МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЖИТОМИРСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Вища математика

Варіанти завдань та методичні вказівки

для самостійної роботи студентів

Частина 2

Функції двох змінних
Невизначений інтеграл
Визначений інтеграл
Диференціальні рівняння

Житомир 2014

Вища математика: Варіанти завдань та методичні вказівки для самостійної роботи студентів. Ч. 2. – Житомир: ЖДТУ, 2014. – 98 с.

Укладач: Бондарчук Василь Миколайович.

.

Функції двох змінних

Завдання 1. Знайти частинні похідні 1-го і 2-го порядку функції $z = f(x,\ y)$.

1.1. $z = e^x y - x^4 y + y^2 + 3y - x - 4$.

1.2. $z = 4x^3 \cos y - 3xy + 2y^2 + y - 7x + 1$.

1.3. $z = x^5 y - x^2 y + 2\cos y + 3x + y + 4$.

1.4. $z = 5x^3 - 3xy + y^2 + 2\,\mathrm{tg} y - 4x - 1$.

1.5. $z = 3e^x + 2x^3 y^2 - y^2 + x - 2y + x - 7$.

1.6. $z = 2y \sin x - x^3 y^2 + 4y^3 + y - 3x - 5$.

1.7. $z = 3xe^y + x^2 y + 2\cos y + x - y + 3$.

1.8. $z = 2x^3 \cos y + 3x^5 y^4 - y^3 + x - 4$.

1.9. $z = x^3 y + y^2 \cos x + 2y^3 - 5y + 7$.

1.10. $z = 5e^x y^3 - 2xy^3 + 5y - 4x + 1$.

1.11. $z = 4x^3 - 2xy^2 + \ln y + 3x + 5$.

1.12. $z = 3\ln x - x^2 y^4 + 2y + 5x - 4$.

1.13. $z = 2x^4 y - y^2 + 5y - 7x + 2$.

1.14. $z = x^3 y^2 - 3x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5$.

1.15. $z = 2x^5 - 3x^2 y^4 + y^3 + 5y - x - 3$.

1.16. $z = x^4 - 3x^3 y^2 + 4x + 2y - 3$.

1.17. $z = x^3 - 2xy^3 + \ln y + 3y - x + 1$.

1.18. $z = 3e^x y^2 + x^2 - y^3 + 2e^y - 4$.

1.19. $z = 4x^5 - x^4 y + \ln y - e^x + 3$.

1.20. $z = 5x^2 - 2x^3 y^4 + 4x - 3\ln y$.

1.21. $z = x^2 y + 2\ln x + 7\ln y + 3x + y$.

1.22. $z = 4x^3 - 6xy^2 + 2y^2 + 7y - 2$.

1.23. $z = 2x^2 y - 3x + 4y^2 + \dfrac{4x}{y}$.

1.24. $z = 3x^4 + y^2 - xy + x + y$.

1.25. $z = 4x^3 - 3x^2 y + 2y^3 + 5\ln x - 6$.

1.26. $z = e^x - x^3 y^2 + 4y^2 + 3y - x - 1$.

1.27. $z = 5x^3 y^2 - 3x + y^2 + \dfrac{2x}{y^3} - 3$.

1.28. $z = xy^4 - x^3 y + 2\sin y - x + 3$.

1.29. $z = 4x^2 - xy^3 + 3\ln y - e^x + 2$.

1.30. $z = 2x^2 y - \ln x + 3y^2 + \dfrac{4}{x}$.

***Завдання 2*.** Знайти диференціал функції $z = f(x, y)$.

2.1. $z = \cos\left(x^3 - 3y\right)$.

2.2. $z = \dfrac{3x + 2y}{3x - 2y}$.

2.3. $z = \sqrt{x^4 + 2y^3}$.

2.4. $z = x \ln \dfrac{x^2}{y}$.

2.5. $z = \dfrac{xy + 1}{x + y}$.

2.6. $z = e^{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$.

2.7. $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$.

2.8. $z = e^{3x - y^2}$.

2.9. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

2.10. $z = x\ln\left(x^3 y\right)$.

2.11. $z = 4e^{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

2.12. $z = \sin\left(5x^2 + y\right)$.

2.13. $z = \ln\left(x^3 + y^3\right)$.

2.14. $z = \dfrac{x^2 + 3y^2}{x + y}$.

2.15. $z = \dfrac{xy}{x + y + 1}$.

2.16. $z = \cos\sqrt{x + y}$.

2.17. $z = tg\left(x^3 y^4\right)$.

2.18. $z = \dfrac{3x + y}{x - 3y}$.

2.19. $z = e^{x^2 + y^2 + xy}$.

2.20. $z = y\ln\dfrac{2y}{x^3}$.

2.21. $z = \arcsin\left(x + 3y\right)$.

2.22. $z = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

2.23. $z = \arccos\dfrac{y}{x}$.

2.24. $z = \dfrac{y}{y^2 - 9x^2}$.

2.25. $z = \sqrt{3x^2 + 2y^2}$.

2.26. $z = y\ln\dfrac{x}{y^2}$.

2.27. $z = e^{\frac{y}{x}}$.

2.28. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$.

2.29. $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

2.30. $z = \ln\left(x^3 - 2y^2\right)$.

Завдання 3. Знайти частинні похідні 1-го порядку функції $z = f\left(x,\ y\right)$, заданої неявно.

3.1. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

3.2. $e^x y - xyz + y^3 - 4xz^2 = 0$.

3.3. $2x^2 y - \ln x + 3y^2 z + 2xe^z - 4 = 0$.

3.4. $3ye^x + 2z^3 y^2 - y^2 + xz - 2x - 7 = 0$.

3.5. $5x^3 - 3xy + z^2 + 2tgy - 4xyz - 1 = 0$.

3.6. $x^3 y - z^2 y + 2x\cos y + 3x + z - 3 = 0$.

3.7. $3e^x y^3 - 2xy^3 z + 5y - 4z^3 + 1 = 0$.

3.8. $xy\sin z - x^3 y + 4xz^3 + y - 3z = 0$.

3.9. $x^4 - 3x^3 yz + 4\ln x + 2yz^2 - 3 = 0$.

3.10. $e^z y - x^4 y + z^2 + 4y - x - 3 = 0$.

3.11. $5x^2 y - 2x^3 z^4 + 4xy^2 z - 3\ln z = 0$.

3.12. $2x^3 \cos y + 3x^5 z^4 - y^3 + \mathrm{tg}z - 4 = 0$.

3.13. $3e^z y^2 + x^2 - xy^3 + 2\ln z - 1 = 0$.

3.14. $x^3 - 2xy^3 + x\ln z + 3y - 2z + 1 = 0$.

3.15. $3e^z + 2x^3 y^2 - z^2 + 3x - 2z + 4 = 0$.

3.16. $4x^3 - 3x^2 yz + 2z^3 + 5\ln x - 6 = 0$.

3.17. $4x^5 y - y^4 z + \ln x - e^z + 3 = 0$.

3.18. $5x^2 y - 3xz^2 + 2y^2 + \dfrac{z}{y} = 0$.

3.19. $x^3 - 3x^2 y + 2y^2 + \ln z - 4xz + 5 = 0$.

3.20. $xe^z - x^3 y^2 + 4z^2 + 3xy - x - 1 = 0$.

3.21. $x^2 y + 2x\ln y + 7\ln z + 3x + e^z = 0$.

3.22. $5x^3 y^2 - 3xz^2 + y^2 + \dfrac{2z}{y^3} - 3 = 0$.

3.23. $x^3\cos z - 3xy + 2y^2 + z - 4x + 1 = 0$.

3.24. $5x^3 - 2x^2yz + \ln z + 3x - 4 = 0$.

3.25. $3x^4 + y^2z - xy^2 + \sin z + y = 0$.

3.26. $5\ln x - x^2z^4 + 2\cos y + 3z - 1 = 0$.

3.27. $2xe^y + z^2y + 2\cos z + x + 3y = 0$.

3.28. $4x^3y - 6yz^2 + 3y^2 + 7\cos z - 2 = 0$.

3.29. $4x^2z - xy^3 + 3\ln z - e^y + 2 = 0$.

3.30. $xy^4z - x^3y + 2\sin z - y + 3 = 0$.

<u>Завдання 4.</u> Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial v}$.

4.1. $z = x^3 \cdot \ln y$, де $x = \dfrac{u}{v}$, $y = 3u - 2v$.

4.2. $z = \mathrm{tg}x - 2x\cos y$, де $x = v\sin u$, $y = 3v - 2uv$.

4.3. $z = xy^2 + \dfrac{x}{y}$, де $x = v^2u - 4v$, $y = \dfrac{2v}{u}$.

4.4. $z = e^x y + \ln x$, де $x = uv$, $y = u^2 - 3v$.

4.5. $z = x^2y - 2\cos y$, де $x = u\ln v$, $y = 4u^2v$.

4.6. $z = \cos x - 2y^3$, де $x = \dfrac{u^2}{v}$, $y = 3u\sin v$.

4.7. $z = y\ln x - 4x$, де $x = 2v^2 - 4u$, $y = u - 3v^2$.

4.8. $z = \mathrm{tg}x - 2\ln y$, де $x = 2uv$, $y = 4u - 5v^3$.

4.9. $z = 2x^3\ln y$, де $x = v\cos u$, $y = 3u - \sin v$.

4.10. $z = x^2y + 2y$, де $x = 5u^2v$, $y = uv^3$.

4.11. $z = x^2 \sin y$, де $x = 3uv$, $y = u^3 - 2v$.

4.12. $z = \cos y - 3x^2$, де $x = 2u - v$, $y = \dfrac{3u}{v^2}$.

4.13. $z = xy^3 + \ln x$, де $x = v + 3u^2$, $y = 5uv$.

4.14. $z = x^4 - 3\sin y$, де $x = u - 4v^2$, $y = v - u^3$.

4.15. $z = \arcsin x + 3\ln y$, де $x = 5uv$, $y = u + v$.

4.16. $z = y\ln x - x$, де $x = 4v - u$, $y = \dfrac{v}{2u}$.

4.17. $z = \mathrm{arctg} y - 3x^2$, де $x = 2uv$, $y = u^2 - 3v$.

4.18. $z = x^4 y - \cos x$, де $x = u - 5v$, $y = 3uv^2$.

4.19. $z = xy + x^2 y^3$, де $x = 5u + 2v$, $y = v\sin u$.

4.20. $z = \ln x - 2x\sin y$, де $x = uv$, $y = v^2 - 2u$.

4.21. $z = xy^3 - \mathrm{tg} y$, де $x = v - u$, $y = -2uv$.

4.22. $z = \mathrm{ctg} x + 2e^y$, де $x = 2u + v$, $y = u^v$.

4.23. $z = x^3 - 2x\ln y$, де $x = u\cos v$, $y = v - 3u$.

4.24. $z = e^x - 2xy^3$, де $x = ve^u$, $y = 2u + v$.

4.25. $z = 3e^y + xy$, де $x = v - \sin u$, $y = 3ve^u$.

4.26. $z = 2x^3 \cos y$, де $x = 5u - v$, $y = uv^2$.

4.27. $z = \ln(xy)$, де $x = ue^v$, $y = 3v - u$.

4.28. $z = x^4 - 2\cos y$, де $x = \sin u - 2v$, $y = ve^u$.

4.29. $z = xy^3 - \ln y$, де $x = v\ln u$, $y = v - 2u$.

4.30. $z = x^4 y^3 + \dfrac{3x^2}{y}$, де $x = v^2 + u$, $y = \dfrac{\sin v}{u}$.

Завдання 5. Знайти похідну функції $z = f\left(x,\ y\right)$ у точці $P_1\left(x_1;\ y_1\right)$ в напрямі від цієї точки до точки $P_2\left(x_2;\ y_2\right)$.

5.1. $z = x^4 - 3x^2y^2 + 2xy + 1$, $P_1\left(1;\ -1\right)$, $P_2\left(5;\ 2\right)$.

5.2. $z = 3x^2 - 2xy^2 + y - 3$, $P_1\left(2;\ -2\right)$, $P_2\left(6;\ 1\right)$.

5.3. $z = 2x^3 - 3x^2y + 2x - y + 1$, $P_1\left(2;\ 3\right)$, $P_2\left(-2;\ 6\right)$.

5.4. $z = 3x^2 - 4xy^2 + 3y - 5$, $P_1\left(1;\ 3\right)$, $P_2\left(-3;\ 0\right)$.

5.5. $z = 4x^2y - y^3 + 2x + 4$, $P_1\left(0;\ 1\right)$, $P_2\left(3;\ -3\right)$.

5.6. $z = x^4 + 2x^2y^2 - 3x + 1$, $P_1\left(1;\ 1\right)$, $P_2\left(5;\ -2\right)$.

5.7. $z = 2x^3 - 3xy^2 + 2x - y$, $P_1\left(2;\ 1\right)$, $P_2\left(-2;\ -2\right)$.

5.8. $z = xy^4 - 3y^2 - 2x + y + 4$, $P_1\left(1;\ 2\right)$, $P_2\left(5;\ -1\right)$.

5.9. $z = x^3 + 2x^2y + x - 3y + 1$, $P_1\left(-1;\ 1\right)$, $P_2\left(2;\ -3\right)$.

5.10. $z = 4x^2 - 3xy^2 + 2x + 5y + 1$, $P_1\left(1;\ 1\right)$, $P_2\left(4;\ -3\right)$.

5.11. $z = e^x - 3x^2y^2 + 2xy - 3$, $P_1\left(0;\ 2\right)$, $P_2\left(4;\ -1\right)$.

5.12. $z = \cos x - 2x^2y + y^3 - 3$, $P_1\left(0;\ -1\right)$, $P_2\left(4;\ 2\right)$.

5.13. $z = x^4 + 2xy^2 - y^3 + 1$, $P_1\left(1;\ 1\right)$, $P_2\left(5;\ -2\right)$.

5.14. $z = 3x^2 + 4xy^2 + 2y - 1$, $P_1\left(2;\ 0\right)$, $P_2\left(5;\ -4\right)$.

5.15. $z = x^5 - x^2y + 2xy^2 - 3$, $P_1\left(1;\ -1\right)$, $P_2\left(5;\ 2\right)$.

5.16. $z = x^3 + x\cos y - y^2 - 2$, $P_1\left(1;\ 0\right)$, $P_2\left(-3;\ 3\right)$.

5.17. $z = 2x^3 - 4x^2y + 3x - y + 1$, $P_1\left(1;\ 1\right)$, $P_2\left(4;\ -3\right)$.

5.18. $z = x^4 - 4xy + 2y^2 - 3$, $P_1(1;\ 3)$, $P_2(-3;\ 0)$.

5.19. $z = 3x^2y - y^2 + 2x + 3$, $P_1(1;\ -1)$, $P_2(5;\ 2)$.

5.20. $z = x^3 - 2xy^2 + e^y - 3$, $P_1(2;\ 0)$, $P_2(-1;4)$.

5.21. $z = xy^2 - 2x^3y + 4x - 3$, $P_1(2;\ -3)$, $P_2(5;1)$.

5.22. $z = 2x^3 - 3y^2 + 4x - 5$, $P_1(1;\ 2)$, $P_2(5;\ -1)$.

5.23. $z = x^3 - 2x^2y^2 + 4y - x$, $P_1(1;\ 3)$, $P_2(-3;\ 0)$.

5.24. $z = 3x^4 - 2x^2y + 3y - 4$, $P_1(2;\ -2)$, $P_2(6;1)$.

5.25. $z = 4e^x + 2xy^2 - x\ln y + 5$, $P_1(0;\ 1)$, $P_2(-3;\ 5)$.

5.26. $z = x^4 + 3x^2y - 2y^3 - 1$, $P_1(1;1)$, $P_2(-2;\ 5)$.

5.27. $z = 7x^2 - 2xy^3 + y - 3x$, $P_1(1;\ -2)$, $P_2(-3;1)$.

5.28. $z = x^3 - 2x\sin y + 5y - 4$, $P_1(2;\ 0)$, $P_2(6;\ -3)$.

5.29. $z = 3\cos x - 4xy^3 + 2y - 1$, $P_1(0;\ -2)$, $P_2(4;1)$.

5.30. $z = 3x^2y - xy^2 + 5y - 3x$, $P_1(-1;\ -2)$, $P_2(2;\ 2)$.

<u>Завдання 6.</u> Знайти градієнт функції $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x;\ y)$.

6.1. $z = \dfrac{xy+1}{x+y}$, $P(1;\ 3)$.

6.2. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x+y+1}$, $P(1;\ 1)$.

6.3. $z = \dfrac{xy+x+y}{x-y}$, $P(1;\ -2)$.

6.4. $z = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$, $P(2;\ -1)$.

6.5. $z = \dfrac{2xy}{x-y}$, $P(3;\ 2)$.

6.6. $z = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x-y}$, $P(1;\ 2)$.

6.7. $z = \dfrac{x^2+xy}{x-y}$, $P(2;\ 3)$.

6.8. $z = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$, $P(1;\ -3)$.

6.9. $z=\dfrac{x^2+2xy}{3x-2y}$, $P(1;\ 2)$.

6.10. $z=\dfrac{xy}{x+2y}$, $P(1;\ -1)$.

6.11. $z=\dfrac{xy+y}{x^2-y}$, $P(2;\ -2)$.

6.12. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$, $P(1;\ -1)$.

6.13. $z=\dfrac{x^2-2y}{2x+3y}$, $P(2;\ -2)$.

6.14. $z=\dfrac{x+2y}{2x+y}$, $P(-1;\ 3)$.

6.15. $z=\dfrac{x-y}{1+xy}$, $P(2;\ -1)$.

6.16. $z=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$, $P(1;\ -1)$.

6.17. $z=\dfrac{2-xy}{x+2y}$, $P(1;\ 3)$.

6.18. $z=\dfrac{x^2y-xy^2}{x+y}$, $P(-1;\ -1)$.

6.19. $z=\dfrac{x+y^2}{x^2-y}$, $P(1;\ -2)$.

6.20. $z=\dfrac{x^3+y^2}{x+y^2}$, $P(2;\ -1)$.

6.21. $z=\dfrac{xy^2}{x^2-y}$, $P(3;\ 4)$.

6.22. $z=\dfrac{xy-y^2}{x^2-y}$, $P(1;\ 2)$.

6.23. $z=\dfrac{2x^2+3xy}{3x-2y}$, $P(2;\ 3)$.

6.24. $z=\dfrac{3x+y^2}{x^2+4y}$, $P(1;\ -2)$.

6.25. $z=\dfrac{3x-y^3}{x^3+y}$, $P(1;\ 3)$.

6.26. $z=\dfrac{2x+y^2}{x^2+3y}$, $P(2;\ -1)$.

6.27. $z=\dfrac{xy+y^2}{x^2-xy}$, $P(2;\ -1)$.

6.28. $z=\dfrac{4x-y^2}{x^2+3y}$, $P(-1;\ 1)$.

6.29. $z=\dfrac{x-5y}{4x+3y}$, $P(2;\ -2)$.

6.30. $z=\dfrac{x+y^2}{x^2-y}$, $P(1;\ -3)$.

Завдання 7. Дослідити функцію $z=f(x,y)$ на екстремуми.

7.1. $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$.

7.2. $z=x^3+8y^3-6xy+5$.

7.3. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$.

7.4. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

7.5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

7.6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

7.7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

7.8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

7.9. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

7.10. $z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$.

7.11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

7.12. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.

7.13. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.

7.14. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

7.15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

7.16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

7.17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

7.18. $z = xy(12 - x - y)$.

7.19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

7.20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

7.21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

7.22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

7.23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

7.24. $z = xy(6 - x - y)$.

7.25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

7.26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

7.27. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

7.28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

7.29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

7.30. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2$.

Завдання 8. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = f(x, y)$ в області D, що обмежена заданими лініями.

8.1. $z = 3x + y - xy, \quad D: y = x, \quad y = 4, \quad x = 0$.

8.2. $z = xy - x - 2y, \quad D: x = 3, \quad y = x, \quad y = 0$.

8.3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2$.

8.4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.

8.5. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x - y + 1 = 0, \quad x = 3, \quad y = 0$.

8.6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.

8.7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 6$.

8.8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1$.

8.9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 3 = 0$.

8.10. $z = x^2 + 2xy - 10, \quad D: y = 0, \quad y = x^2 - 4$.

8.11. $z = xy - 2x - y, \quad D: x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 4$.

8.12. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy, \quad D: y = 8, \quad y = 2x^2$.

8.13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y - 1 = 0$.

8.14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1, \quad D: y = \dfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}, \quad y = 0$.

8.15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1, \quad D: x = -3, \quad y = 0, \quad x + y + 1 = 0$.

8.16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1, \quad D: x = 5, \quad y = 0, \quad x - y - 1 = 0$.

8.17. $z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{1}{2}y^2 - 4x, \quad D: y = 2x, \quad y = 2, \quad x = 0$.

8.18. $z = x^2 - 2xy + \dfrac{5}{2}y^2 - 2x, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0, \quad y = 2$.

8.19. $z = xy - 3x - 2y, \quad D: x = 0, \quad x = 4, \quad y = 0, \quad y = 4$.

8.20. $z = x^2 + xy - 2, \quad D: y = 4x^2 - 4, \quad y = 0$.

8.21. $z = x^2 y(4 - x - y), \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad y = 6 - x$.

8.22. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad D: x = 0, \quad x = 2, \quad y = -1, \quad y = 2$.

8.23. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2, \quad D: x + 2y = 4, \quad x - 2y = 4$.

8.24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x, \quad D: x = 3, \quad y = 0, \quad y = x + 1$.

8.25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y, \quad D: x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 2$.

8.26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y, \quad D: y = x + 2, \quad y = 0, \quad x = 2$.

8.27. $z = 4 - 2x^2 - y^2, \quad D: y = 0, \quad y = \sqrt{1 - x^2}$.

8.28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4, \quad D: x = -1, \quad x = 1, \quad y = -1, \quad y = 1$.

8.29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2, \quad D: x + y + 2 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0$.

8.30. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2, \quad D: x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 6$.

Завдання 9. Знайти екстремуми функції $z = f(x, y)$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$.

9.1. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.2. $z = 4y^3 + 3x^2 y - 2x^2 - 108x - 3$ за умови $3y - x - 4 = 0$.

9.3. $z = 5x^3 + 7xy^2 - 3y^2 - 15x - 4$ за умови $2x + 4y + 1 = 0$.

9.4. $z = 6y^3 + 10x^2 y + 2x^2 - 2y + 9$ за умови $3x - y + 5 = 0$.

9.5. $z = 7x^3 + 6xy^2 + y^2 - \frac{21}{4}x + 1$ за умови $4x - 3y + 1 = 0$.

9.6. $z = 5y^3 + 7x^2 y - 3x^2 - 15y + 2$ за умови $2y - 2x - 3 = 0$.

9.7. $z = 6x^3 + 10xy^2 + 2y^2 - 2x + 7$ за умови $x + 2y - 2 = 0$.

9.8. $z = 3y^3 + \frac{3}{2}x^2 y - 2x^2 - 25y + 3$ за умови $y - 3x - 1 = 0$.

9.9. $z = 2x^3 + 5xy^2 + 8y^2 - 24x - 10$ за умови $2y - 3x + 2 = 0$.

9.10. $z = 2y^3 + 5x^2 y + 8x^2 - 24y + 8$ за умови $4x + 2y - 3 = 0$.

9.11. $z = 4x^3 + 3xy^2 - 2y^2 - 108x - 6$ за умови $2y - 4x + 3 = 0$.

9.12. $z = y^3 + 4x^2 y + 5x^2 - 48y + 7$ за умови $x + 2y - 1 = 0$.

9.13. $z = 3x^3 - 4y^2 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $2y - 6x - 3 = 0$.

9.14. $z = 7y^3 + 6x^2 y + x^2 - \frac{21}{4}y + 4$ за умови $3x + 2y + 3 = 0$.

9.15. $z = 3x^3 + \frac{3}{2}xy^2 - 2y^2 - 25x - 5$ за умови $2x - 4y - 3 = 0$.

9.16. $z = 8y^3 + 2y^3 + 5x^2 y - 24y - 3$ за умови $x + 4y - 4 = 0$.

9.17. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.18. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ за умови $3x + 2y - 4 = 0$.

9.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ за умови $2x - 3y - 3 = 0$.

9.20. $z = y^3 + x^2 - 6xy - 39y + 18x + 5$ за умови $x - 2y + 4 = 0$.

9.21. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$ за умови $x + 2y - 3 = 0$.

9.22. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$ за умови $2y - 2x + 3 = 0$.

9.24. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.25. $z = 3x^3 + 2xy^2 - 49x + 4$ за умови $2y - 6x - 3 = 0$.

9.26. $z = x^3 + 4xy^2 + 5y^2 - 48x + 1$ за умови $x - 3y + 2 = 0$.

9.27. $z = x^3 + 6y^2 - 4x + 5$ за умови $4x - 3y + 5 = 0$.

9.28. $z = x^2 + y^3 + 5y^2 + 48x + 2$ за умови $2x - 4y + 3 = 0$.

9.29. $z = x^3 + 3xy^2 + 4y^2 - 5x + 2$ за умови $3x - 4y + 1 = 0$.

9.30. $z = x^3 + 2xy^2 + y^2 - 6x + 7$ за умови $5x + y - 3 = 0$.

Невизначений інтеграл

Завдання 10. Знайти інтеграл.

10.1. $\int \left(3x^5 + \cos x - \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx$.

10.2. $\int \left(4x^3 - 5e^x + 1 \right) dx$.

10.3. $\int \left(\frac{3}{4}\sqrt{x} + 3^x - \sin x \right) dx$.

10.4. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} + 4\mathrm{tg}x - 9 \right) dx$.

10.5. $\int \left(8x - \frac{9}{\cos^2 x} + 2 \right) dx$.

10.6. $\int \left(2x^3 - \sqrt{x} + \frac{4}{x} \right) dx$.

10.7. $\int \left(\sqrt[3]{x} - \mathrm{ctg}x + 3 \right) dx$.

10.8. $\int \left(3x^2 - \frac{5}{\sin^2 x} + 4 \right) dx$.

10.9. $\int \left(5x^4 - 3e^x + \frac{8}{x^3} \right) dx$.

10.10. $\int \left(\cos x - \frac{4}{x^2 + 16} + x \right) dx$.

10.11. $\int\left(5x-3\operatorname{ctg}x+\frac{4}{x^3}\right)dx$.

10.12. $\int\left(4^x-\frac{2}{\sqrt{x^3}}+1\right)dx$.

10.13. $\int\left(x^2-\frac{3}{\sin^2 x}-5\right)dx$.

10.14. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-2x^5+3}{x}dx$.

10.15. $\int\left(2x^3-\frac{4}{\sqrt{5+x^2}}+7\right)dx$.

10.16. $\int\left(4x^5+\frac{6}{\cos^2 x}-5\right)dx$.

10.17. $\int\left(7\sqrt[4]{x^3}-3e^x+\frac{4}{x}\right)dx$.

10.18. $\int\left(3x^2-5\operatorname{tg}x+2\right)dx$.

10.19. $\int\left(7x^6+\frac{3}{x^2-9}+2\right)dx$.

10.20. $\int\left(5x^4+4\sin x-\frac{2}{x}\right)dx$.

10.21. $\int\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{2}{x^3}+4\right)dx$.

10.22. $\int\left(2x^3+\frac{6}{\cos^2 x}-5\right)dx$.

10.23. $\int\frac{\sqrt[5]{x}-2x^3+4}{x^2}dx$.

10.24. $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{5}{x^4}+2\right)dx$.

10.25. $\int\left(\sqrt[5]{x^3}-\frac{4}{x^5}+2\sin x\right)dx$.

10.26. $\int\left(3x-\frac{5}{x^2+4}-1\right)dx$.

10.27. $\int\left(3\operatorname{tg}x-\frac{2}{x^4}+5\right)dx$.

10.28. $\int\left(4x^3-\cos x+\frac{6}{x^3}\right)dx$.

10.29. $\int\left(\frac{3}{5+x^2}-\frac{7}{x^3}+5x\right)dx$.

10.30. $\int\left(3\operatorname{ctg}x-5\sqrt[3]{x^2}+2^x)\right)dx$.

<u>Завдання 11.</u> Знайти інтеграл.

11.1. $\int\sqrt{3+x}\,dx$.

11.2. $\int\sin\left(3x-2\right)dx$.

11.3. $\int\sqrt[3]{(1+x)^2}\,dx$.

11.4. $\int\frac{dx}{\cos^2\left(4x-3\right)}$.

11.5. $\int \frac{dx}{\sin^2(3x+7)}$.

11.6. $\int e^{2x+3}\,dx$.

11.7. $\int (5-4x)^7\,dx$.

11.8. $\int \operatorname{tg}(2+3x)\,dx$.

11.9. $\int \sin(5+3x)\,dx$.

11.10. $\int \sqrt[3]{2+5x}\,dx$.

11.11. $\int \frac{3}{\sqrt{5-4x}}\,dx$.

11.12. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x-5)}$.

11.13. $\int \operatorname{ctg}(4x-3)\,dx$.

11.14. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}}$.

11.15. $\int \frac{dx}{(5x+6)^2}$.

11.16. $\int 3^{2x-5}\,dx$.

11.17. $\int \frac{5}{\cos^2(4x+7)}\,dx$.

11.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}$.

11.19. $\int \sin(7x-5)\,dx$.

11.20. $\int \frac{dx}{(3x-5)^4}$.

11.21. $\int \frac{dx}{(2+x)^3}$.

11.22. $\int \operatorname{ctg}(5-3x)\,dx$.

11.23. $\int e^{5x+4}\,dx$.

11.24. $\int \sqrt[5]{(6-5x)^2}\,dx$.

11.25. $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$.

11.26. $\int \sin(4x+3)\,dx$.

11.27. $\int \sqrt{3-4x}\,dx$.

11.28. $\int \frac{7\,dx}{\sin^2(2x-5)}$.

11.29. $\int \operatorname{ctg}(7x+4)\,dx$.

11.30. $\int \frac{6\,dx}{2x+5}$.

Завдання 12. Знайти інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

12.1. $\int \frac{dx}{(3x+2)\ln^2(3x+2)}$.

12.2. $\int \frac{\mathrm{tg}^5 x}{\cos^2 x}\, dx$.

12.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin^3 x}$.

12.4. $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{\ln^3(1-x)}}$.

12.5. $\int \frac{5}{\mathrm{ctg}^4 x \sin^2 x}\, dx$.

12.6. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{1+x^2}\, dx$.

12.7. $\int \frac{5}{\left(1+x^2\right)\sqrt{\mathrm{arctg}\, x}}\, dx$.

12.8. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$.

12.9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$.

12.10. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

12.11. $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$.

12.12. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2(x+1)}}{x+1}\, dx$.

12.13. $\int \frac{2}{\sin^2 x\sqrt{\mathrm{ctg} x}}\, dx$.

12.14. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$.

12.15. $\int \frac{\sqrt{\mathrm{arcctg} x}}{x^2+1}\, dx$.

12.16. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2+2)}}$.

12.17. $\int \frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}\, dx$.

12.18. $\int \frac{3\, dx}{\cos^2 x\, \sqrt[5]{\mathrm{tg}^4 x}}$.

12.19. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

12.20. $\int \frac{4}{\left(1+x^2\right)\sqrt[3]{\mathrm{arctg}\, x}}\, dx$.

12.21. $\int \frac{e^{\mathrm{tg} x}}{\cos^2 x}\, dx$.

12.22. $\int \cos x\, \sqrt{\sin^3 x}\, dx$.

12.23. $\int \frac{\ln^3(x-5)}{x-5}dx$.

12.24. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$.

12.25. $\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\operatorname{arcctg}^4 x}$.

12.26. $\int \frac{\sqrt[3]{\log_2(x-8)}}{x-8}dx$.

12.27. $\int \frac{e^{\frac{2}{x}}}{3x^2}dx$.

12.28. $\int \frac{5x^2\,dx}{\sqrt{x^3-4}}$.

12.29. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

12.30. $\int 5x\ \operatorname{tg}\left(1+x^2\right)dx$.

Завдання 13. Знайти інтеграл за формулою інтегрування частинами.

13.1. $\int(2x-7)\cos x\,dx$.

13.2. $\int(3x-4)e^x\,dx$.

13.3. $\int(x-5)\ln x\,dx$.

13.4. $\int 3\arcsin x\,dx$.

13.5. $\int(4x+3)\sin x\,dx$.

13.6. $\int x^3\ln x\,dx$.

13.7. $\int(2x-9)3^x\,dx$.

13.8. $\int x\operatorname{arctg} x\,dx$.

13.9. $\int 4x^3\ln x\,dx$.

13.10. $\int(3x+5)\sin x\,dx$.

13.11. $\int x^2e^{-x}\,dx$.

13.12. $\int \operatorname{arcctg} x\,dx$.

13.13. $\int(x-3)\log_2 x\,dx$.

13.14. $\int(3x+4)\cos x\,dx$.

13.15. $\int(6x+2)e^x\,dx$.

13.16. $\int 3x^2\ln x\,dx$.

13.17. $\int \arccos x\,dx$.

13.18. $\int(5x-2)3^x\,dx$.

13.19. $\int(5x+4)\cos x\,dx$.

13.20. $\int 7x\ln x\,dx$.

13.21. $\int(2x+3)\log_3 x\,dx$.

13.22. $\int(3x-5)\sin x\,dx$.

13.23. $\int (3x-4)e^x\,dx$.

13.24. $\int 4x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

13.25. $\int x\cos(x+6)\,dx$.

13.26. $\int (3x^2-4)\ln x\,dx$.

13.27. $\int \ln(2x-1)\,dx$.

13.28. $\int (2x+3)\sin x\,dx$.

13.29. $\int (5x-4)3^x\,dx$.

13.30. $\int 2x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

<u>Завдання 14.</u> Знайти інтеграл.

14.1. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}\,dx$.

14.2. $\int \frac{2x-5}{3x^2+x+1}\,dx$.

14.3. $\int \frac{5x-1}{3x^2-2x+6}\,dx$.

14.4. $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}\,dx$.

14.5. $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}}\,dx$.

14.6. $\int \frac{x+4}{4x^2-7x+1}\,dx$.

14.7. $\int \frac{5x+3}{2x^2-6x-8}\,dx$.

14.8. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}\,dx$.

14.9. $\int \frac{5x-2}{3x^2-5x+2}\,dx$.

14.10. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}\,dx$

14.11. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}\,dx$.

14.12. $\int \frac{x+1}{3x^2-2x-3}\,dx$.

14.13. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}\,dx$.

14.14. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}\,dx$.

14.15. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$.

14.16. $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}}\,dx$.

14.17. $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-4x-1}}\,dx$.

14.18. $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}\,dx$.

14.19. $\int \frac{2x+6}{3x^2+x+4}dx$.

14.20. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx$.

14.21. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

14.22. $\int \frac{3x-7}{4x^2-4x+5}dx$.

14.23. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$.

14.24. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$.

14.25. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$.

14.26. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+x+5}$.

14.27. $\int \frac{3x+8}{4x^2+6x-13}dx$.

14.28. $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}}dx$.

14.29. $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx$.

14.30. $\int \frac{3x+5}{2x^2+3x-4}dx$.

Завдання 15. Знайти інтеграл.

15.1. $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$.

15.2. $\int \frac{43x-67}{(x-1)(x^2-x-12)}dx$.

15.3. $\int \frac{8x\,dx}{(x^2+6x+5)(x+3)}$.

15.4. $\int \frac{6x^2+6x-6}{(x+1)(x^2+x-2)}dx$.

15.5. $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$.

15.6. $\int \frac{3x^2+3x-24}{(x^2-x-2)(x-3)}dx$.

15.7. $\int \frac{3x^2-15}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

15.8. $\int \frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

15.9. $\int \frac{6x\,dx}{x^3+2x^2-x-2}$.

15.10. $\int \frac{4x^2+32x+52}{(x^2+6x+5)(x+3)}dx$.

15.11. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$.

15.12. $\int \frac{6x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}dx$.

15.13. $\int \frac{6x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

15.14. $\int \frac{2x^2-26}{(x^2+4x+3)(x+5)}dx$.

15.15. $\int \frac{2x^2+12x-6}{(x+1)(x^2+8x+15)}dx$.

15.16. $\int \frac{7x^2-17x}{(x-2)(x^2-2x-3)}dx$.

15.17. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x-1)(x^2+5x+6)}dx$.

15.18. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$.

15.19. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx$.

15.20. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

15.21. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx$.

15.22. $\int \frac{x^3-3}{(x-1)(x^2-1)}dx$.

15.23. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$.

15.24. $\int \frac{4x\,dx}{(x^2-1)(x+1)}$.

15.25. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx$.

15.26. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$.

15.27. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$.

15.28. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx$.

15.29. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$.

15.30. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

Завдання 16. Знайти інтеграл.

16.1. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.

16.2. $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$.

16.3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-4}}$.

16.4. $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

16.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$.

16.6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

16.7. $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{x-4\sqrt[3]{x^2}}$

16.8. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}\ dx$ **.**

16.9. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}\ dx}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}$ **.**

16.10. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x-8}}$

16.11. $\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1-\sqrt[3]{x}}$ **.**

16.12. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt[5]{x+1}}$.

16.13. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

16.14. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\ dx$.

16.15. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}}$.

16.16. $\int \frac{\sqrt{x+3}\,dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$.

16.17. $\int \frac{(\sqrt{x}\text{-}1)\ dx}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}$.

16.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

16.19. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}\,dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}$.

16.20. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}\ dx$.

16.21. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1-\sqrt[4]{x}}$.

16.22. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}\ dx$.

16.23. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

16.24. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}\ dx$.

16.25. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x+6}}$.

16.26. $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}\ dx$.

16.27. $\int \frac{(x+1)\ dx}{x\sqrt{x-1}}$.

16.28. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+2}}\ dx$.

16.29. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x-6}}$.

16.30. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}\ dx$.

Завдання 17. Знайти інтеграл.

17.1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

17.2. $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$.

17.3. $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$.

17.4. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

17.5. $\int \frac{dx}{3+6\sin x-2\cos x}$.

17.6. $\int \frac{dx}{3+4\sin x+2\cos x}$.

17.7. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\sin x}$.

17.8. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$.

17.9. $\int \frac{dx}{4+3\sin x-2\cos x}$.

17.10. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$.

17.11. $\int \frac{dx}{5+4\sin x+3\cos x}$.

17.12. $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$.

17.13. $\int \frac{dx}{7+6\sin x-5\cos x}$.

17.14. $\int \frac{dx}{5-3\sin x+6\cos x}$.

17.15. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

17.16. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$.

17.17. $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$.

17.18. $\int \frac{dx}{7+4\sin x+6\cos x}$.

17.19. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$.

17.20. $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$.

17.21. $\int \frac{dx}{5+4\sin x+6\cos x}$.

17.22. $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$.

17.23. $\int \frac{dx}{7-3\sin x+2\cos x}$.

17.24. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$.

17.25. $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$.

17.26. $\int \frac{dx}{2+3\sin x-2\cos x}$.

17.27. $\int \frac{dx}{1-\sin x+3\cos x}$.

17.28. $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$.

17.29. $\int \frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$.

17.30. $\int \frac{4\,dx}{3+2\sin x-5\cos x}$.

Визначений інтеграл

<u>Завдання 18.</u> Обчислити інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца.

18.1. $\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4\,dx}{x^2+5}$

18.2. $\int\limits_{-3}^{0} \frac{3\,dx}{\sqrt{25+5x}}$

18.3. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7\,dx}{4\sin^2 3x}$

18.4. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

18.5. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} 3\sin\frac{x}{2}\,dx$

18.6. $\int\limits_{3}^{8} 6\sqrt{x+1}\,dx$

18.7. $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12\,\mathrm{ctg}\,3x\,dx$

18.8. $\int\limits_{0}^{1} \frac{2\,dx}{\sqrt{4-3x}}$

18.9. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$

18.10. $\int\limits_{1}^{e} \left(3+\frac{2}{x}\right)dx$

18.11. $\int\limits_{1}^{2} \frac{3\,dx}{2\sqrt{x^2+16}}$

18.12. $\int\limits_{0}^{\frac{5}{2}} \frac{7\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$

18.13. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3\cos^2 5x}$

18.14. $\int\limits_{3}^{5} \frac{5\,dx}{3-x^2}$

18.15. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(2x+\cos\frac{x}{3}\right)dx$

18.16. $\int\limits_{0}^{7} \sqrt[3]{x+1}\,dx$

18.17. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(3x-2\,\mathrm{tg}\,x\right)dx$

18.18. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{4\,dx}{11+x^2}$

18.19. $\int\limits_{-1}^{0} \left(4+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

18.20. $\int\limits_{1}^{3} \left(4+\frac{2}{x^2}\right)dx$

18.21. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dx}{5\cos^2 x}$

18.22. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$

18.23. $\int\limits_{0}^{1} \left(3x^2-2^x\right)dx$

18.24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

18.25. $\int\limits_{0}^{1} \left(3e^x-2\sqrt{7x}\right)dx$

18.26. $\int\limits_{1}^{2} \left(4x+9\right)^3 dx$

18.27. $\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} \left(4x-3\,\mathrm{tg}\,2x\right)dx$

18.28. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(4x+3\cos 5x\right)dx$

18.29. $\int\limits_{1}^{2} \frac{6\,dx}{x^2-9}$

18.30. $\int\limits_{1}^{2} \left(3x+\frac{4}{x^3}\right)dx$

Завдання 19. Обчислити інтеграл, використовуючи відповідну заміну змінної.

19.1. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

19.2. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$.

19.3. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^3+2}$.

19.4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

19.5. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx$.

19.6. $\int\limits_0^1 \frac{3x\,dx}{x^2+1}$.

19.7. $\int\limits_0^{-3} \frac{4x\,dx}{\sqrt{25+3x^2}}$.

19.8. $\int\limits_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$.

19.9. $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$.

19.10. $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$.

19.11. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{1-\cos x}$.

19.12. $\int\limits_2^5 \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

19.13. $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$.

19.14. $\int\limits_{\frac{-\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cos x\,dx$.

19.15. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$.

19.16. $\int\limits_0^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

19.17. $\int\limits_0^1 3x^2 e^{x^3}\,dx$.

19.18. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$.

19.19. $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

19.20. $\int\limits_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$.

19.21. $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

19.22. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

19.23. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{4-3x^2}}$.

19.24. $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{12\,\mathrm{ctg}\,3x}{\sin^2 3x} dx$.

19.25. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x\, dx$.

19.26. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

19.27. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

19.28. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{2x^2\, dx}{4x^3-9}$.

19.29. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x\; dx$.

19.30. $\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x\, dx}{\cos^2\left(x^2\right)}$.

<u>Завдання 20.</u> Обчислити інтеграл за формулою інтегрування частинами.

20.1. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x-7\right)\cos 2x\, dx$.

20.2. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \arccos\frac{x}{3} dx$.

20.3. $\int\limits_{1}^{2} \left(3x+5\right)e^{3x}\, dx$.

20.4. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \left(x-4\right)\cos 2x\, dx$.

20.5. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x\, dx$.

20.6. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x+2\right)\sin\frac{x}{2} dx$.

20.7. $\int\limits_{6}^{7} \ln\left(x-5\right) dx$.

20.8. $\int\limits_{0}^{2} \left(4x-9\right)3^x\, dx$.

20.9. $\int\limits_{0}^{\pi} \left(3x+4\right)\cos\frac{x}{2} dx$.

20.10. $\int\limits_{1}^{e} x^3 \ln x\, dx$.

20.11. $\int\limits_{-1}^{2} \left(2x-5\right)e^{-x} dx$.

20.12. $\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{9}} 6\operatorname{arctg} 3x\, dx$.

20.13. $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} (x+3)\sin 2x\,dx$.

20.14. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 4x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

20.15. $\int\limits_{1}^{3} (5x+2)\ln x\,dx$.

20.16. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3x+4)\cos x\,dx$.

20.17. $\int\limits_{0}^{1} \arccos x\,dx$.

20.18. $\int\limits_{0}^{1} (2x-3)e^{x}\,dx$.

20.19. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (6x+7)e^{2x}dx$.

20.20. $\int\limits_{1}^{4} \sqrt{x}\ln x\,dx$.

20.21. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3x-2)\sin x\,dx$.

20.22. $\int\limits_{1}^{3} (2x+5)e^{x}\,dx$.

20.23. $\int\limits_{2}^{4} x\ln(x-1)\,dx$.

20.24. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (x-1)\cos x\,dx$.

20.25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

20.26. $\int\limits_{-7}^{1} \ln(x+8)\,dx$.

20.27. $\int\limits_{1}^{2} \ln(2x-1)\,dx$.

20.28. $\int\limits_{1/2}^{1} \arccos x\,dx$.

20.29. $\int\limits_{0}^{3} (x-5)2^{x}\,dx$.

20.30. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (x-4)\sin x\,dx$.

Завдання 21. Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність.

21.1. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{16x^4+1}$, б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}\,dx$.

21.2. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)}\,dx$, б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

21.3. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{16x^4+1}}$, б) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

21.4. а) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$, б) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

21.5. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$, б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}\,dx$.

21.6. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$, б) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

21.7. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-3x}\,dx$, ; б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

21.8. а) $\int\limits_{4}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$, б) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}\,dx$.

21.9. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2-4x}$, б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x\,dx}{1-x^2}$.

21.10. а) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$, б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}\,dx$.

21.11. а) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{5\operatorname{arctg} 2x}{3(1+4x^2)}\,dx$, б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

21.12. а) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg}^2 3x}$, б) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

21.13. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{4x^2+4x+5}$, б) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$.

21.14. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

21.15. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}\,dx$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

21.16. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\left(2x-1\right)^2}$.

21.17. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}}$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x\ln x\,dx$.

21.18. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{x\,dx}{\left(x^2+1\right)^2}$, б) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

21.19. а) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{3\,dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$, б) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$.

21.20. а) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x\,dx$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

21.21. а) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2-4x}$, б) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}$.

21.22. а) $\displaystyle\int_{1/3}^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^3 x}$, б) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

21.23. а) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\arcsin x}}$, б) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

21.24. а) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+2x\right)}$, б) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

21.25. а) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$, б) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x}}$.

21.26. а) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\cos x\,dx$, б) $\displaystyle\int_{2}^{5} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

21.27. а) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$, б) $\displaystyle\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

21.28. а) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$, б) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{3x\,dx}{\sqrt[4]{\left(16-x^2\right)^3}}$.

21.29. а) $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\left(\ln x-1\right)^2}$, б) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

21.30. а) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$, б) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3-1}}$.

Завдання 22. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

22.1. $y=x^2-2x+4,\ y=3x-2$.

22.2. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ y=0,\ x=1,\ x=2$.

22.3. $y=x^2-3x+2,\ y=x+2$.

22.4. $y=x^2-2,\ y=3x+2$.

22.5. $y=x^2,\ \ y=3-x$.

22.6. $y=x^2+1, y=x-1, x=0, x=3$.

22.7. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ \ y=x,\ x=0,\ x=2$.

22.8. $y=\sqrt{x},\ \ y=x^3$.

22.9. $y=2x^2,\ \ y=x+6$

22.10. $y=e^x,\ y=x,\ x=-1,\ x=1$.

22.11. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x$.

22.12. $y=\dfrac{1}{1+x^2},\ \ y=\dfrac{x^2}{2}$.

22.13. $y=\dfrac{1}{3+x^2},\ \ y=\dfrac{x^2}{4}$.

22.14. $y=\sqrt{4-x^2}, y=0, x=0, x=1$.

22.15. $y=2\sqrt{x},\ \ y=2x^2$.

22.16. $y=3^x,\ \ y=0,\ \ x=1,\ \ x=2$.

22.17. $y^2=9x,\ \ \ y=3x$.

22.18. $y=6x-x^2+3,\ y=x^2+3$.

22.19. $x=\sqrt{4-y^2},\ x=0,\ y=0,\ y=1$.

22.20. $y^2=4x,\ \ \ x^2=4y$.

22.21. $y=3x^2-1,\ \ \ y=4x+3$.

22.22. $y=2x-x^2, y=0, x=0, x=3$.

22.23. $y=-2x^2+1,\ \ \ y=-2x-3$.

22.24. $y=\left(x-1\right)^2,\ y^2=x-1$.

22.25. $y=x^3,\ \ y=1,\ \ x=0$.

22.26. $y=x+1,\ \ y=\cos x,\ \ y=0$.

22.27. $xy=6,\ \ x+y-7=0$.

22.28. $x^2=4y,\ \ \ y=\dfrac{8}{x^2+4}$.

22.29. $y=x^2,\ \ \ y=2-x^2$.

22.30. $y=\sqrt[3]{x}+2,\ y=\dfrac{1}{2}x+2$.

<u>Завдання 23.</u> Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

23.1. $\rho=\dfrac{1}{2}-\sin\varphi$.

23.2. $\rho=3\cos 2\varphi$.

23.3. $\rho=2\left(1-\cos\varphi\right)$.

23.4. $\rho^2=\dfrac{3}{2}\cos 3\varphi$.

23.5. $\rho=2\sin 3\varphi$.

23.6. $\rho=4+\cos\varphi$.

23.7. $\rho^2 = 3\sin 2\varphi$.

23.8. $\rho = \frac{1}{2}(1+\sin\varphi)$.

23.9. $\rho = 1+\cos 2\varphi$

23.10. $\rho = \frac{2}{5}(1+\cos\varphi)$.

23.11. $\rho = 5\sin 4\varphi$.

23.12. $\rho = 2+\sin 4\varphi$.

23.13. $\rho^2 = 1+\cos 2\varphi$.

23.14. $\rho = 1+\cos\varphi$.

23.15. $\rho = 3\cos^2\varphi$.

23.16. $\rho^2 = \frac{3}{2}\sin 4\varphi$.

23.17. $\rho = 1+\sin\varphi$.

23.18. $\rho = 5+\frac{2}{3}\cos 4\varphi$

23.19. $\rho = 5\sin 2\varphi$.

23.20. $\rho = \frac{1}{2}\cos 3\varphi$.

23.21. $\rho^2 = 1+\cos 2\varphi$

23.22. $\rho = 1+\sin\varphi$.

23.23. $\rho = 1+\frac{1}{3}\cos 2\varphi$.

23.24. $\rho = \frac{3}{2}\cos 4\varphi$.

23.25. $\rho = 2-\sin 5\varphi$.

23.26. $\rho^2 = 2+\sin 3\varphi$.

23.27. $\rho = 1+\cos 3\varphi$.

23.28. $\rho^2 = \frac{2}{3}\cos\varphi$.

23.29. $\rho = \frac{1}{4}\cos 7\varphi$.

23.30. $\rho = 4\sin 3\varphi$.

<u>Завдання 24.</u> Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням фігури Φ навколо вказаної осі координат.

24.1. $\Phi: y^2 = 4-x,\ x=0,\ Oy$.

24.2. $\Phi: y=\cos x,\ y=0,\ x=-\frac{\pi}{4},\ x=\frac{\pi}{2},\ Ox$.

24.3. $\Phi: y^2 = 9x,\ y=-x,\ Oy$.

24.4. $\Phi: y^2 = 2x,\ x = \dfrac{3}{2},\ Ox$.

24.5. $\Phi: y = x^3,\ y = 0,\ x = 2,\ Oy$.

24.6. $\Phi: y = 2x - x^2,\ y = 2 - x,\ Ox$.

24.7. $\Phi: y = 4x - x^2,\ y = x,\ Ox$.

24.8. $\Phi: y^2 = x,\ x^2 = y,\ Ox$.

24.9. $\Phi: y^2 + x - 4 = 0,\ x = 0,\ Ox$.

24.10. $\Phi: y = x^2,\ 8x = y^2,\ Oy$.

24.11. $\Phi: y^2 = 4x,\ x^2 = 4y,\ Ox$.

24.12. $\Phi: y = 2 - x,\ x^2 + y^2 = 4,\ Ox$.

24.13. $\Phi: y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi,\ Ox$.

24.14. $\Phi: y = e^x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ Ox$.

24.15. $\Phi: y^2 = \dfrac{4}{3}x,\ x = 3,\ Ox$.

24.16. $\Phi: y = 2x - x^2,\ y = 0,\ Ox$.

24.17. $\Phi: y = \dfrac{x^3}{3},\ x = -2,\ x = 2,\ Ox$.

24.18. $\Phi: xy = 4,\ y = 1,\ y = 2,\ x = 0,\ Ox$.

24.19. $\Phi: y = \dfrac{x^2}{4} - 1,\ y = 0,\ Ox$.

24.20. $\Phi: y^2 = x,\ y = \dfrac{x}{2},\ Ox$.

24.21. $\Phi: xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0,\ Ox$.

24.22. $\Phi: y^2 = \dfrac{3}{2}x,\ x^2 + y^2 = 1,\ Ox$.

24.23. $\Phi: y = 2 - x^2,\ \ y = x^2,\ Ox$.

24.24. $\Phi: y = 8 - x^2,\ \ y = x^2,\ Ox$.

24.25. $\Phi: y = tgx,\ \ y = 0,\ \ x = -\dfrac{\pi}{4},\ \ x = \dfrac{\pi}{4},\ \ Ox$.

24.26. $\Phi: y = x^3,\ \ x = 0,\ \ y = 8,\ Oy$.

24.27. $\Phi: y = 2^x,\ \ y = 4^x,\ \ x = 1,\ \ Ox$.

24.28. $\Phi: 2y = x^2,\ \ 2x + 2y - 3 = 0,\ Ox$.

24.29. $\Phi: y = x - x^2,\ y = 0,\ Ox$.

24.30. $\Phi: y = 2 - \dfrac{x^2}{2},\ \ x + y = 2,\ Oy$.

Диференціальні рівняння

<u>Завдання 25</u>. Розв’язати диференціальне рівняння.

25.1. $xy' = 1 + y^2$.

25.2. $yy'\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+y^2}$.

25.3. $y' = \dfrac{x^2 y + y}{\sqrt{4+y^2}}$.

25.4. $x + xy + y'(y + xy) = 0$, .

25.5. $\left(y - x^2 y\right) y' = 4x - 5xy^2$.

25.6. $y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

25.7. $y'\,tgx = y$.

25.8. $\left(e^{2x} + 5\right) y' = ye^{2x}$.

25.9. $e^{2x}\left(2y - 1\right) y' = y$.

25.10. $\left(x + 4\right) y' = y^2 - 1$.

25.11. $\left(1 + e^x\right) yy' = e^x$.

25.12. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.

25.13. $\left(e^x + 8\right) y' = ye^x$.

25.14. . $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}\,y' = 0$

25.15. $y'ctgx = y^4$.

25.16. $y'y\sqrt{1-x^2} = \sqrt{5+y^2}$.

25.17. $\left(2x - xy^2\right)dx = \left(y + yx^2\right)dy$.

25.18. $y\ln y + xy' = 0$.

25.19. $xy' + y = y^2$.

25.20. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.

25.21. $xy' - 2y = yx^3$.

25.22. $xy' = y\left(1 + \ln y\right)$.

25.23. $\left(3 + e^x\right)yy' = e^x$.

25.24. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}\,yy' = 0$.

25.25. $y'\sin x = y\ln y$.

25.26. $\left(1 + e^x\right)yy' = e^x$.

25.27. $yy' = e^x\left(4 + y^2\right)$.

25.28. $\sqrt{4-x^2}\,y' = 3x + xy^2$.

25.29. $y'ctgy = x^3$.

25.30. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$.

<u>Завдання 26</u>. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння.

26.1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.

26.2. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.

26.3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

26.4. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

26.5. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 5\dfrac{y}{x} + 8$.

26.6. $y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x}$.

26.7. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.

26.8. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$.

26.9. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$.

26.10. $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$.

26.11. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

26.12. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

26.13. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 5$.

26.14. $xy' - y = x\,tg\,\frac{y}{x}$.

26.15. $xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y$.

26.16. $xy' = y + 2x\sin^2\frac{3y}{x}$.

26.17. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 9$.

26.18. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

26.19. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

26.20. $xy' - y = y\ln\frac{y}{x}$.

26.21. $y' = 2\frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 1$.

26.22. $xy' = y + 2x\,\mathrm{tg}\frac{3y}{x}$.

26.23. $xy' = 3\sqrt{x^2 - y^2} + y$.

26.24. $xy' = y + x\cos^2\frac{y}{x}$.

26.25. $xy' = y + x\sin^2\frac{2y}{x}$.

26.26. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 16$.

26.27. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 1$.

26.28. $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

26.29. $y' = 3\cos^2\frac{2y}{x} + \frac{y}{x}$.

26.30. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} + 4$.

Завдання 27. Знайти розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє задану початкову умову.

27.1. $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $\quad y(1) = 0$.

27.2. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

27.3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$, $\quad y(0) = 0$.

27.4. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

27.5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$, $y(-1) = \frac{3}{2}$.

27.6. $y' - \frac{x}{x+1} y = e^x (x+1)$, $y(0) = 1$.

27.7. $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

27.8. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$, $y(2) = 4$.

27.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2$, $y(1) = 1$.

27.10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}\ y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = \frac{2}{3}$.

27.11. $y' + \frac{y}{x} = \sin x$, $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

27.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$, $y(1) = e$.

27.13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$, $y(1) = 1$.

27.14. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$, $y(1) = 1$.

27.15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3$, $y(1) = -5/6$.

27.16. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 3$.

27.17. $y' + \frac{y}{x} = 3x$, $y(1) = 1$.

27.18. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}$, $\quad y(1) = 4$.

27.19. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $\quad y(1) = 1$.

27.20. $y' + 2xy = -2x^3$, $\quad y(1) = e^{-1}$.

27.21. $y' + \dfrac{xy}{2\left(1-x^2\right)} = \dfrac{x}{2}$, $\quad y(0) = \dfrac{2}{3}$.

27.22. $y' + xy = -x^3$, $\quad y(0) = 3$.

27.23. $y' - \dfrac{2}{x+1} y = e^x \left(x+1\right)^2$, $\quad y(0) = 1$.

27.24. $y' + 2xy = e^{-x^2} \sin x$, $\quad y(0) = 1$.

27.25. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = \left(x+1\right)^3$, $\quad y(0) = \dfrac{1}{2}$.

27.26. $y' - y\cos x = -\sin 2x$, $\quad y(0) = 3$.

27.27. $y' - 4xy = -4x^3$, $\quad y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

27.28. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}$, $\quad y(1) = 1$.

27.29. $y' - 3x^2 y = \dfrac{x^2\left(1+x^3\right)}{3}$, $\quad y(0) = 0$.

27.30. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2}$, $\quad y(1) = 1$.

<u>Завдання 28</u>. Знайти розв’язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

28.1. $y''' = \sin x$, $\quad y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ $y''(0) = 0$.

28.2. $y''' = \dfrac{1}{x}$, $y(1) = \dfrac{1}{4}$, $y'(1) = y''(1) = 0$.

28.3. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \dfrac{3}{5}$.

28.4. $y''' = \dfrac{6}{x^3}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = 1$.

28.5. $y'' = 4\cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

28.6. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

28.7. $xy''' = 2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(1) = y''(1) = 0$.

28.8. $y''' = e^{2x}$, $y(0) = \dfrac{9}{8}$, $y'(0) = \dfrac{1}{4}$, $y''(0) = -\dfrac{1}{2}$.

28.9. $y''' = \cos^2 x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\dfrac{1}{8}$, $y''(0) = 0$.

28.10. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

28.11. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

28.12. $y'' = x + \sin x$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 0$.

28.13. $y'' = 2\sin x \cos 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

28.14. $y'' = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = 0$.

28.15. $y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = 2$.

28.16. $y'' = \dfrac{x}{e^{2x}}$, $y(0) = \dfrac{1}{4}$, $y'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

28.17. $y'' = \sin^2 3x$, $\qquad y(0) = -\dfrac{\pi^2}{16}$, $y'(0) = 0$.

28.18. $y''' = x\sin x$, $\qquad y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.

28.19. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$, $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

28.20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $\qquad y(0) = -e^{-\pi}$, $y'(0) = 1$.

28.21. $y'' = \sin^3 x$, $\qquad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{7}{9}$, $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

28.22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $\qquad y(0) = -\dfrac{1}{8}$, $y'(0) = \dfrac{1}{8}\cos 2$, $y''(0) = \dfrac{1}{2}$.

28.23. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{2}}$, $\qquad y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

28.24. $y'' = 2\sin x\cos^2 x$, $\qquad y(0) = -\dfrac{5}{9}$, $y'(0) = -\dfrac{2}{3}$.

28.25. $y'' = \sin^2 x\cos x$, $\qquad y(0) = \dfrac{1}{9}$, $y'(0) = 1$.

28.26. $y'' = \operatorname{arctg} x$, $\qquad y(0) = y'(0) = 0$.

28.27. $y'' = -2\cos x\cos 2x$, $\qquad y(0) = \dfrac{2}{3}$, $y'(0) = \dfrac{2}{3}$.

28.28. $y'' = x - \ln x$, $\qquad y(1) = -\dfrac{5}{12}$, $y'(1) = \dfrac{3}{2}$.

28.29. $y'' = \dfrac{1}{x^2}$, $\qquad y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

28.30. $y''' = \cos 4x$, $\qquad y(0) = 2$, $y'(0) = \dfrac{15}{16}$, $y''(0) = 0$.

Завдання 29. Розв'язати диференціальне рівняння.

29.1. $\left(1-x^2\right)y''-xy'=2$.

29.2. $2xy'y''=\left(y'\right)^2-1$.

29.3. $x^3y''+x^2y'=1$.

29.4. $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

29.5. $y''x\ln x=y'$.

29.6. $xy''-y'=x^2e^x$.

29.7. $y''x\ln x=2y'$.

29.8. $x^2y''+xy'=1$.

29.9. $y''=-\dfrac{x}{y}$.

29.10. $xy''=y'$.

29.11. $y''=y'+x$.

29.12. $xy''=y'+x^2$.

29.13. $xy''=y'\ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

29.14. $xy''+y'=\ln x$.

29.15. $y''\operatorname{tg}x=y'+1$.

29.16. $y''+2x\left(y'\right)^2=0$.

29.17. $2xy'y''=\left(y'\right)^2+1$.

29.18. $y''-\dfrac{y'}{x-1}=x\left(x-1\right)$.

29.19. $y'''+y''tgx=\sec x$.

29.20. $y''-2y'\operatorname{ctg}x=\sin^3 x$.

29.21. $y''+4y'=2x^2$.

29.22. $xy''-y'=2x^2e^x$.

29.23. $x\left(y''+1\right)+y'=0$.

29.24. $y''+4y'=\cos 2x$.

29.25. $y''+y'=\sin x$.

29.26. $x^2y''=\left(y'\right)^2$.

29.27. $2xy''y'=\left(y'\right)^2-4$.

29.28. $y'''x\ln x=y''$.

29.29. $y''\operatorname{ctg}x+y'=2$.

29.30. $\left(1+x^2\right)y''=2xy$.

Завдання 30. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови.

30.1. $y''=y'e^y$, $y\left(0\right)=0$, $y'\left(0\right)=1$.

30.2. $(y')^2+2yy''=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.3. $yy''+(y')^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.4. $y''+2y(y')^3=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=\frac{1}{3}$.

30.5. $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$, $y(1)=\frac{\pi}{2}$, $y'(1)=2$.

30.6. $2yy''=(y')^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.7. $yy''-(y')^2=y^4$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.8. $y''=-\frac{1}{2y^3}$, $y(0)=\frac{1}{2}$, $y'(0)=\sqrt{2}$.

30.9. $y''=1-(y')^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

30.10. $(y'')^2=y'$, $y(0)=\frac{2}{3}$, $y'(0)=1$.

30.11. $2yy''-(y')^2+1$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

30.12. $y''=2-y$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

30.13. $y''=\frac{1}{y^3}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

30.14. $yy''-2(y')^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

30.15. $y''=y'+(y')^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

30.16. $y''+\frac{2}{1-y}(y')^2=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

30.17. $y''(1+y)=5(y')^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

30.18. $y''(2y+3)-2(y')^2=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=3$.

30.19. $4\left(y''\right)^2=1+\left(y'\right)^2$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=0$.

30.20. $2\left(y'\right)^2=\left(y-1\right)y''$, $\quad y(0)=2$, $y'(0)=2$.

30.21. $1+\left(y'\right)^2=yy''$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=0$.

30.22. $y''+y\left(y'\right)^3=0$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=2$.

30.23. $yy''-\left(y'\right)^2=0$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=2$.

30.24. $yy''-\left(y'\right)^2=y^2\ln y$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.25. $y''-\dfrac{\left(1+\ln y\right)\left(y'\right)^2}{y\left(1-\ln y\right)}=0$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.26. $y''\left(1+y\right)=\left(y'\right)^2+y'$, $\quad y(0)=2$, $y'(0)=2$.

30.27. $y''=\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=2$.

30.28. $y^3y'y''+1=0$, $\quad y(1)=1$, $y'(1)=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$.

30.29. $yy''-2yy'\ln y=\left(y'\right)^2$, $\quad y(0)=1$, $y'(0)=1$.

30.30. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $\quad y(0)=y'(0)=0$.

Завдання 31. Знайти загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння другого порядку.

31.1. $y''-2y'+3y=f\left(x\right)$, якщо
а) $f\left(x\right)=0$
б) $f\left(x\right)=\left(2x-1\right)e^{2x}$
в) $f\left(x\right)=3\sin x$.

31.2. $y''-2y'+5y=f\left(x\right)$, якщо
а) $f\left(x\right)=0$

б) $f(x)=(3x+1)e^{-x}$

в) $f(x)=4\cos x$.

31.3. $y''-2y'-8y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(5x-3)e^{-2x}$

в) $f(x)=2\sin x$.

31.4. $y''-12y'+36y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(x-4)e^{3x}$

в) $f(x)=5\cos x$.

31.5. $y''-3y'+2y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(34-12x)e^{-x}$

в) $f(x)=2\sin 3x$.

31.6. $y''-6y'+10y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(7x-4)e^{-x}$

в) $f(x)=4\cos 2x$.

31.7. $y''+5y'-6y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(3x-5)e^{-2x}$

в) $f(x)=3\sin 4x$.

31.8. $y''+6y'+10y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(2x+5)e^{3x}$

в) $f(x)=\cos 5x$.

31.9. $y''-3y'+2y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(5x+3)e^{2x}$

в) $f(x)=5\sin 2x$.

31.10. $y''+6y'+9y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(48x+8)e^{x}$

в) $f(x)=3\cos 4x$.

31.11. $y''+4y'+8y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(4x-3)e^{2x}$

в) $f(x) = 3\sin x$.

31.12. $y'' - 5y' - 6y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (3x - 2)e^{x}$

в) $f(x) = 3\cos 2x$.

31.13. $y'' - 8y' + 12y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (16x - 2)e^{3x}$

в) $f(x) = 7\sin 3x$.

31.14. $y'' + 8y' + 25y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (x + 3)e^{5x}$

в) $f(x) = 3\sin 4x$.

31.15. $y'' - 9y' + 20y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (8x - 5)e^{-2x}$

в) $f(x) = 3\cos 5x$.

31.16. $y'' - 4y' + 3y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (2x - 5)e^{5x}$

в) $f(x) = 4\sin x$.

31.17. $y'' + 2y + 2y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (-4x + 3)e^{3x}$

в) $f(x) = 2\cos x$.

31.18. $y'' + 2y' - 24y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (3x + 7)e^{2x}$

в) $f(x) = \sin 2x$.

31.19. $y'' + 6y' + 13y = f(x)$. якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (5x + 3)e^{-x}$

в) $f(x) = 4\cos 5x$.

31.20. $y'' + 5y' + 4y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x) = (3x - 4)e^{4x}$

в) $f(x) = 5\sin 2x$.

31.21. $y'' - 4y' + 29y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (5x+2)e^{5x}$
в) $f(x) = 3\sin 6x$.

31.22. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (2x-3)e^{x}$
в) $f(x) = \cos 2x$.

31.23. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (3x+5)e^{4x}$
в) $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$.

31.24. $y'' + 9y' + 8y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (9x-7)e^{2x}$
в) $f(x) = \frac{1}{3}\cos 2x$.

31.25. $y'' - 12y' + 40y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (2x+5)e^{3x}$
в) $f(x) = \frac{1}{5}\sin 3x$.

31.26. $y'' + 4y' - 5y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (3x+7)e^{2x}$
в) $f(x) = \frac{2}{5}\cos 3x$.

31.27. $y'' + 2y' + y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (5x+6)e^{x}$
в) $f(x) = \sin 4x$.

31.28. $y'' + 2y' + 37y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$
б) $f(x) = (5x-8)e^{6x}$
в) $f(x) = \frac{3}{2}\cos x$.

31.29. $6y'' - y' - y = f(x)$, якщо а) $f(x) = 0$

б) $f(x)=(5x+3)e^{2x}$

в) $f(x)=2\sin 3x$.

31.30. $2y''+7y'+3y=f(x)$, якщо а) $f(x)=0$

б) $f(x)=(3x-4)e^{-2x}$

в) $f(x)=\dfrac{3}{4}\cos 2x$.

<u>Завдання 32.</u> Розв'язати систему диференціальних рівнянь.

32.1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+4y. \end{cases}$

32.2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y. \end{cases}$.

32.3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=8x-3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y. \end{cases}$

32.4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+6y. \end{cases}$

32.5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x-2y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y. \end{cases}$

32.6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-6x-3y. \end{cases}$

32.7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y. \end{cases}$

32.8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-3x+2y. \end{cases}$

32.9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-4x+4y. \end{cases}$

32.10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+8y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y. \end{cases}$

32.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

32.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

32.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

32.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

32.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

32.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

32.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

32.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

32.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

32.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$

32.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

32.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

32.23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

32.24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

32.25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$

32.26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

32.27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 4y. \end{cases}$

32.28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y. \end{cases}$

32.29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 8y. \end{cases}$

32.30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - 2y. \end{cases}$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Функції двох змінних

Частинні похідні функції двох змінних

За означенням частинні похідні функції двох змінних $z = f(x,\ y)$ у точці $P(x; y)$ обчислюються за формулами:
по змінній x –

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}.$$

по змінній y –

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

Поряд з позначеннями z'_x та z'_y використовують також інші позначення – відповідно $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $f'_x(x,\ y)$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $f'_y(x,\ y)$.

З означення частинних похідних випливає, що для їх знаходження можна використовувати відомі формули обчислення похідних функцій однієї змінної, вважаючи іншу змінну сталою.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = 5x^4y^2 + 3x^2 - 4y^3 + 7$.

$\ulcorner$ Вважаючи y сталою, знаходимо

$$z'_x = 5y^2 \cdot \left(x^4\right)'_x + 3\left(x^2\right)'_x - 4\left(y^3\right)'_x + (7)'_x =$$

$$= 5y^2 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x - 0 + 0 = 20x^3y^2 + 6x.$$

Вважаючи x сталою, знаходимо

$$z'_y = 5x^4 \cdot \left(y^2\right)'_y + \left(3x^2\right)'_y - 4\left(y^3\right)'_y + (7)'_y =$$

$$= 5x^4 \cdot 2y + 0 - 4 \cdot 3y^2 + 0 = 10x^4y - 12y^2. \ \lrcorner$$

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = \arccos\dfrac{x^2}{y}$.

$\ulcorner$ Враховуючи правило диференціювання складної функції, дістанемо

$$z'_x = \left(\arccos\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(x^2\right)'_x =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x = -\frac{2xy}{\sqrt{y^2-x^4} \cdot y} = -\frac{2x}{\sqrt{y^2-x^4}},$$

$$z'_y = \left(\arccos\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x^2}{y}\right)'_y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^4}{y^2}}} \cdot x^2 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y =$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}} \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{x^2y}{\sqrt{y^2-x^4} \cdot y^2} = \frac{x^2}{y\sqrt{y^2-x^4}}. \ \lrcorner$$

Частинними похідними другого порядку функції $z = f(x,\, y)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку.

Приклад 3. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = 3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1$.

$\ulcorner$ $z_x{}' = \left(3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1\right)'_x = 3y^4 + 15x^2$,

$z_y{}' = \left(3xy^4 + 5x^3 - 2y^2 + 1\right)'_y = 12xy^3 - 4y$,

$$z''_{xx} = \left(3y^4 + 15x^2\right)'_x = 30x,$$

$$z''_{xx} = \left(12xy^3 - 4y\right)'_y = 36xy^2 - 4,$$

$$z''_{xy} = \left(3y^4 + 15x^2\right)'_y = 12y^3,$$

$$z''_{yx} = \left(12xy^3 - 4y\right)'_x = 12y^3. \lrcorner$$

Диференціал функції двох змінних

Диференціал функції $z = f\left(x,\ y\right)$ обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Приклад 4. Знайти повний диференціал функції $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$

$\ulcorner$ Знайдемо частинні похідні функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та підставимо їх у вираз

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_x = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_x = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)'_y = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \left(x^2 + y^2\right)'_y = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$dz = \frac{2x}{x^2 + y^2}dx + \frac{2y}{x^2 + y^2}dy \ \lrcorner$$

Диференціювання неявно заданих функцій

Якщо рівняння $F\left(x,\ y,\ z\right) = 0$, де $F\left(x,\ y,\ z\right)$ – диференційовна функція змінних $x,\ y$ і z, визначає z як функцію незалежних змінних x і y і $F'_z\left(x,\ y,\ z\right) \neq 0$, то частинні похідні цієї неявно заданої функції знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x\left(x,\ y,\ z\right)}{F'_z\left(x,\ y,\ z\right)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y\left(x,\ y,\ z\right)}{F'_z\left(x,\ y,\ z\right)}.$$

Приклад 5. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y\cos z + 7 = 0$.

⌈ Позначимо $F(x, y, z) = x^3y - 2y^2 + 3z^2 - y\cos z + 7$.

Знайдемо частинні похідні:

$F'_x(x, y, z) = 3x^2y$,

$F'_y(x, y, z) = x^3 - 4y - \cos z$,

$F'_z(x, y, z) = 6z + y\sin z$.

За формулами $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2y}{6z + y\sin z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^3 - 4y - \cos z}{6z + y\sin z}. \lrcorner$$

Диференціювання складних функцій

Якщо z є складною функцією кількох незалежних змінних, наприклад, $z = f(x, y)$, де $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u, v – незалежні змінні; f, φ, ψ – диференційовні функції), то частинні похідні z по u і v знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 6. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z = x^2y - y^2x$, де $x = u \cdot \cos v$, $y = u \cdot \sin v$.

⌈ Знайдемо похідні з правих частин формул:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2 - y^2x\right)'_x = 2xy - y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2y - y^2x\right)'_y = x^2 - 2xy,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \left(u \cdot \cos v\right)_u' = \cos v, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \left(u \cdot \cos v\right)_v' = -u \sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \left(u \cdot \sin v\right)_u' = \sin v, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \left(u \cdot \sin v\right)_v' = u \cos v.$$

Підставимо отримані вирази у формули для диференціювання складних функцій. Тоді, маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \cos v + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot \sin v =$$
$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \cos v +$$
$$+ \left(u^2 \cos^2 v - 2u \cos v \cdot u \sin v\right) \cdot \sin v =$$
$$= u^2 \sin v \cos v \left(2\cos v - \sin v\right) + u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - 2\sin v\right) =$$
$$= u^2 \sin v \cos v \left(2\cos v - \sin v + \cos v - 2\sin v\right) =$$
$$= u^2 \sin v \cos v \left(3\cos v - 3\sin v\right) = 3u^2 \sin v \cos v \left(\cos v - \sin v\right).$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \left(2xy - y^2\right) \cdot \left(-u \sin v\right) + \left(x^2 - 2xy\right) \cdot u \cos v =$$
$$= \left(2u \cos v \cdot u \sin v - u^2 \sin^2 v\right) \cdot \left(-u \sin v\right) + \left(u^2 \cos^2 v - 2u^2 \cos v \sin v\right) \times$$
$$\times u \cos v = -u^3 \sin^2 v \left(2\cos v - \sin v\right) + u^3 \cos^2 v \left(\cos v - 2\sin v\right) =$$
$$= u^3 \left(\underline{-2\sin^2 v \cos v} + \underline{\underline{\sin^3 v}} + \underline{\underline{\cos^3 v}} - \underline{2\cos^2 v \sin v}\right) =$$
$$= u^3 \left[-2\sin v \cos v \left(\sin v + \cos v\right) + \left(\sin v + \cos v\right) \times\right.$$
$$\left. \times \left(\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v\right)\right] = u^3 \left(\sin v + \cos v\right)\left(1 - 3\sin v \cos v\right). \quad \lrcorner$$

Похідна функції за напрямом

Похідною функції $z = f\left(x, y\right)$ у точці $P\left(x; y\right)$ за напрямом $\vec{e} = \overrightarrow{PP_1}$ називається

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \lim_{PP_1 \to 0} \frac{f\left(P_1\right) - f\left(P\right)}{PP_1},$$

де $f\left(P\right)$ і $f\left(P_1\right)$ – значення функції у точках P і P_1, PP_1 – відстань між цими точками.

Якщо функція z диференційовна, то має місце формула

$$\frac{\partial z}{\partial e} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha,$$

де α – кут, що утворює вектор $\vec{e}$ з віссю Ox.

Приклад 7. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ у точці $P(2; -1)$ в напрямі від цієї точки до точки $N(5; 2)$.

⌈Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6xy + 3y^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 3\cdot 2^2 - 6\cdot 2\cdot(-1) + 3\cdot(-1)^2 = 27;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x^2 + 6xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = -3\cdot 2^2 + 6\cdot 2\cdot(-1) = -24.$$

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{PN}$: $\vec{a} = \{5-2;\ 2-(-1)\} = \{3;\ 3\}$.

Знайдемо координати орта $\vec{a}_0$ вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}, \quad \vec{a}_0 = \left\{\frac{3}{3\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

За формулою $\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha$:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 27\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + (-24)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}. \quad ⌋$$

Градієнт функції

Градієнтом функції $z = f(x, y)$ у точці $P(x; y)$ називається вектор, проекціями якого на координатні осі є відповідні частинні похідні даної функції:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}.$$

Приклад 8. Знайти градієнт функції $z = x^2y$ у точці $P(1; 1)$.

⌈Знаходимо частинні похідні та їх значення в точці P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2\cdot 1\cdot 1 = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1^2 = 1.$$

Отже, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z = 2\vec{i} + \vec{j}$. ⌋

Рівняння дотичної площини і нормалі

Дотичною площиною до поверхні у точці M (точка дотику) називається площина, в якій знаходяться всі дотичні у точці M до різних кривих, що проведені на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається перпендикуляр до дотичної площини у точці дотику.

Якщо рівняння поверхні у декартовій системі координат задано у явній формі $z = f(x, y)$, де $f(x, y)$ – диференційовна функція, то рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ поверхні має вигляд

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Рівняння нормалі має вигляд

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Приклад 9. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ у точці $M(2; -1; 1)$.

⌈ Рівняння дотичної площини у точці $M(x_0;\, y_0;\, z_0)$ поверхні має вигляд $z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Рівняння нормалі має вигляд $\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

Знайдемо частинні похідні даної функції та їх значення у точці M :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Звідси маємо:

$z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ або $2x + 2y - z - 1 = 0$ – рівняння дотичної площини;

$\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$ – рівняння нормалі. ⌋

Локальний екстремум функції двох змінних

Функція $f(x,\ y)$ має локальний максимум (мінімум) $f(a,\ b)$ у точці $P(a;\ b)$, якщо для всіх відмінних від P точок $P'(x;\ y)$ з деякого околу точки P виконується нерівність $f(a,\ b)>f(x,\ y)$ (відповідно $f(a,\ b)<f(x,\ y)$). Максимум або мінімум функції називають її екстремумом.

Необхідна умова екстремуму. Точки, в яких диференційовна функція $f(x,\ y)$ може набувати екстремуму, знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} f_x'(x,\ y)=0 \\ f_y'(x,\ y)=0. \end{cases}$$

Розв'язки даної системи називають стаціонарними точками.

Достатня умова екстремуму. У стаціонарній точці $P(a;\ b)$ знаходимо

$A=f_x''(a,\ b)$, $B=f_{xy}''(a,\ b)$, $C=f_{yy}''(a,\ b)$, $\Delta=AC-B^2$.

Тоді: 1) якщо $\Delta>0$, то функція має екстремум у точці $P(a;\ b)$, а саме – максимум, якщо $A<0$, і мінімум, якщо $A>0$;

2) якщо $\Delta<0$, то екстремуму в точці $P(a;\ b)$ немає;

3) якщо $\Delta=0$, то потрібні подальші дослідження.

Приклад 10. Дослідити на екстремуми функцію $z=4y^3+3x^2y-2x^2-108y-3$.

⌈Знайдемо частинні похідні і складемо систему $\begin{cases} f_x'(x,\ y)=0 \\ f_y'(x,\ y)=0. \end{cases}$:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=6xy-4x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=12y+3x^2-108$,

$$\begin{cases} 6xy-4x=0 \\ 12y+3x^2-108=0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x(6y-4)=0 \\ 12y+3x^2-108=0. \end{cases}$$

Розв’язуємо систему і знаходимо три стаціонарні точки: $P_1\left(0;\ \frac{5}{6}\right)$, $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$.

Знайдемо похідні 2-го порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12$ і обчислимо $\Delta = AC-B^2$ для кожної стаціонарної точки.

1) Точка $P_1\left(0;\ \frac{5}{6}\right)$: $A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=6\cdot\frac{5}{6}=5$, $B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1}=6\cdot 0=0$, $C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1}=12$.

$\Delta = AC-B^2=5\cdot 12-0=60$.

Оскільки $\Delta>0$ і $A>0$, то у точці P_1 функція має мінімум.

2) Точка $P_2\left(\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$: $A=6\cdot\frac{2}{3}=4$, $B=6\cdot\frac{10\sqrt{3}}{3}=20\sqrt{3}$, $C=12$;

$\Delta=4\cdot 12-\left(20\sqrt{3}\right)^2=48-1200=-1152$.

Оскільки $\Delta<0$, то у точці P_2 функція не має екстремуму.

3) Точки $P_3\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3};\ \frac{2}{3}\right)$: $A=6\cdot\frac{2}{3}=4$, $B=6\cdot\left(-\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)=-20\sqrt{3}$, $C=12$; $\Delta=4\cdot 12-\left(-20\sqrt{3}\right)^2=48-1200=-1152$.

Оскільки $\Delta<0$, то у точці P_3 екстремуму немає. ⌋

Умовний екстремум

Умовним екстремумом функції $f(x,\ y)$ називають екстремум цієї функції за умови, що її аргументи пов’язані рівнянням зв’язку $\varphi(x,\ y)=0$. Для знаходження умовного екстремуму функції $f(x,\ y)$ за умови $\varphi(x,\ y)=0$ складають функцію Лагранжа

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)+\lambda\cdot\varphi(x,\ y),$$

де λ – невизначений сталий множник. Необхідні умови екстремуму зводяться до системи трьох рівнянь з трьома невідомими x, y, λ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \varphi\left(x,\ y\right) = 0. \end{cases}$$

Достатні умови умовного екстремуму. Нехай x_0, y_0, λ_0 – розв'язок системи. Складемо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial \varphi\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 F\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 F\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial \varphi\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi\left(x_0, y_0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi\left(x_0, y_0\right)}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $f\left(x,\ y\right)$ має у точці $\left(x_0, y_0, \lambda_0\right)$ умовний максимум; якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 11. Знайти екстремуми функції $z = 6 - 4x - 3y$ за умови, що змінні x і y задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$.

⌐ Геометрично задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень аплікати z площини $z = 6 - 4x - 3y$ для точок її перетину із циліндром $x^2 + y^2 = 1$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$F\left(x,\ y,\ \lambda\right) = 6 - 4x - 3y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Маємо $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

З необхідної умови дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0 \\ -3 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

розв'язуючи яку знаходимо

$\lambda_1 = \frac{5}{2}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{3}{5}$ і $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -\frac{4}{5}$, $y_2 = -\frac{3}{5}$.

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1,4 \\ 0 & 5 & 1,2 \\ 1,4 & 1,2 & 0 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція має умовний мінімум.

При $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ маємо визначник

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -5 & 0 & -1,4 \\ 0 & -5 & -1,2 \\ -1,4 & -1,2 & 0 \end{vmatrix} = -20 < 0.$$

Отже, у точці $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ функція має умовний максимум.

Таким чином,

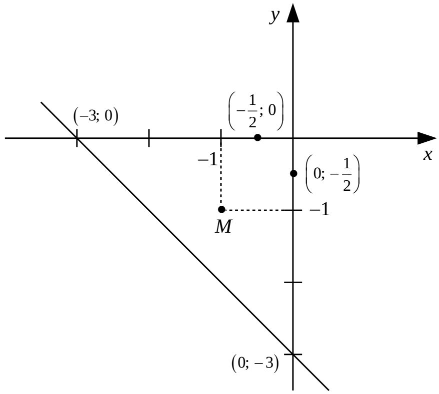
$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11$, $\qquad z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1$. ┘

Найбільше і найменше значення функції

Диференційовна функція в обмеженій замкненій області набуває свого найбільшого (найменшого) значення або у стаціонарній точці або у точці межі області.

Приклад 12. Визначити найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

┌ Зазначена область є трикутником.



1) Знайдемо стаціонарні точки: $z'_x = 2x - y + 1$, $z'_y = 2y - x + 1$, $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$. Розв'язуючи систему, знаходимо $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1. \end{cases}$ Точка $M(-1; -1)$ належить області.

У точці M значення функції $z(M) = -1$. Дослідження на екстремум не є обов'язковим.

2) Досліджуємо функцію на межі області.

Якщо $x = 0$, то $z = y^2 + y$ і задача зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le y \le 0$. Похідна функції:

$z' = \left(y^2 + y\right)' = 2y + 1$. Знаходимо критичні точки з умови $z' = 0$: $2y + 1 = 0$, $y = -\dfrac{1}{2}$. Ця точка належить відрізку $[-3, 0]$. Знаходимо значення функції:

$$z\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4},$$

$$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6,$$

$$z(0) = 0 + 0 = 0.$$

При $y = 0$ маємо $z = x^2 + x$. Аналогічно проводимо дослідження на найбільше і найменше значення цієї функції одного аргументу на відрізку $-3 \le x \le 0$.

$z' = \left(x^2 + x\right)' = 2x + 1$.

$z' = 0$: $2x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{2} \in [-3,\, 0]$.

$z\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$,

$z(-3) = (-3)^2 - 3 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 = 0$.

При $x + y = -3$, або $y = -3 - x$ маємо функцію $z = x^2 + (-3 - x)^2 - x \cdot (-3 - x) + x + (-3 - x) = 3x^2 + 9x + 6$ на відрізку $-3 \le x \le 0$. Дослідження проводимо аналогічно попередньому.

$z' = \left(3x^2 + 9x + 6\right)' = 6x + 9$.

$z' = 0$: $6x + 9 = 0$, $x = -\dfrac{3}{2} \in [-3,\, 0]$.

$z\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 3 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 + 9 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right) + 6 = -\dfrac{3}{4}$,

$z(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 9 \cdot (-3) + 6 = 6$,

$z(0) = 0 + 0 + 6 = 6$.

3) Порівнюємо всі знайдені значення функції z. Робимо висновок, що $z_{\text{найб.}} = 6$ у точках $(0;\, -3)$ і $(-3;\, 0)$;
$z_{\text{найм.}} = -1$ у стаціонарній точці $M(-1;\, -1)$. $\lrcorner$

Невизначений інтеграл

Невизначеним інтегралом $\int f(x)dx$ функції $f(x)$ (на проміжку X) називають вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ – одна з первісних функції $f(x)$, тобто $F'(x)=f(x)$ ($x\in X$); C – довільна стала.

Приклад 13. $\int \frac{dx}{9-x^2}$.

$\ulcorner$ $\int \frac{dx}{9-x^2}=\int \frac{dx}{-\left(x^2-4\right)}=-\int \frac{dx}{x^2-3^2}=-\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C=$

$=-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

(скористалися властивістю 1^{o} табличним інтегралом 11 при $a=3$). $\lrcorner$

Приклад 14. $\int\left(4x^3+5\cos x\right)dx$.

$\ulcorner$ Застосуємо послідовно властивості 2^{o} та 1^{o}:

$$\int\left(4x^3+5\cos x\right)dx=\int 4x^3\,dx+\int 5\cos x\,dx=4\int x^3\,dx+5\int \cos x\,dx.$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли відповідно 1 ($n=3$) та 4 і остаточно дістаємо

$$\int\left(4x^3+5\cos x\right)dx=4\frac{x^4}{4}+5\sin x+C=x^4+5\sin x+C. \quad \lrcorner$$

Приклад 15. $\int\left(4x-\frac{5}{x^2}+\frac{3^x}{2}\right)dx$.

$\ulcorner$ Застосовуємо послідовно властивості 2^{o}, 1^{o} і табличні інтеграли 1, 3:

$$\int\left(4x-\frac{5}{x^2}+\frac{3^x}{2}\right)dx=\int 4x\,dx-\int 5x^{-2}\,dx+\int \frac{1}{2}3^x\,dx=$$

$$=4\int x dx-5\int x^{-2}\,dx+\frac{1}{2}\int 3^x\,dx=4\frac{x^2}{2}-5\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{2}\,3^x\ln 3+C=$$

$$=2x^2+\frac{5}{x}+\frac{3^x\ln 3}{2}+C. \quad \lrcorner$$

Заміна змінної

Обчислення невизначених інтегралів методом заміни змінної ґрунтується на формулі

$$\int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\,\varphi'\left(x\right)\,dx = F\left(\varphi\left(x\right)\right)+C\,,$$

де $F\left(x\right)$ – первісна функції $f\left(x\right)$; $\varphi'\left(x\right)$ – похідна функції $\varphi\left(x\right)$.

При застосуванні формули на практиці зручно перейти до нової змінної t, поклавши $t=\varphi\left(x\right)$. Розглядаючи t як функцію змінної x, запишемо диференціал $dt=\varphi'\left(x\right)\,dx$. В результаті приходимо до інтеграла відносно змінної t: $\int f\left(t\right)\,dt = F\left(t\right)+C$. Поклавши у правій частині цієї рівності $t=\varphi\left(x\right)$, дістаємо остаточно $F\left(\varphi\left(x\right)\right)+C$.

Якщо маємо інтеграл $\int p\left(x\right)\,dx$, то його обчислення методом заміни змінної зручно оформляти в загальному випадку наступним чином:

$$\int p\left(x\right)\,dx = \int f\left(\varphi\left(x\right)\right)\varphi'\left(x\right)\,dx = \left|\begin{array}{l} t=\varphi\left(x\right) \\ dt=\varphi'\left(x\right)\,dx \end{array}\right| =$$

$$= \int f\left(t\right)\,dt = F\left(t\right)+C = F\left(\varphi\left(x\right)\right)+C\,.$$

Приклад 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

⌈ Оскільки $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$, то дістанемо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left|\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt=\dfrac{1}{x}\,dx=\dfrac{dx}{x} \end{array}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{\ln x}+C \quad ⌋$$

Приклад 17. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

⌈ Оскільки $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, то дістанемо

$$\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg} x \\ dt=\dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx \end{array}\right| = \int e^t\,dt = e^t+C = e^{\operatorname{tg} x}+C$$

(скористалися табличним інтегралом **3** при $a=e$). ⌋

Приклад 18. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$.

⌈ Оскільки $\left(x^2-1\right)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-1} = \int \frac{2x\,dx}{2\left(x^2-1\right)} = \begin{vmatrix} t = x^2-1 \\ dt = 2x\,dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + C. \quad ⌋$$

Інтегрування частинами

Обчислення невизначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

де u та v – функції змінної x; $du = u'(x)\,dx$, $dv = v'(x)\,dx$.

Якщо потрібно обчислити інтеграл $\int f(x)\,dx$, то підінтегральний вираз $f(x)\,dx$ слід представити у вигляді $u\,dv$ так, щоб інтеграл у правій частині формули був простішим за заданий $\int f(x)\,dx = \int u\,dv$. Зауважимо, що функція v, яка фігурує у правій частині, знаходиться за очевидною формулою $v = \int v'(x)\,dx = \int dv$, яка означає, що функція $v(x)$ є первісною своєї похідної $v'(x)$.

Приклад 19. $\int x\cos 2x\,dx$.

⌈ Покладемо $u = x$, $dv = \cos 2x\,dx$. Тоді $du = (x)'\,dx = 1\cdot dx = dx$, $v = \int dv = \int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2}$ (беремо заради простоти $C = 0$). Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int x\cos 2x\,dx = x\cdot\frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x\sin x}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) + C = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C. \quad ⌋$$

Приклад 20. $\int(5x-2)e^x\,dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u=5x-2$, $dv=e^x\,dx$. Тоді $du=(5x-2)'\,dx=5dx$, $v=\int dv=\int e^x\,dx=e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int(5x-2)e^x\,dx=(5x-2)e^x-\int e^x 5dx=(5x-2)e^x-5\int e^x\,dx=$$
$$=(5x-2)e^x-5e^x+C=e^x(5x-7)+C. \quad \lrcorner$$

Приклад 21. $\int\arcsin x\,dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $u=\arcsin x$, $dv=dx$. Тоді $du=(\arcsin x)'\,dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $v=\int dx=x$. За формулою інтегрування частинами

$$\int\arcsin x\,dx=\arcsin x\cdot x-\int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Обчислимо інтеграл у правій частині методом заміни змінної:

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{aligned}&t=1-x^2\\&dt=-2x\,dx\end{aligned}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$$

Тоді,

$$\int\arcsin x\,dx=\arcsin x\cdot x-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)+C=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$$

Приклад 23. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

$\ulcorner$ Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$5+2x-x^2=-(x^2-2x+1-6)=-\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 1+1^2\right)-6\right]=$$
$$=-\left[(x-1)^2-6\right]=6-(x-1)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$).

Обчислюємо інтеграл:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2-\left(x-1\right)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C \quad \lrcorner$$

Інтегрування раціональних функцій

Якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад 24. $\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб. Виділимо цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{r} x^4+2x \\ x^4+8x \end{array} & \begin{array}{l} x^3+8 \\ \hline x \end{array} \\ \hline -6x & \end{array}\quad ; \qquad \frac{x^4+2x}{x^3+8}=x-\frac{6x}{x^3+8}.$$

Звідси, $\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx=\int\left(x-\frac{6x}{x^3+8}\right)dx=\int x\,dx+\int\frac{6x}{x^3+8}dx=\frac{x^2}{2}+\int\frac{6x}{x^3+8}dx$

Обчислимо інтеграл $\int\frac{6x}{x^3+8}dx$. Розкладемо підінтегральну функцію на доданки. Тоді матимемо

$$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+\left(Bx+C\right)\left(x+2\right)}{x^3+8}=\frac{x^2\left(A+B\right)+x\left(-2A+2B+C\right)+4A+2C}{x^3+8}$$

Тоді, $6x=x^2\left(A+B\right)+x\left(-2A+2B+C\right)+4A+2C$. Маємо систему

$$\begin{array}{c|} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\ \begin{cases} 0=A+B \\ 6=-2A+2B+C \\ 0=4A+2C \end{cases}. \text{ Звідси, } \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=2 \end{cases}.$$

Тоді,

$$\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4}\right)dx=\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)\,dx}{(x-1)^2+3}=\ln|x+2|-\int\frac{\frac{1}{2}\left(2(x-1)+6\right)dx}{(x-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\ln|x+2|-\left(\frac{1}{2}\int\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\,dx+3\int\frac{dx}{(x-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)=$$

$$=\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$$

Отже, $\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}\,dx=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$ ┘

Інтегрування функцій, що містять ірраціональності

Інтегрування функцій, що містять ірраціональності, зокрема виду $\sqrt[m]{kx+b}$ $(k\neq 0)$. У цьому випадку слід покласти $\sqrt[m]{kx+b}=t$, звідки $x=\frac{1}{k}\left(t^m-b\right)$, $dx=\frac{m}{k}t^{\,m-1}\,dt$.

Приклад 22. $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}$.

┌ $$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-3}=2\int\frac{t^2dt}{t^2-3}=2\int\frac{\left(t^2-3\right)+3}{t^2-3}\,dt=$$

$$=2\int\left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)dt=2\left(\int dt+3\int\frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)=2\left(t+3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right)+C=$$

$$=2t+\sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C=2\sqrt{x}+\sqrt{3}\,\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right|+C$$ ┘

Універсальна тригонометрична підстановка

Оскільки в знаменник дробу функції $\sin x$ і $\cos x$ входять лінійно, то для алгебраїчної раціоналізації підінтегральної функції зручно використати універсальну тригонометричну підстановку:

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Так як $x=2arctgt$, то $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

Приклад 25. $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

$$\ulcorner\quad \int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=$$

$$=2\int\frac{dt}{4t-\left(1-t^2\right)+5\left(1+t^2\right)}=2\int\frac{dt}{6t^2+4t+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+\frac{2}{3}t+\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt5}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{\sqrt5}{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt5}{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{3t+1}{\sqrt5}+C=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt5}+C\ .\quad \lrcorner$$

Визначений інтеграл

Формула Ньютона-Лейбніца.

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ – це число, яке позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Тут $f(x)$ – підінтегральна функція; $[a,b]$ – відрізок інтегрування; a та b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл – $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Приклад 26. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.

⌐ З таблиці невизначених інтегралів $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$. Тому, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, дістанемо

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 0 - (-1) = 1. \quad ⌟$$

Приклад 27. $\int\limits_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx$.

⌐ $$\int\limits_0^1 \left(5e^x - 10x^4 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(5\cdot e^x - 10\cdot\frac{x^5}{5} + \operatorname{arctg} x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(5\cdot e^x - 2x^5 + \operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = \left(5\cdot e^1 - 2\cdot 1^5 + \operatorname{arctg} 1\right) - \left(5\cdot e^0 - 2\cdot 0^5 + \operatorname{arctg} 0\right) =$$

$$= 5e - 2 + \frac{\pi}{4} - (5 - 0 + 0) = 5e + \frac{\pi}{4} - 7. \quad ⌟$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)\,dx$ вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)\,dx, \end{cases}$ то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхня межа t_2 – в точці $x = b$, тобто $\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b). \end{cases}$

Приклад 28. $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx$.

$\ulcorner$ Нехай $t = x^2$. Тоді $dt = (x^2)'\,dx = 2x\,dx$ або $x\,dx = \frac{1}{2}dt$,

$\begin{cases} t_1 = t(0) = 0^2 = 0 \\ t_2 = t(2) = 2^2 = 4. \end{cases}$

Маємо $\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int_0^2 e^{x^2}\cdot x\,dx = \int_0^4 e^t\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t\Big|_0^4 =$

$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(e^4 - 1\right).$ $\lrcorner$

Приклад 29. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$.

$\ulcorner$ Покладемо $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$. Межі інтегрування нової змінної: $\begin{cases} t_1 = \sqrt{4} = 2 \\ t_2 = \sqrt{9} = 3. \end{cases}$ Маємо

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{t+1}2t\,dt = 2\int_2^3 \frac{t}{t+1}\,dx = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dx =$$

$$= 2\int_2^3 \left(\frac{t+1}{t+1} - \frac{1}{t+1}\right)dt == 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\left(t - \ln|t+1|\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 2\left(3 - \ln|3+1|\right) - 2\left(2 - \ln|2+1|\right) == 6 - 2\ln 4 - 4 + 2\ln 3 =$$

$$= 2 + 2(\ln 3 - \ln 4) = 2 + 2\ln\frac{3}{4}. \quad \lrcorner$$

Інтегрування частинами

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Приклад 30. $\int_0^1 xe^x dx$.

⌐ Покладемо $u = x$, $dv = e^x\,dx$. Тоді $du = (x)'\,dx = dx$, $v = \int dv = \int e^x\,dx = e^x$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла, дістанемо

$$\int_0^1 xe^x dx = x\cdot e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \left(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\right) - e^x\Big|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) =$$

$$= e - e + 1 = 1. \ \lrcorner$$

Приклад 31. $\int_1^e x^2 \ln x\,dx$.

⌐ Покладемо $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$. Тоді $du = (\ln x)'\,dx = \frac{1}{x}dx$, $v = \int dv = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Застосовуючи формулу інтегрування частинами, дістанемо

$$\int_1^e x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Bigg|_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \left(\frac{e^3}{3}\ln e - \frac{1^3}{3}\ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx =$$

$$= \left(\frac{e^3}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9} . \lrcorner$$

Невласні інтеграли

Невласні інтеграли I роду

За означенням *невласні інтеграли I роду* обчислюються за формулами:

1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 f(x)\,dx + \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx$.

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають збіжними.

Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох границь), то відповідні невласні інтеграли називають розбіжними.

Приклад 32. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$.

$\ulcorner$ $$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\sqrt{1}\right).$$

Так як $\lim\limits_{b\to+\infty}\sqrt{b} = +\infty$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(2\sqrt{b}-2\right) = +\infty$.

Отже, заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

Невласні інтеграли II роду

Невласний інтеграл II роду є узагальненням визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ на випадок, коли підінтегральна функція $f(x)$ необмежена на відрізку $[a,b]$.

Розрізняють три випадки:

1) $f(x)$ необмежена у точці $x=a$ ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Тут і далі $\varepsilon>0$, тобто ε прямує до нуля справа.

2) $f(x)$ необмежена у точці $x=b$ ($\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad (\varepsilon>0)$$

3) $f(x)$ необмежена у точці $c\in(a,b)$ ($\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$). Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \quad (\varepsilon>0)$$

Якщо вказані границі існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли дорівнюють значенню цих границь, а у випадку **3)** сумі значень двох границь. При цьому невласні інтеграли називають збіжними. Якщо ж вказані границі дорівнюють нескінченності або не існують (для випадку **3)** хоча б одна з двох), то відповідні невласні інтеграли називають розбіжними.

Приклад 33. $\displaystyle\int\limits_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$.

$\ulcorner$ Підінтегральна функція необмежена у точці $x=3$. Знаходимо

$$\int\limits_3^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{3+\varepsilon}^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x-3}\right)\Big|_{3+\varepsilon}^4 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{4-3} - 2\sqrt{3+\varepsilon-3}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\cdot 1 - 2\cdot\sqrt{\varepsilon}\right) = 2-0=2. \ \lrcorner$$

Приклад 34. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

$\ulcorner$ Так як $\ln 1 = 0$, то підінтегральна функція необмежена у точці $x=1$.

$$\int\limits_1^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=\ln x \\ dt = (\ln x)'\,dx = \dfrac{1}{x}dx \\ \textit{межі} \ \ t_1 = \ln 2 \\ \qquad\quad\ t_2 = \ln(1+\varepsilon) \end{array}\right| = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} \frac{1}{t}\,dt =$$

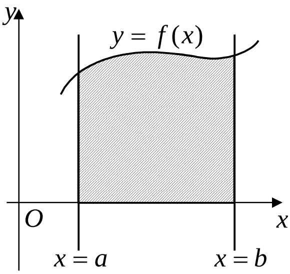
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|t|\Big|_{\ln(1+\varepsilon)}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon)\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\ln(1+\varepsilon) = -\infty$, то заданий інтеграл розбіжний. $\lrcorner$

Застосування визначеного інтеграла

Обчислення площ плоских фігур

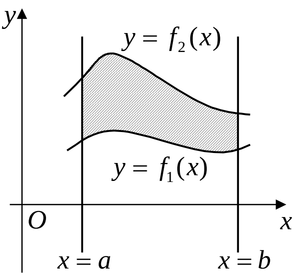
1. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geq 0$, то площа *криволінійної трапеції* (рис. 1), обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox, обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Рис. 1

2. Площа фігури (рис. 2), обмеженої знизу графіком функції $y = f_1(x)$, зверху – $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, обчислюється за формулою



$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx.$$

Рис. 2

Відрізки, які обмежують зліва та справа фігуру на рис. 2, можуть вироджуватись у точки.

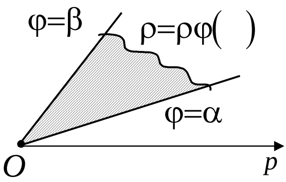
3. Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, прямими $x = a$, $x = b$ та віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geq 0$.

4. Площа криволінійного сектора (рис. 3), обмеженого у полярній системі координат неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою

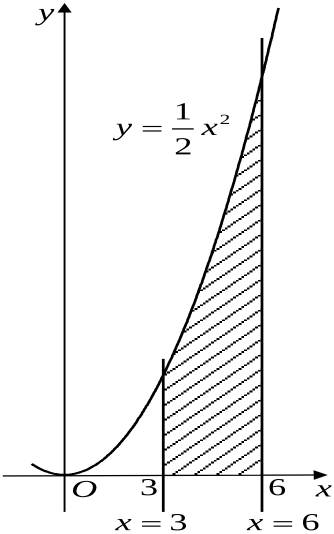


$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi .$$

Рис. 3

Приклад 35. Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2$, прямими $x = 3$, $x = 6$ та віссю Ox.

⌈ Криволінійна трапеція позначена на рисунку штрихуванням.



Знайдемо її площу за формулою $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$:

$$S = \int\limits_3^6 \left(\frac{1}{2}x^2 - 0 \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_3^6 = \frac{1}{6}\left(6^3 - 3^3\right) = \frac{1}{6}(216 - 27) =$$

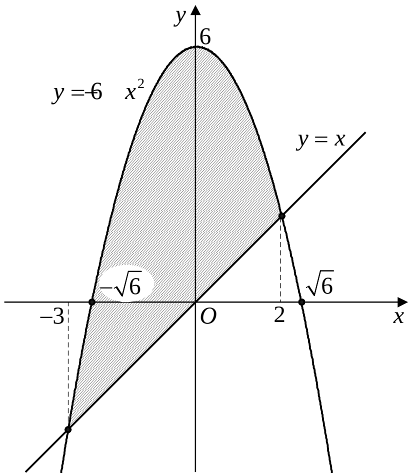
$$= \frac{1}{6}\left(6^3 - 3^3\right) = \frac{1}{6}(216 - 27) = \frac{63}{2} = 31{,}5 \text{ (кв. од.).}$$ ⌋

Приклад 36. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 6 - x^2$, $y = x$.

⌈ $y = 6 - x^2$ – парабола, вітки якої направлені вниз. Заповнимо таблицю для зображення параболи:

x	0	$\sqrt{6}$	$-\sqrt{6}$
$y = 6 - x^2$	6	0	0

Для знаходження абсцис ($x_1 = a$, $x_2 = b$) точок перетину параболи з прямою розв’яжемо систему рівнянь:



$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 6 - x^2 = x,$$

або $x^2 + x - 6 = 0$.

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$,

$$x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3,$$

$$x_2 = b = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2.$$

Шукана фігура обмежена знизу прямою, а зверху – параболою.

Тому за формулою (8) отримаємо

$$S = \int_{-3}^{2} \left(\left(6 - x^2\right) - x \right) dx = \left(6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{2} = \left(6 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} \right) -$$

$$- \left(6 \cdot (-3) - \frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} \right) = 12 - \frac{8}{3} - 2 + 18 - 9 + \frac{9}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$ (кв. од.). ⌋

Диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння, яке містить незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y': $F(x, y, y') = 0$.

Диференціальне рівняння виду $y' = f(x) \cdot g(y)$ називають диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними. Права частина рівняння є добутком двох функцій, залежних лише від однієї змінної: перша функція залежить лише від x, а друга – лише від y.

Схема розв'язання диференціального рівняння. Так як $y' = \frac{dy}{dx}$, то маємо $y' = f\left(x\right)\cdot g\left(y\right)$, або $\frac{dy}{dx} = f\left(x\right)\cdot g\left(y\right)$. Помножимо обидві частини рівності на вираз $\frac{dx}{g\left(y\right)}$ (припускаємо, що $g\left(y\right)\neq 0$). Отримаємо рівняння з відокремленими змінними $\frac{dy}{g\left(y\right)} = f\left(x\right)dx$.

У лівій частині рівності маємо диференціал деякої функції по змінній y, а у правій – по змінній x.

Інтегруючи рівняння $\int\frac{dy}{g\left(y\right)} = \int f\left(x\right)dx + C$, отримаємо загальний інтеграл (розв'язок) диференціального рівняння.

Приклад 37. $y' = \frac{y}{x^2}$.

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $y' = \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}\cdot y$. Оскільки $y' = \frac{dy}{dx}$, то запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}.$$

Для відокремлення змінних помножимо дану рівність на dx і поділимо на y. Отримаємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}.$$

Інтегруємо дане рівняння:

$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x^2}$, $\ln\left|y\right| = -\frac{1}{x} + C$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = e^{-\frac{1}{x}+C}$. ┘

Приклад 38. $y' = y3^x$.

┌ Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dy}{dx} = y3^x$, $\quad \dfrac{dy}{y} = 3^x\,dx$, $\quad \int \dfrac{dy}{y} = \int 3^x\,dx$, звідки знаходимо загальний розв'язок $\ln|y| = \dfrac{3^x}{\ln 3} + C$. $\lrcorner$

Приклад 39. $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$.

$\ulcorner$ Розв'яжемо задане рівняння відносно y':

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}.$$

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $\dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}dx$:

$$\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Звідси маємо

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C, \text{ або}$$

$$\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}. \quad \lrcorner$$

Однорідні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто для будь-якого $t > 0$ виконується рівність: $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Рівняння можна записати у вигляді $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Для розв'язання рівняння введемо допоміжну невідому функцію $u = u(x)$, поклавши $\dfrac{y}{x} = u$ або $y = ux$, і перетворимо однорідне рівняння у рівняння з відокремлюваними змінними. Звідси, знаходимо $y' = u'x + u$. Тому задане рівняння запишеться у вигляді

$$u + xu' = g(u), \quad \text{або} \quad x\frac{du}{dx} = g(u) - u .$$

Відокремимо змінні: $\dfrac{du}{g(u)-u} = \dfrac{dx}{x}$.

Проінтегрувавши рівняння, одержимо $\displaystyle\int \frac{du}{g(u)-u} = \ln|x| + C$.

Обчисливши інтеграл у лівій частині і підставивши замість u вираз $\dfrac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл диференціального рівняння.

Приклад 40. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.

$\ulcorner$ Права частина рівняння – функція $f(x,\, y) = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{ty}{tx} + \sin\frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$.

$$u'x + u = \frac{ux}{x} + \sin\frac{ux}{x}, \qquad u'x + u = u + \sin u, \qquad u'x + u - u = \sin u,$$

$$u'x = \sin u, \qquad u' = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = \sin u \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln C|x|, \qquad \operatorname{tg}\frac{u}{2} = Cx,$$

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = Cx. \quad \lrcorner$$

Приклад 41. $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

$\ulcorner$ Права частина даного рівняння – функція $f(x,\, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2}$ є однорідною функцією нульового виміру, оскільки

$$f(tx,\, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)^2} = \frac{t^2\left(x^2 + y^2\right)}{2t^2x^2} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} = f(x,\, y).$$

Застосуємо підстановку $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{x^2 + x^2u^2}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{x^2\left(1 + u^2\right)}{2x^2}, \quad u'x + u = \frac{1 + u^2}{2}, \quad u'x = \frac{1 + u^2}{2} - u,$$

$$u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2}, \qquad u'x = \frac{(u-1)^2}{2}, \qquad u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Диференціальне рівняння, яке ми отримали – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його:

$$\frac{du}{dx} = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}, \qquad \frac{2du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{2du}{(u-1)^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{-2}{u-1} = \ln|x| + \ln C, \quad \frac{-2}{u-1} = \ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u = \dfrac{y}{x}$:

$\dfrac{-2}{\frac{y}{x} - 1} = \ln C|x|$, $\quad \dfrac{-2x}{y - x} = \ln C|x|$, звідки знаходимо загальний

розв’язок заданого диференціального рівняння – $y = x - \dfrac{2x}{\ln C|x|}$.

Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad \text{або} \quad y' = -P(x)y + Q(x),$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a,\, b)$, називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

У випадку, коли $P(x) = \pm Q(x)$ або $Q(x) = 0$, рівняння є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Є кілька методів розв’язання лінійних диференціальних рівнянь. Розглянемо один із них – метод Бернуллі. Розв’язок рівняння шукаємо у вигляді добутку

$$y = u \cdot v,$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції. Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а інша визначається згідно з заданим рівнянням.

Знаходимо похідну функції y: $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y та y' в задане рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x),$$

$$u'v + u\left(v' + P(x)v\right) = Q(x).$$

Виберемо функцію v так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Звідси, маємо: $\begin{cases} v' + P(x)v = 0 \\ u'v = Q(x) \end{cases}$.

Знаходимо v з першого рівняння системи, яке є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними:

$\dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\quad \dfrac{dv}{v} = -P(x)dx$, $\quad$ звідки $\ln|v| = -\int P(x)dx$, $\quad$ або $v = e^{-\int P(x)dx}$. Під невизначеним інтегралом тут розуміємо одну з первісних функції $P(x)$.

Знаючи v, знаходимо u з другого рівняння системи:

$$v\frac{du}{dx} = Q(x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v} = Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx},$$

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \qquad u = \int Q(x)e^{\int P(x)}dx + C.$$

Підставляємо знайдені функції u та v у формулу і отримуємо загальний розв’язок лінійного диференціального рівняння:

$$y = u\cdot v = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Приклад 41. $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв’язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3,$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3 .$$

Виберемо функцію v так, щоб

$$v' - \frac{2v}{x} = 0 .$$

Знаходимо v:

$$v' = \frac{2v}{x}, \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}, \qquad \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x}, \qquad \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = 2\ln|x| ,$$

$\ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Підставляючи знайдену функцію v в отримане рівняння, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot x^2 = 2x^3$, $u' = \dfrac{2x^3}{x^2}$,

$$\frac{du}{dx} = 2x , \ \ du = 2x\,dx , \ \ \int du = \int 2x\,dx , \ \ u = 2\cdot\frac{x^2}{2} + C , \ \ u = x^2 + C .$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$. $\lrcorner$

Приклад 42. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

$\ulcorner$ Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + uv\operatorname{tg} x = \cos^2 x ,$$

$$u'v + u\left(v' + v\operatorname{tg} x\right) = \cos^2 x .$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\operatorname{tg} x = 0$. Знаходимо v:

$$v' + v\operatorname{tg} x = 0, \qquad \frac{dv}{dx} = -v\operatorname{tg} x , \qquad \frac{dv}{v} = -\operatorname{tg} x\,dx , \qquad \int\frac{dv}{v} = -\int\operatorname{tg} x\,dx ,$$

$\ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \cos x = \cos^2 x$, $u' = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x}$, $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, $du = \cos x\,dx$,

$\int du = \int \cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

Знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(\sin x + C\right)\cos x$. $\lrcorner$

Диференціальні рівняння другого порядку.

Диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію y та першу і другу похідні цієї функції: $F(x, y, y', y'') = 0$,

Загальним розв'язком диференціального рівняння є функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, яка перетворює диференціальне рівняння в тотожність при довільних фіксованих значеннях сталих C_1 та C_2.

Найпростіше диференціальне рівняння другого порядку має вигляд $y'' = f(x)$, де функція $f(x)$ – задана. Розв'яжемо задане рівняння. За означенням другої похідної $y'' = (y')' = \dfrac{d(y')}{dx}$. Тоді маємо $\dfrac{d(y')}{dx} = f(x)$. Звідси, $d(y') = f(x)\,dx$ і $y' = \int f(x)\,dx + C_1$, де C_1 – довільна стала. Аналогічно знаходимо $\dfrac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + C_1$ або $dy = \left(\int f(x)\,dx + C_1\right)dx$, звідки $y = \int\left(\int f(x)\,dx\right)dx + C_1x + C_2$.

Приклад 42. $y'' = x^2 - 2x$.

⌈ Це диференціальне рівняння другого порядку виду $y'' = f(x)$. Послідовно дістанемо $\dfrac{d(y')}{dx} = x^2 - 2x$, $d(y') = \left(x^2 - 2x\right)dx$,

$$y' = \int\left(x^2 - 2x\right)dx = \frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1.$$

Отже, $y' = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + C_1$, $dy = \left(\dfrac{x^3}{3} - x^2 + C_1\right)dx$,

$$y = \int\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + C_1\right)dx = \frac{1}{3}\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2 = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2.$$

Отже, $y = x^4 - x^3 + 4x^2 + C_1x + C_2$. ⌋

Приклад 43. $y'' = \sin 5x$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду $y'' = f(x)$. Послідовно дістанемо $\dfrac{d(y')}{dx} = \sin 5x$, $d(y') = \sin 5x\,dx$, $y' = \int \sin 5x\,dx = \dfrac{1}{5}\int \sin 5x\,d(5x) = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1$.

Остаточно маємо $y' = -\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1$, $dy = \left(-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1\right)dx$,
$y = \int\left(-\dfrac{1}{5}\cos 5x + C_1\right)dx = -\dfrac{1}{25}\sin 5x + C_1 x + C_2$.

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами $y(0) = 2$ і $y'(0) = -1$:

$$\begin{cases} y(0) = -\dfrac{1}{25}\sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 2 \\ y'(0) = -\dfrac{1}{5}\cos 0 + C_1 = -1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = 2 \\ -\dfrac{1}{5} + C_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 2 \\ C_1 = -1 + \dfrac{1}{5} = -\dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

Отже, $y = -\dfrac{1}{25}\sin 5x - \dfrac{4}{5}x + 2$.

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять y.

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду $F(x, y', y'') = 0$, або $y'' = f(x, y')$, яке не містить явно шуканої функції $y = y(x)$. Зробимо заміну $y' = z(x)$, тоді $y'' = z'$. Дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F(x, z, z') = 0, \text{ або } z' = f(x, z),$$

Якщо вдається знайти загальний розв'язок $z = z(x, C_1)$ рівняння, то отримаємо диференціальне рівняння першого порядку $y' = z(x, C_1)$. Звідси маємо загальний розв'язок $y = \int z(x, C_1)\,dx + C_2$.

Приклад 44. $y''x\ln x = y'$.

$\ulcorner$ Дане рівняння запишемо у вигляді $y'' = \dfrac{y'}{x\ln x}$ і отримаємо диференціальне рівняння другого порядку виду $y'' = f\left(x, y'\right)$. Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = \dfrac{z}{x\ln x}$. Розв’язуємо його:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x\ln x}, \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x}, \qquad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x}, \qquad \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1,$$

$\ln|z| = \ln|C_1\ln x|$, $z = C_1\ln x$.

Але $z = y'$. Тому маємо

$\dfrac{dy}{dx} = C_1\ln x$, $dy = C_1\ln x\,dx$, $\int dy = C_1\int\ln x\,dx$, звідки

$y = C_1x\left(\ln x - 1\right) + C_2$. $\lrcorner$

Диференціальні рівняння другого порядку, які не містять x.

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку виду $F\left(y, y', y''\right) = 0$, або $y'' = f\left(y, y'\right)$, яке не містить явно незалежну змінну x. Зробимо заміну $y' = p\left(y\right)$, де p вважається функцією від y. Тоді $y'' = \left(y'\right)' = p'_x = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = p'_y\cdot y'_x = p'_y\cdot p = pp'_y$. Тому дістанемо диференціальне рівняння першого порядку

$$F\left(y, p, pp'_y\right) = 0,\ \text{або}\ \ pp'_y = f\left(y, p\right).$$

Якщо вдається знайти загальний розв’язок рівняння $p = p\left(y, C_1\right)$, то отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = p\left(y, C_1\right), \quad \frac{dy}{dx} = p\left(y, C_1\right), \quad \frac{dy}{p\left(y, C_1\right)} = dx, \quad \int\frac{dy}{p\left(y, C_1\right)} = x + C_2.$$

Приклад 45. $y'' = -\dfrac{2}{y^5}$, якщо $y\left(-1\right) = 1$, $y'\left(-1\right) = 1$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду $y'' = f\left(y, y'\right)$. Зробимо заміну $y' = p\left(y\right)$, $y'' = pp'_y$. Дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними: $pp'_y = -\dfrac{2}{y^5}$.

Розв’яжемо його:

$$p\frac{dp}{dy} = -\frac{2}{y^5}, \qquad p\,dp = -\frac{2}{y^5}dy, \qquad \int p\,dp = -2\int y^{-5}dy, \qquad \frac{p^2}{2} = -2\frac{y^{-4}}{-4} + C_1,$$

$$p^2 = y^{-4} + 2C_1, \ p^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1, \ (y')^2 = \frac{1}{y^4} + 2C_1.$$

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв’язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти C_1 (підставляючи в отриману рівність умови $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$):

$$1 = 1 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Тому маємо $(y')^2 = \dfrac{1}{y^4}$, звідки $y' = \dfrac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y'(-1) = 1$).

Розв’язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2}, \ y^2dy = dx, \ \int y^2dy = \int dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = x + C_2 \Rightarrow y^3 = 3x + 3C_2.$$

Підставляємо початкову умову $y(-1) = 1$ і знаходимо: $1^3 = 3\cdot(-1) + 3C_2$, $3C_2 = 4$, $C_2 = \dfrac{4}{3}$. Тоді $y^3 = 3x + 4$. Остаточно маємо $y = \sqrt[3]{3x+4}$.

Приклад 46. $y''(1+y) - 5(y')^2 = 0$.

Маємо рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$. Зробимо заміну $y' = p(y)$, $y'' = pp'_y$. Дістанемо рівняння $pp'_y(1+y) - 5p^2 = 0$. Виносимо спільний множник p за дужки:

$$p\left(p'_y(1+y) - 5p\right) = 0.$$

Можливі два випадки.

1) $p = 0$, тоді $y' = 0$, $y = \text{const}$.

2) $p'_y(1+y) - 5p = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язуємо його:

$$(1+y)\frac{dp}{dy} = 5p, \quad \frac{dp}{p} = \frac{5dy}{y+1}, \quad \int\frac{dp}{p} = 5\int\frac{dy}{y+1}, \quad \ln|p| = 5\ln|y+1| + \ln C_1,$$

$$\ln|p| = \ln\left|C_1\cdot(y+1)^5\right|, \ p = C_1(y+1)^5, \ y' = C_1(y+1)^5.$$

Це є диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’язуємо його: $\dfrac{dy}{dx} = C_1 (y+1)^5$, $\dfrac{dy}{(y+1)^5} = C_1 dx$, $\int (y+1)^{-5} dy = C_1 \int dx$,

$\dfrac{(y+1)^{-4}}{-4} = C_1 x + C_2$, $\dfrac{1}{4(y+1)^4} = C_1 x + C_2$, $(y+1)^4 = \dfrac{1}{C_1 x + C_2}$.

Зауважимо, що розв’язок $y = \text{const}$ дістаємо із загального розв’язку при $C_1 = 0$. $\lrcorner$

$y'' - 5y' + 4y = 0$.

$\ulcorner$ Маємо рівняння виду (30). Запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв’яжемо його: $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$, тоді $k_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ і $k_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$.

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою (32) загальний розв’язок диференціального рівняння – $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$. $\lrcorner$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$, де p і q – дійсні числа, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Квадратне рівняння $k^2 + pk + q = 0$ називається відповідним характеристичним рівнянням. Загальний розв’язок рівняння залежить від значень коренів характеристичного рівняння. Можливі три випадки.

1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та різні, тобто $k_1 \neq k_2$, то загальний розв’язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні та рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x).$$

3. Якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені $\left(D = p^2 - 4q < 0\right)$, тобто $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$, де $i = \sqrt{-1}$ (уявна одиниця), $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$, то

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Приклад 47. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

⌈ Це рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k+4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x}\left(C_1 + C_2x\right)$. ⌋

Приклад 48. $y'' + 4y' - 5y = 0$.

⌈ Маємо рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 4k - 5 = 0$. Розв'язуємо його: $D = 4^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36$, $k_1 = \frac{-4-\sqrt{36}}{2} = \frac{-4-6}{2} = -5$, $k_2 = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1$. тобто маємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{x}$. ⌋

Приклад 49. $y'' + 2y' + 10y = 0$.

⌈ Маємо рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Розв'язуємо його: $D = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \frac{-2-\sqrt{-36}}{2} = \frac{-2-6i}{2} = -1-3i$, $k_2 = \frac{-2+\sqrt{-36}}{2} = \frac{-2+6i}{2} = -1+3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Маємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. ⌋

Однорідні системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$ де коефіцієнти a_{ij} – сталі, t – незалежна змінна, $x(t)$, $y(t)$ – невідомі функції, називається однорідною системою двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Задача Коші для системи полягає у знаходженні функцій $x(t)$ і $y(t)$, що задовольняють дану систему і задані початкові умови

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Розв'язання системи виконують таким чином. Вважаючи, що в першому рівнянні системи $a_{12} \neq 0$, виразимо в ньому y через x:

$$y = \frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x.$$

Продиференціюємо цю рівність по t: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{a_{12}}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{a_{11}}{a_{12}}\dfrac{dx}{dt}$.

Підставляючи отримані вирази в друге рівняння системи, отримаємо

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\frac{dx}{dt} = a_{21}x + a_{22}\left(\frac{1}{a_{12}}\frac{dx}{dt} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x\right),$$

$$\frac{1}{a_{12}}\frac{d^2x}{dt^2} - \left(\frac{a_{11}}{a_{12}} + \frac{a_{22}}{a_{12}}\right)\frac{dx}{dt} + \left(\frac{a_{11}}{a_{12}}a_{22} - a_{21}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22})\frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = 0.$$

Рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами з незалежною змінною t і невідомою функцією $x(t)$. Розв'язуємо його відносно $x(t)$. Після цього знаходимо функцію $y(t)$ і записуємо остаточну відповідь.

Приклад 50. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

$\ulcorner$ Маємо систему двох лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. З першого рівняння виражаємо y:

$$\frac{dx}{dt} = -x + 5y, \quad 5y = \frac{dx}{dt} + x, \quad y = \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{1}{5}x.$$

Диференціюємо останню рівність по t і отримуємо

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt}.$$

Підставимо знайдені y та $\dfrac{dy}{dt}$ в друге рівняння системи:

$$\frac{1}{5}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}=x+3\left(\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}+\frac{1}{5}x\right),\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=5x+3\frac{dx}{dt}+3x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}-2\frac{dx}{dt}-8x=0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами виду. Коренями його характеристичного рівняння $k^2-2k-8=0$ є $k_1=-2$ і $k_2=4$. Тоді загальний розв'язок цього рівняння буде мати вигляд: $x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі. Так як $\dfrac{dx}{dt}=-2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}$, то підставляючи знайдені $x(t)$ та $\dfrac{dx}{dt}$ у вираз для y ($y=\dfrac{1}{5}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{5}x$), отримаємо

$$y(t)=\frac{1}{5}\left(-2C_1e^{-2t}+4C_2e^{4t}\right)+\frac{1}{5}\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}\right),\quad y(t)=-\frac{1}{5}C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}.$$

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{4t} \\ y(t)=-\dfrac{1}{5}C_1e^{-2t}+C_2e^{4t}. \end{cases} \lrcorner$$

Додаток 1.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1. $(c)' = 0$ (c – стале число)

2. $\left(x^{n}\right)' = n \cdot x^{n-1}$ (n – будь-яке дійсне число)

3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$

Зокрема, при $a = e$: $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

4. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ ($a > 0,\ a$ №1)

Зокрема, при $a = e$: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5. $(\sin x)' = \cos x$

6. $(\cos x)' = -\sin x$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}$

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

12. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

Основні правила диференціювання функцій

1º. $\left(c \cdot f(x)\right)' = c \cdot f'(x)$, де c – стала.

2º. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, де $u = u(x)$; $v = v(x)$.

Це правило узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$(u \pm v \pm w \pm \ldots \pm z)' = u' \pm v' \pm w' \pm \ldots \pm z'.$$

3º. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

4º. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

5º. Нехай $y = f\left[u(x)\right]$ – складна функція, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут u – проміжний аргумент, x – незалежна змінна. Тоді

$$y' = f'(u) \cdot u'(x).$$

Додаток 2.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^n \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$.

Зокрема, при $n = 0$: $\quad \int dx = x + C$

Зокрема, при $n = 1$: $\quad \int x \, dx = \dfrac{x^2}{2} + C$

Зокрема, при $n = -\dfrac{1}{2}$: $\quad \int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

2. $\int x^{-1} \, dx = \int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad \left(a > 0,\ a \neq 1\right)$.

Зокрема, при $a = e$: $\quad \int e^x \, dx = e^x + C$.

4. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

8. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$

9. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$

10. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C \quad \left(a > 0\right)$.

Зокрема, при $a = 1$: $\quad \int \dfrac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C \quad \left(a > 0\right)$.

Зокрема, при $a = 1$: $\quad \int \dfrac{dx}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2} \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0).$

Зокрема, при $a = 1$: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C \quad (a \neq 0).$

Зокрема, при $a = 1$: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C.$

Властивості невизначеного інтеграла

1°. $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (k – стала, $k \neq 0$).

2°. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx.$

Ця властивість узагальнюється на довільне скінченне число доданків:

$$\int \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_m(x)\right) dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \ldots \pm \int f_m(x)\,dx .$$

3°. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то для будь-яких сталих k та b ($k \neq 0$)

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$$

Частинні випадки властивості 3° (відповідно при $b = 0$ та $k = 1$):

3.1°. $\displaystyle\int f(kx)\,dx = \frac{1}{k}F(kx) + C;$

3.2°. $\int f(x+b)\,dx = F(x+b) + C.$