менша за щільність основних носіїв в базі.

Ці допущення справедливі для більшості площинних транзисторів і є досить грубими для планарних (інтегральних транзисторів). Моделі таких транзисторів можна знайти в [3, 5, 9, 30, 36].

Для польових транзисторів наводимо спрощену схему заміщення (рис. 2.10).

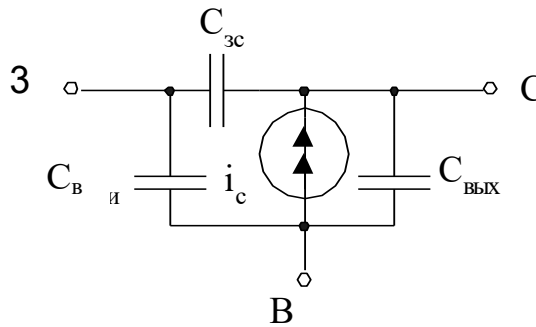


Рис. 2.10

Моделі пасивних компонентів

До пасивних компонентів електричних схем належать резистори, конденсатори та індуктивності. Схеми заміщення таких компонентів складаються з самих компонентів та паразитних параметрів – індуктивностей виводів $L_{\text{в}}$, ємностей між витками $C_{\text{п}}$, омичного опору котушок r , опору витoku конденсаторів $R_{\text{у}}$, значення яких залежить від конструкції компонентів та частоти напруги.

Схеми заміщення пасивних компонентів наведені на рис. 2.11.

В залежності від режиму роботи схеми, ті чи інші паразитні параметри можна не враховувати.

2.4. Математичні моделі цифрових логічних схем

При моделюванні функціональних та принципових схем цифрової електронно-обчислювальної апаратури слід враховувати такі її особливості:

- стан компонентів характеризується фазовими змінними одного типу (як правило, напругою), які визначають інформацію, що зберігається та обробляється;
- фізична природа фазової змінної не конкретизується;
- аналіз схем проводиться в дискретному часі; вісь часу розподіляється на такти довжиною T_i ;
- часто використовують відносний час, який визначається кількістю тактів;
- фазову змінну представляють в дискретній формі (як правило, нуль та одиниця).

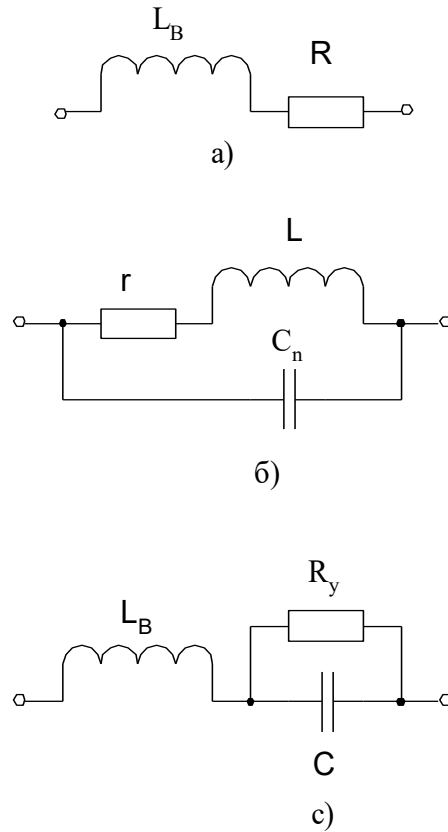


Рис. 2.11. Схеми заміщення пасивних компонентів:
а) – резистор; б) – індуктивність; c) – конденсатор

Логічні компоненти можна представити у вигляді дводольних графів (біграфів), в яких одна множина вершин відповідає компонентів, а друга – сигналам. Ребра такого графа показують напрямок передачі сигналів і відображають причинно-наслідні зв'язки між вершинами. Різниця між входами та виходами компонентів визначається напрямком ребер [4, 24, 32].

Нехай маємо схему, зображену на рис. 2.12.

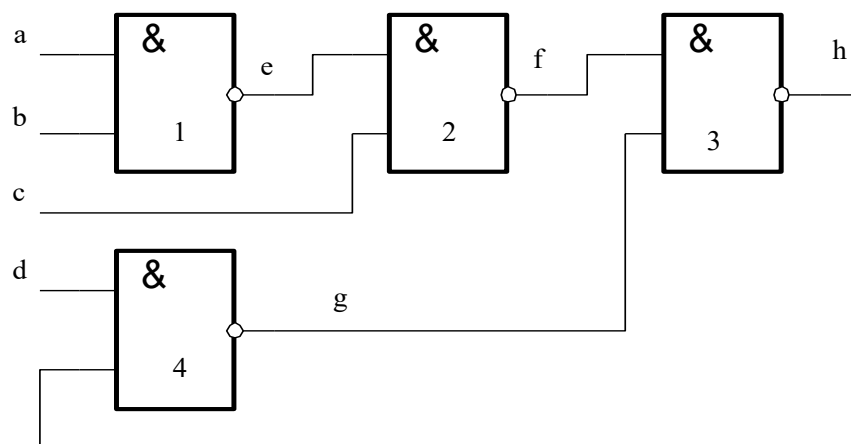


Рис. 2.12

Граф такої схеми зображений на рис. 2.13.

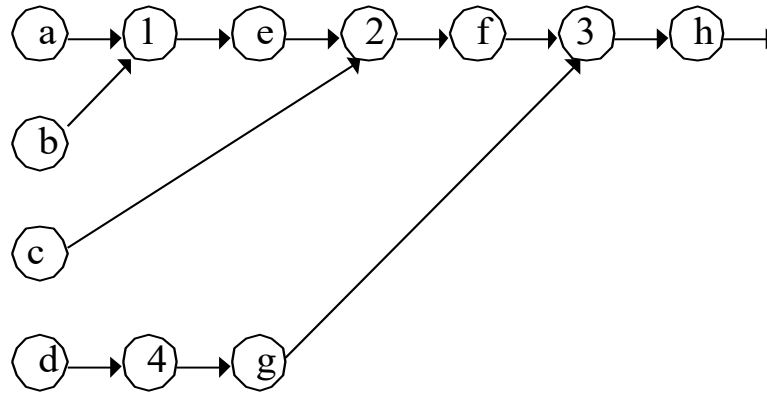


Рис. 2.13

В цій схемі компоненти відображаються вершинами з номерами, а сигнали – вершинами з літерами.

Зв'язки між компонентами можна відображати матрицею інцидентності, кількість рядків якої дорівнює кількості компонентів, а кількість стовпців – кількості сигналів. Вихідний сигнал компонента виходить з вершини і має позначення “-1”. Вхідний сигнал входить в вершину і має позначення “+1”. Інші елементи матриці нульові.

Матриця інцидентій для схеми по рис. 2.13 представлена табл. 2.3.

Таблица 2.3

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
1	1	1			-1			
2			1		1	-1		
3						1	1	-1
4				1			-1	1

По матриці інцидентій можна скласти топологічний опис схеми. Компонентними рівняннями будуть рівняння, які описують закони функціонування компонентів (на рис. 2.13 всі компоненти є компонентами “І-НІ” – $y = x_1 x_2$).

В загальному випадку функціонування схеми можна описати двома системами рівнянь [15, 24, 31, 33]:

$$Y_{t+k_j} = \varphi(X_t, Z_t)$$

$$Z_{t+k_j} = \psi(X_t, Z_t)$$

де Y – вектор вихідних сигналів; X – вектор вхідних сигналів; Z – вектор внутрішніх сигналів; k_j – часова затримка.

Затримки можуть бути різними для різних компонентів. В загальному випадку затримки можуть залежати від зовнішніх факторів, бути різними при переходу з нуля на одиницю та з одиниці на нуль.

Часто вихідні та внутрішні сигнали об'єднують і тоді математична модель має вигляд:

$$V_{t+k_j} = F(X_t, V_t).$$

Подібна математична модель схеми називається асинхронною моделлю. Якщо всі $k_j \neq 0$, то асинхронна модель є система рекурентних булевих рівнянь, яка дозволяє при відомих початкових значеннях вектора V^0 та при відомому законі зміни вхідних змінних $X(t)$ визначити значення вектора V в усьому часовому інтервалі, тобто побудувати часову діаграму роботи схеми. В цьому відношенні асинхронна модель подібна до системи диференціальних рівнянь аналогових схем.

Асинхронні моделі універсальні, тому що дозволяють проводити аналіз як асинхронних так і синхронних схем. Але їх застосування вимагає великих витрат машинного часу. Скоротити ці витрати можна застосуванням синхронних моделей, в яких передача інформації дозволяється тільки при наявності спеціальних синхроімпульсів. Період подачі цих імпульсів вибирається таким, щоб перехідні процеси в компонентах за цей час закінчилися. В цьому разі можна вважати, що всі затримки дорівнюють нулю і тоді $V_{t+k} = V_t$, а математична модель схеми має вигляд:

$$V = F(X, V),$$

в якій час не фігурує. Подібна модель аналогічна статичним моделям аналогових схем.

Таку модель можна отримати по схемі, не вдаючись до зображення графа. Математичну модель у вигляді системи звичайних булевих рівнянь складають по схемі за таким алгоритмом:

1. Нумерують компоненти в будь-якій послідовності.
2. Позначають буквами вхідні та вихідні сигнали компонентів.
3. Записують рівняння, які пов'язують вихідний сигнал компонента з його вхідними сигналами.

Для схеми на рис. 2.13 математична модель має вигляд:

$$e = \overline{ab};$$

$$f = \overline{ec};$$

$$h = \overline{fg};$$

$$g = \overline{dh}.$$