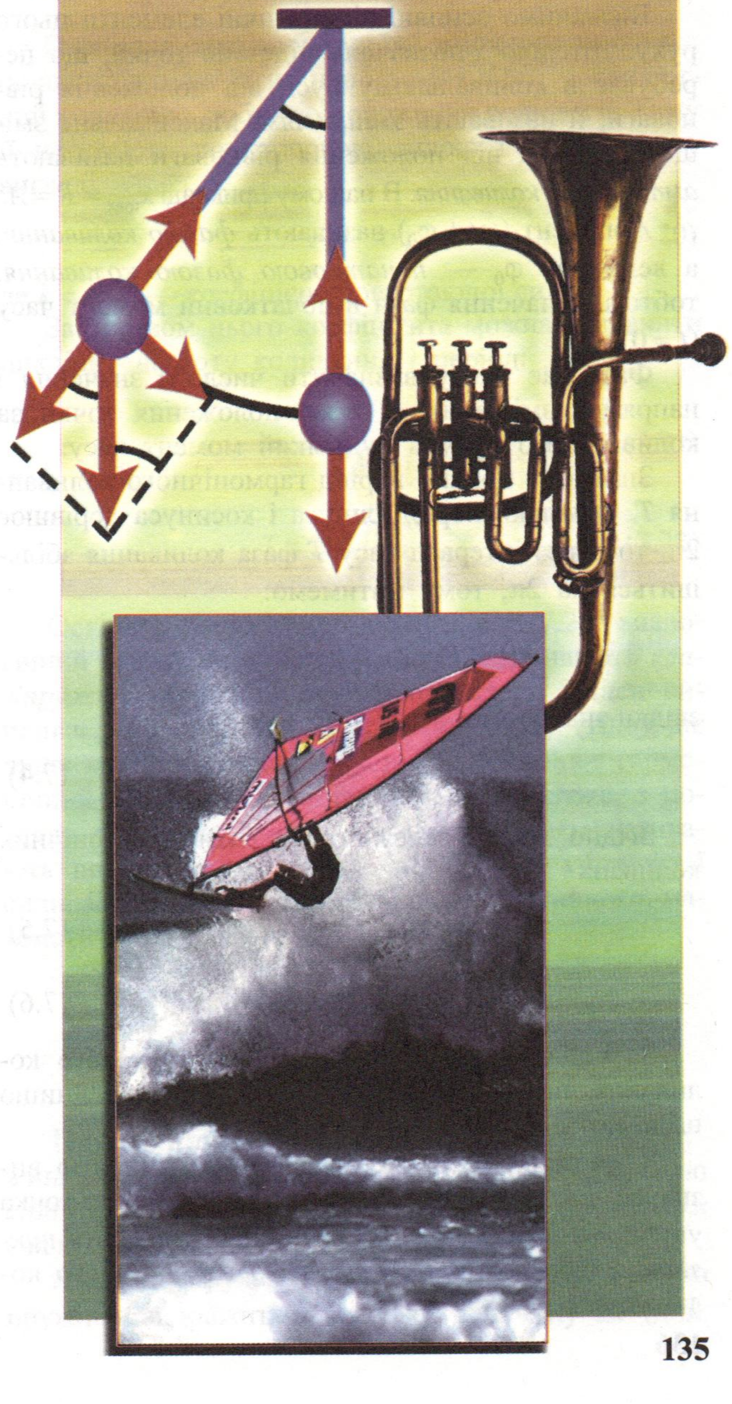
Розділ 7

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ



7.1. КІНЕМАТИКА МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Коливальним рухом, або просто *коливанням*, називають будь-який рух чи зміну стану, що характеризується повторюваністю в часі значень фізичних величин, які визначають цей рух чи стан. З коливаннями ми стикаємося під час вивчення найрізноманітніших явищ: звуку, світла, змінних струмів, радіохвиль, руху маятника тощо. Є загальні закономірності цих явищ та математичні методи їх дослідження.

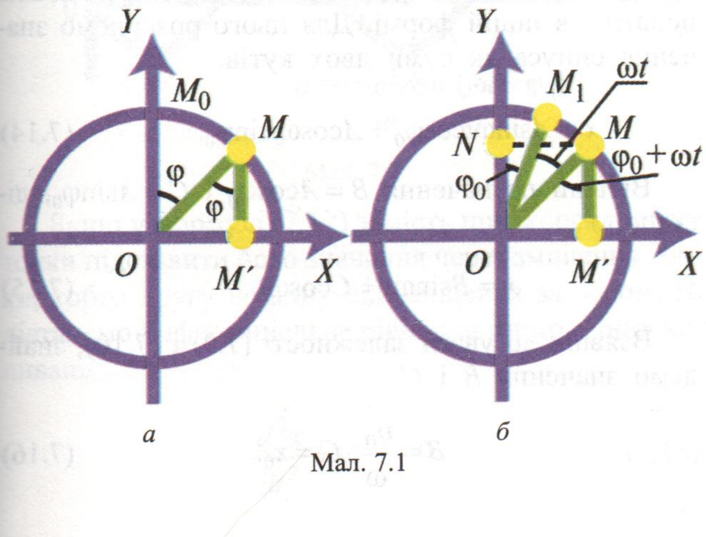
Прикладами коливального руху в механіці можуть бути коливання маятників, струн, мембран телефонів, балансирів годинників, поршнів двигунів внутрішнього згоряння, мостів та інших споруд, що зазнають змінних навантажень.

Коливальний рух називають *періодичним*, якщо значення фізичних величин, що змінюються в процесі коливань, повторюються через однакові інтервали часу.

Мінімальний інтервал (проміжок) часу, через який повторюється положення тіла в коливальному русі, називають *періодом коливання* T. Число коливань, що здійснює тіло за одиницю часу, називають *частотою коливань* ν.

Серед різних коливальних рухів у природі і техніці важливе значення мають гармонічні коливальні рухи. *Гармонічним* називають коливальний рух, за якого матеріальна точка зміщується від положення рівноваги за законом синуса або косинуса. Важливість цього руху пояснюють тим, що коливання в природі і техніці дуже близькі до гармонічних, а також тому, що складні коливання можна розкласти на гармонічні.

Розглянемо, наприклад, зв'язок між рухом по колу і гармонічним коливанням. Нехай матеріальна точка M рівномірно рухається по колу радіусом R з кутовою швидкістю ω. Розглянемо рух проекції цієї точки M' на осі OX (мал. 7.1, *а*):



Мал. 7.1

$$x = R\sin\varphi = R\sin\omega t, \qquad (7.1)$$

де $\varphi = \omega t$.

Якщо точка M почала свій рух по колу не з початкового положення M_0, а з довільного M_1 (див. мал. 7.1, *б*), то зміщення точки M' від положення рівноваги становитиме

$$x = R\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (7.2)$$

З мал. 7.1, *б* видно, що рух проекції точки M на вісь OY N також є гармонічним коливанням. Зміщення цієї точки N дорівнює

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (7.3)$$

Вирази (7.2) і (7.3) є рівняннями гармонічного коливання в загальному вигляді.

Визначимо основні кінематичні елементи цього руху. Літерою x позначено відстань точки, що перебуває в коливальному русі, від положення рівноваги; її називають *зміщенням*. Максимальне зміщення точки від положення рівноваги називають *амплітудою коливання*. В нашому прикладі $x_{max} = R = A$.

Аргумент $(\omega t + \varphi_0)$ називають *фазою коливання*, а величину φ_0 — *початковою фазою коливання*, тобто це значення фази в початковий момент часу $(t = 0)$.

Фаза дає змогу визначити числове значення і напрямок зміщення, а отже, положення точки за коливального руху в будь-який момент часу.

Знайдемо повний період гармонічного коливання T. Оскільки період синуса і косинуса дорівнює 2π, то через інтервал часу T фаза коливання збільшиться на 2π, тому матимемо:

$$\omega(t + T) + \varphi_0 - (\omega t + \varphi_0) = 2\pi,$$

звідки знаходимо:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (7.4)$$

Згідно з цією залежністю частота гармонічних коливань

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \qquad (7.5)$$

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (7.6)$$

За одиницю частоти взято частоту такого коливання, період якого дорівнює 1 с. Цю одиницю називають *герцом* (Гц).

З формули (7.6) випливає, що величина ω визначає число повних коливань, які здійснює точка упродовж 2π секунд. Цю величину називають *циклічною* (або *коловою*) *частотою* гармонічного коливання.

Швидкість точки в гармонічному коливанні знайдемо як першу похідну від зміщення за часом із формули (7.2):

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (7.7)$$

або

$$\upsilon = A\omega\sin(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}). \qquad (7.8)$$

Знак похідної $\frac{dx}{dt}$ визначає, в якому напрямку (додатному чи від'ємному) по осі X в даний момент часу рухається точка M'.

Амплітуду A і початкову фазу φ_0 коливання визначають за початковими умовами руху. Нехай у початковий момент $(t = 0)$ зміщення точки M' дорівнює x_0, а її швидкість — υ_0. Підставивши у формули (7.2) і (7.7) $t = 0$, дістанемо:

$$x_0 = A\sin\varphi, \; \upsilon_0 = A\omega\cos\varphi_0, \qquad (7.9)$$

звідки

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\upsilon_0^2}{\omega^2}} \quad \text{і} \quad \mathrm{tg}\varphi_0 = \frac{\omega x_0}{\upsilon_0}. \qquad (7.10)$$

Прискорення точки за гармонічного коливання знаходимо як похідну від швидкості за часом:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\,\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (7.11)$$

З урахуванням виразів (7.2) і (7.11) рівняння прискорення точки за гармонічного коливання можна записати в такому вигляді:

$$a = -\omega^2 x, \qquad (7.12)$$

або

$$a = A\,\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \qquad (7.13)$$

Рівняння (7.2) гармонічного коливання можна подати і в іншій формі. Для цього розкриємо значення синуса як суми двох кутів:

$$x = A\sin\omega t\cos\varphi_0 + A\cos\omega t\sin\varphi_0. \qquad (7.14)$$

Ввівши позначення $B = A\cos\varphi_0$ і $C = A\sin\varphi_0$, дістанемо

$$x = B\sin\omega t + C\cos\omega t. \qquad (7.15)$$

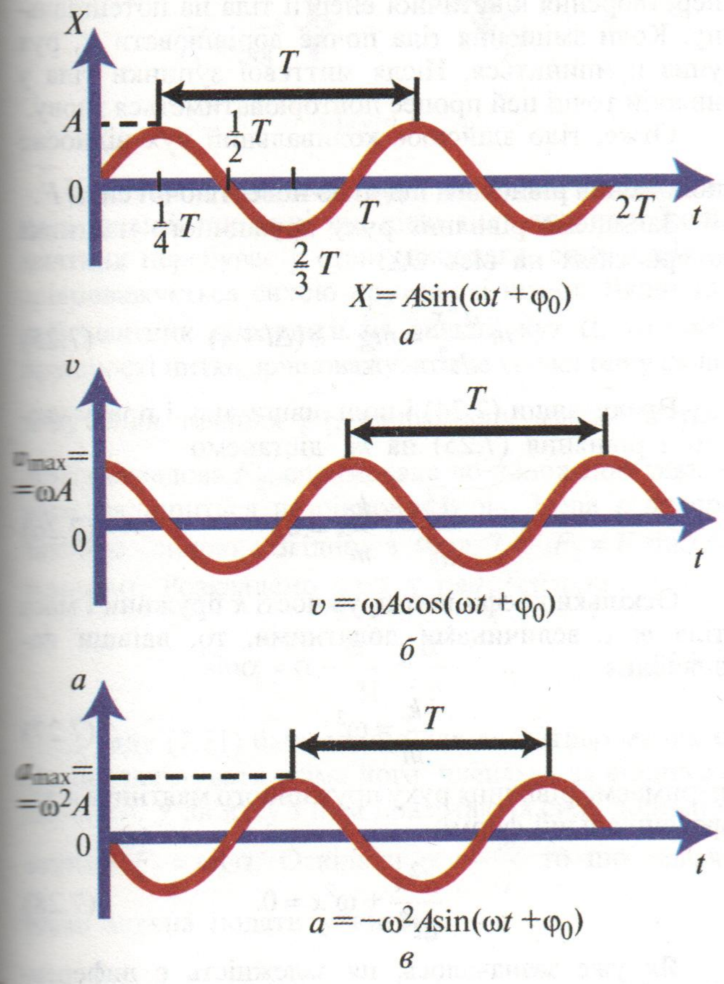
Взявши до уваги залежності (7.9) і (7.10), знайдемо значення B і C:

$$B = \frac{\upsilon_0}{\omega}; \; C = x_0. \qquad (7.16)$$

Підставимо значення B і C з виразу (7.16) у формулу (7.15), дістанемо вираз

$$x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t. \qquad (7.17)$$

Зміщення, швидкість і прискорення за гармонічного коливального руху, як видно з рівнянь (7.2), (7.8) і (7.13), є гармонічними змінними величинами з однаковим періодом, але з різницею фаз відповідно $\frac{\pi}{2}$ і π. Графіки цих кінематичних характеристик є, очевидно, синусоїдами (мал. 7.2). Зі співвідношень (7.10) і (7.17) випливає, що для однієї й тієї самої коливальної системи амплітуда A, початкова фаза φ_0 і зміщення точки x залежать від початкових умов: x_0 і v_0.



Мал. 7.2

Якщо у формулі (7.12) замість прискорення руху точки підставити його значення через зміщення точки, тобто другу похідну від зміщення за часом, то дістанемо диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (7.18)$$

Систему, яка описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку (7.18), називають *гармонічним осцилятором*.

7.2. ДИНАМІКА ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Характерною особливістю гармонічних коливань є те, що прискорення пропорційне зміщенню і спрямоване в бік, протилежний зміщенню (7.12). Знаючи прискорення руху і масу точки, за другим законом Ньютона знайдемо діючу силу, що спричинює цей рух:

$$F = ma = -m\omega^2 x. \qquad (7.19)$$

Отримана сила пропорційна зміщенню точки від положення рівноваги і напрямлена в бік, протилежний зміщенню, тобто до положення рівноваги. Тому її називають повертаючою силою і записують у вигляді

$$F = -kx, \qquad (7.20)$$

де $k = m\omega^2$ — коефіцієнт повертаючої сили.

За виразом цього коефіцієнта можна визначити циклічну частоту коливання і період:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \qquad (7.21)$$

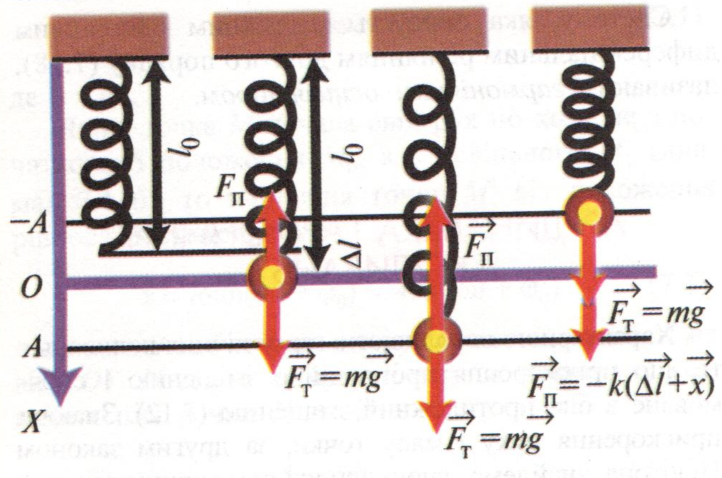
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (7.22)$$

Оскільки вираз повертаючої сили (7.20) аналогічний виразу сили пружності, то її називають *квазіпружною* (начебто пружною) силою. Звідси випливає, що коли на матеріальну точку (тіло) діє лише квазіпружна сила, то вона спричинює гармонічний рух матеріальної точки (тіла). Отже, з погляду динаміки, гармонічним коливанням називають процес, який виникає під дією квазіпружної сили. Як приклад розглянемо рухи пружинного, математичного і фізичного маятників.

7.3. МАЯТНИКИ

Пружинний маятник. Тіло, підвішене на пружині, яке може здійснювати коливання під дією сили пружності, називають *пружинним маятником* (мал. 7.3).

Якщо до пружини підвісити тіло масою m, то пружина видовжиться на таку величину Δl (див.



Мал. 7.3

мал. 7.3, *б*), за якої сила пружності $\vec{F}_п$, що виникне в пружині, за абсолютною величиною дорівнюватиме деформуючій силі $\vec{F}_{деф}$, що дорівнює вазі тіла $m\vec{g}$.

Характеризуємо зміщення тіла від положення рівноваги координатою x. Причому вісь OX спрямуємо вертикально вниз, а початок координат сумістимо з положенням рівноваги тіла. У стані рівноваги сила тяжіння тіла $\vec{F}_т$ зрівноважується силою пружності $\vec{F}_п$:

$$\vec{F}_т + \vec{F}_п = 0. \qquad (7.23)$$

Рівняння (7.23) у скалярній формі матиме вигляд

$$mg - k\Delta l = 0. \qquad (7.24)$$

Виведемо тіло зі стану рівноваги, розтягнувши пружину на величину A (див. мал. 7.3, *в*). При цьому проти сили пружності буде виконано роботу $\frac{kA^2}{2}$, внаслідок чого зміниться потенціальна енергія системи. Якщо потенціальну енергію пружинного маятника у стані рівноваги взяти такою, що дорівнює нулю, то запас його потенціальної енергії становитиме $W_п = \frac{kA^2}{2}$. Сила пружності $\vec{F}_п$ зросте і за абсолютною величиною перевищить силу тяжіння $\vec{F}_т$. Рівнодійна цих сил буде спрямована вгору, тобто до положення рівноваги, а її модуль $|\vec{F}| = |\vec{F}_п| - |\vec{F}_т|$.

Звільнившись від зв'язків, тіло під дією рівнодійної сили $\vec{F}$ прискорено рухатиметься до стану рівноваги, його кінетична енергія зростає за рахунок зменшення потенціальної енергії деформованої пружини. В момент проходження маятником стану рівноваги рівнодійна сила $\vec{F}$ і його потенціальна енергія $W_п$ дорівнюють нулю, а кінетична енергія — максимальна. За інерцією тіло продовжує рухатись і підіймається вгору від положення рівноваги. Цей рух буде сповільненим і припиниться тоді, коли кінетична енергія повністю перейде в потенціальну, тобто коли зміщення тіла дорівнюватиме $-A$, а рівнодійна сила $\vec{F} = \vec{F}_п + \vec{F}_т$ буде максимальною і спрямована до положення рівноваги (див. мал. 7.3, *г*). Тому після миттєвої зупинки у верхній точці тіло почне рухатись униз зі зростаючою швидкістю. В момент проходження положення рівноваги рівнодійна сила і потенціальна енергія дорівнюватимуть нулю, а швидкість і кінетична енергія будуть максимальними. Тіло за інерцією продовжує рухатись униз, розтягує пружину за рахунок перетворення кінетичної енергії тіла на потенціальну. Коли зміщення тіла почне дорівнювати A, рух униз припиниться. Після миттєвої зупинки тіла у нижній точці цей процес повторюватиметься знову.

Отже, тіло здійснює коливальний рух відносно положення рівноваги під дією повертаючої сили $\vec{F}$.

Запишемо рівняння руху пружинного маятника в проекціях на вісь OX:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(\Delta l + x). \qquad (7.25)$$

Врахувавши (7.24) і поділивши ліву і праву частини рівняння (7.25) на m, дістанемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (7.26)$$

Оскільки коефіцієнт пружності k пружини і маса тіла m є величинами додатними, то, ввівши позначення

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \qquad (7.27)$$

отримаємо рівняння руху пружинного маятника в диференціальній формі:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (7.28)$$

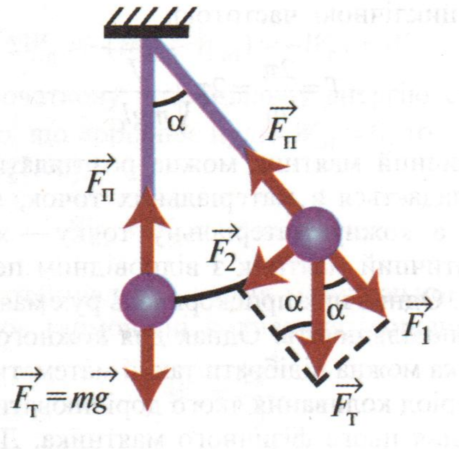
Як уже зазначалось, ця залежність є диференціальним рівнянням гармонічного коливання, розв'язком його є

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (7.29)$$

Отже, пружинний маятник здійснює гармонічні коливання навколо положення рівноваги. Їхню циклічну частоту визначають за виразом (7.27), а період

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (7.30)$$

Математичний маятник. Моделлю математичного маятника може бути кулька, підвішена на довгій ($l >> R_к$) нитці, що мало розтягується. Масою нитки можна знехтувати порівняно з масою кульки ($m_н << m_к$) (мал. 7.4). Позначимо через α кут відхилення маятника від вертикалі.



Мал. 7.4

Коливання математичного маятника відбувається в заданій площині під дією сили тяжіння. Коли маятник перебуває у стані рівноваги, сила тяжіння зрівноважується силою пружності нитки. Якщо такий маятник відхилити на деякий кут α, то сила пружності нитки зрівноважуватиме тільки одну складову сили тяжіння $\vec{F}_1$, напрямлену вздовж нитки. Друга складова $\vec{F}_2$, спрямована до положення рівноваги, залишиться незрівноваженою. Вона є повертаючою силою. Згідно з мал. 7.4 $F_2 = F_т\sin\alpha = mg\sin\alpha$. Розкладемо $\sin\alpha$ у *ряд Тейлора*:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \qquad (7.31)$$

З ряду (7.31) бачимо, що для достатньо малих α можна знехтувати всіма його членами, за винятком першого. У зв'язку з цим повертаюча сила дорівнюватиме $F_2 = mg\alpha$. Оскільки $\alpha = -\frac{x}{l}$, то цю залежність можна подати у вигляді

$$F_2 = -mg\frac{x}{l}. \qquad (7.32)$$

Звідси випливає, що повертаюча сила F_2 пропорційна зміщенню і спрямована в протилежний бік. Під дією такої сили виникають, як відомо, гармонічні коливання. Запишемо диференціальне рівняння, яке описує ці коливання:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l}x. \qquad (7.33)$$

Після відповідних перетворень дістанемо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l}x = 0 \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad (7.34)$$

де ω — циклічна частота власних коливань математичного маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (7.35)$$

Співвідношення (7.34) є диференціальним рівнянням гармонічного коливання математичного маятника, загальний розв'язок його такий:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (7.36)$$

Дві сталі — амплітуда A і початкова фаза φ_0 — визначаються за початковими умовами (формули (7.9) і (7.10)).

Період коливань математичного маятника описується залежністю

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (7.37)$$

З формули (7.37) випливають такі *закономірності коливання математичного маятника*:

1) період коливання маятника не залежить від його маси;

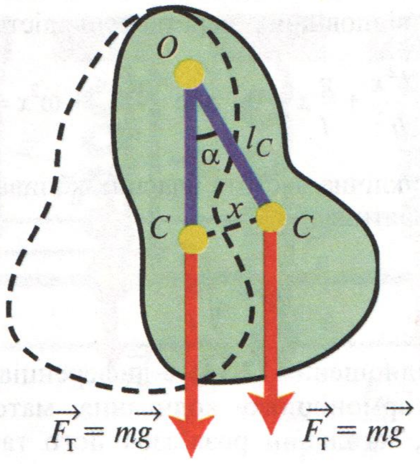
2) період коливання маятника не залежить від амплітуди за умови, що $\sin\alpha \approx \alpha$. Це справджується для малих кутів 10—15°;

3) період коливання прямо пропорційний кореню квадратному зі значення довжини математичного маятника й обернено пропорційний кореню квадратному з прискорення вільного падіння.

За допомогою математичного маятника можна визначити прискорення вільного падіння в будь-якій точці земної поверхні. Оскільки земна кора в різних місцях має неоднаковий склад, то й густина її в різних місцях різна. У тих місцях, де густина більша, прискорення вільного падіння буде більшим. Вимірюючи його величини за допомогою математичного маятника, можна розвідувати поклади корисних копалин.

Фізичний маятник. Фізичним маятником називають тверде тіло довільної форми, яке під дією сили земного тяжіння здатне коливатися відносно горизонтальної осі, що не проходить через його центр мас (центр тяжіння).

У положенні стійкої рівноваги центр мас маятника розміщується під дією сили тяжіння на вертикалі, яка проходить через центр мас і перетинає вісь. У разі відхилення маятника від положення рівноваги на деякий кут α (мал. 7.5) виникає момент



Мал. 7.5

сили, який намагається повернути його у положення рівноваги. За малих величин кута α, коли можна вважати, що $\sin\alpha \approx \alpha$, цей момент дорівнюватиме (див. мал. 7.5):

$$M = -mg\, l_C\, \alpha, \tag{7.38}$$

де m — маса маятника; l_C — відстань від осі O до центра мас маятника.

Знак «мінус» у рівнянні (7.38) означає, що момент сили M спрямований у бік, протилежний кутовому зміщенню $\vec{\alpha}$.

Позначимо момент інерції маятника відносно осі коливання через J і візьмемо до уваги закон динаміки обертального руху, за яким $M = J\dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$. Тоді залежність (7.38) набуде вигляду

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl_C\alpha, \tag{7.39}$$

або

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl_C}{J}\alpha = 0. \tag{7.40}$$

Оскільки m, g, l_C і J є додатними величинами, введемо позначення

$$\omega^2 = \frac{mgl_C}{J}. \tag{7.41}$$

Тоді вираз (7.40) можна записати так:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \tag{7.42}$$

Це рівняння цілком аналогічне рівнянню гармонічного осцилятора. Отже, воно є диференціальним рівнянням гармонічного коливання фізичного маятника. Загальним розв'язком його, у чому легко переконатися підстановкою, буде таке рівняння коливального руху фізичного маятника:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{7.43}$$

де α_0 — амплітуда коливання (найбільший кут відхилення від положення рівноваги, радіан); ω — циклічна частота, яку визначають за формулою (7.41); φ_0 — початкова фаза коливання.

Період коливання фізичного маятника визначимо за циклічною частотою:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_C}}. \tag{7.44}$$

Фізичний маятник можна розглядати як такий, що складається з матеріальних точок, які коливаються, а кожну матеріальну точку — як окремий математичний маятник з відповідним періодом коливань. Одні з них прискорюють рух маятника, а інші — сповільнюють. Однак для кожного фізичного маятника можна підібрати такий математичний маятник, період коливання якого дорівнюватиме періоду коливання цього фізичного маятника. Довжину такого математичного маятника називають *зведеною довжиною фізичного маятника*.

Прирівнявши праві частини рівнянь (7.37) і (7.44), знайдемо формулу для визначення зведеної довжини $l_{зв}$ фізичного маятника:

$$l_{зв} = \frac{J}{ml_C}. \tag{7.45}$$

Точку на фізичному маятнику, що відповідає зведеній його довжині, називають *центром коливань*. Точка підвішування фізичного маятника і центр його коливань є спряженими точками. Якщо їх поміняти ролями, то період коливань фізичного маятника не зміниться.

Фізичний маятник так само, як і математичний, має властивість ізохронності, тобто період його коливань не залежить від амплітуди. Завдяки цій властивості він став важливою складовою частиною годинника. За періодом коливання фізичного маятника можна легко визначити прискорення вільного падіння g та моменти інерції тіл неправильної форми.

За зведеною довжиною фізичного маятника визначають момент інерції тіл різної форми.

7.4. ЕНЕРГІЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

Гармонічний коливальний рух матеріальної точки здійснюється під дією квазіпружної повертаючої сили. Оскільки квазіпружні сили є консервативними, то повна енергія гармонічного коливання має залишатися сталою. Нехай матеріальна точка масою m здійснює коливання під дією квазіпружної сили $F = -kx$.

При зміщенні матеріальної точки на x ця сила виконує роботу

$$A = \int_0^x -kxdx = -\frac{kx^2}{2}, \quad (7.46)$$

яка витрачається на зміну потенціальної енергії системи, тобто

$$A = -\Delta W_п = -(W_{п2} - W_{п1}) = -W_{п2} + W_{п1}. \quad (7.47)$$

Якщо початкову потенціальну енергію системи взяти такою, що дорівнює нулю $W_{п1} = 0$, то, згідно з формулою (7.46),

$$W_{п2} = W_п = -A = \frac{kx^2}{2}.$$

Отже, потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання, дорівнює

$$W_п = \frac{kx^2}{2}. \quad (7.48)$$

Матеріальна точка, що коливається, має певну швидкість υ, а отже, й кінетичну енергію

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \quad (7.49)$$

Підставивши значення k, x і υ у формули (7.48) і (7.49) відповідно з виразів (7.27), (7.2) і (7.7), дістанемо:

$$W_п = \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}; \quad (7.50)$$

$$W_к = \frac{m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \quad (7.51)$$

Потенціальна енергія $W_п$ матеріальної точки досягає максимуму в крайніх точках (за $x = A$):

$$W_{п\,max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (7.52)$$

а кінетична енергія $W_к$ в цих точках дорівнює нулю. І навпаки, кінетична енергія матеріальної точки досягає максимуму при проходженні нею через положення рівноваги:

$$W_{к\,max} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (7.53)$$

а потенціальна енергія в цих точках дорівнює нулю.

Повна енергія матеріальної точки, що перебуває в гармонічному коливальному русі, дорівнює сумі обох видів потенціальної і кінетичної енергій:

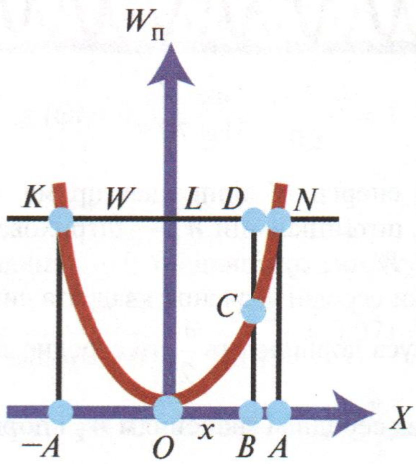
$$W = W_к + W_п =$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (7.54)$$

тобто повна енергія гармонічних коливань є сталою величиною. Вона пропорційна масі тіла, квадрату амплітуди і квадрату частоти.

Графічне зображення потенціальної енергії при коливальних рухах як функції зміщення x подано на мал. 7.6 параболою (7.48). Якщо повну енергію W зобразити відрізком AN, то потенціальній енергії за даного значення x відповідатиме відрізок BC, а кінетичній — відрізок CD. Можливі зміщення лежать між $-A$ та A. Звідси випливає, що матеріальна точка здійснює коливання в цих межах відносно положення рівноваги, яке визначається зміщенням $x = 0$. Під час цього процесу енергія весь час переходить



Мал. 7.6

із потенціальної в кінетичну і навпаки. За один період коливання T повна енергія двічі повністю переходить у потенціальну — крайні положення з обох боків, і двічі цілком переходить у кінетичну під час проходження положення рівноваги. Зі сказаного випливає, що енергія «коливається» з періодом T', який вдвічі менший за період самого коливального руху T, тобто частота зміни потенціальної і кінетичної енергії вдвічі більша за частоту гармонічних коливань 2ω. Щоб проілюструвати це наочно, досить виразити квадрати синуса і косинуса кута у формулах (7.50) і (7.51) через косинус подвійного кута:

$$W_п = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= W\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(\omega t + \varphi_0)\right]; \quad (7.55)$$

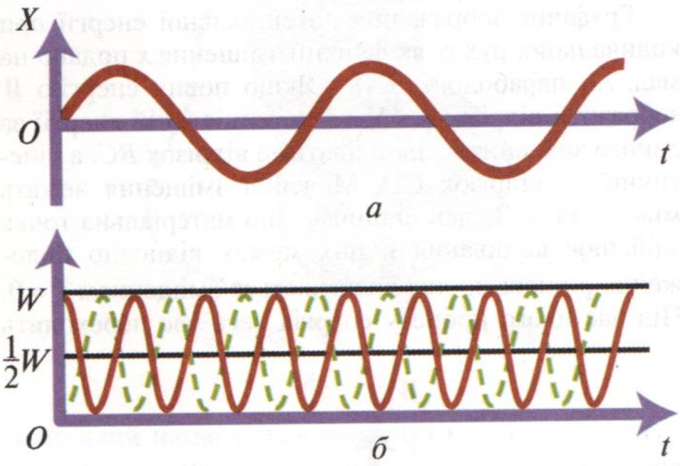
$$W_к = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= W\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2(\omega t + \varphi_0)\right], \quad (7.56)$$

де W — повна енергія системи.

Згідно з формулами (7.55) і (7.56) $W_п$ і $W_к$ змінюються із частотою 2ω.

На мал. 7.7, *а,б* зображено графіки залежності x, $W_п$ і $W_к$ від часу.



Мал 7.7

Повній енергії W відповідає пряма, паралельна осі абсцис, потенціальній $W_п$ — штрихова синусоїда, кінетичній $W_к$ — суцільна.

Оскільки середні значення квадрата синуса і квадрата косинуса дорівнюють $\frac{1}{2}$, то середнє значення $W_п$ збігається із середнім значенням $W_к$ і дорівнює $\frac{1}{2}W$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Задача 7.1. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання з частотою $\nu = 10$ Гц. У момент, узятий за початковий, вона мала максимальне зміщення $x_{max} = 0{,}01$ м. Написати рівняння коливань точки.

Розв'язування

$x_{max} = 0{,}01$ м $\nu = 10$ Гц x — ?	Рівняння гармонічних коливань матеріальної точки можна записати у вигляді залежності (7.2) або (7.3):

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_{01}) \qquad (а)$$

або

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_{02}), \qquad (б)$$

де A — амплітуда коливань; ω — циклічна частота; t — час; φ_{01}, φ_{02} — початкові фази, що відповідають виразам (*а*) або (*б*).

За означенням, амплітуда коливань дорівнює

$$A = x_{max}.$$

Циклічну частоту знайдемо за формулою (7.5):

$$\omega = 2\pi\nu.$$

Початкова фаза залежить від форми запису рівняння гармонічного коливання. Якщо скористатися формулою (*а*), то початкову фазу можна визначити з умови, що в момент часу $t = 0$

$$x_{max} = A\sin\varphi_{01},$$

звідки

$$\varphi_{01} = \arcsin\frac{x_{max}}{A} = \arcsin 1,$$

або

$$\varphi_{01} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \text{ (де } m = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots).$$

Зміна фази на 2π не змінює стану коливального руху, тому можна записати, що

$$\varphi_{01} = \frac{\pi}{2}. \qquad (в)$$

Для форми запису (*б*) отримаємо

$$\varphi_{02} = \arccos\frac{x_{max}}{A} = \arccos 1,$$

або

$$\varphi_{02} = 2m\pi \text{ (де } m = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots).$$

Міркуючи аналогічно першому випадку, знайдемо

$$\varphi_{02} = 0. \qquad (г)$$

З урахуванням залежностей (*в*)—(*г*) рівняння коливань матимуть вигляд

$$x = 0{,}01\sin(20\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ або } x = 0{,}01\cos 20\pi t.$$

Відповідь: $x = 0{,}01\sin(20\pi t + \frac{\pi}{2})$, або $x = 0{,}01\cos 20\pi t$.

Задача 7.2. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання. Період коливань 2 с, амплітуда 0,05 м, початкова фаза дорівнює нулю. Знайти швидкість і прискорення точки в момент часу, коли вона зміститься від положення рівноваги на 0,025 м.

Розв'язування

$T = 2$ с $A = 0{,}05$ м $\varphi_0 = 0$ $x = 0{,}025$ м	Рівняння гармонічних коливань запишемо у вигляді залежності (7.2): $x = A\sin\omega t. \qquad (а)$
υ — ? a — ?	Виразимо циклічну частоту ω через період згідно з формулою (7.4):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (б)$$

Підставимо вираз (*б*) в (*а*) і дістанемо

$$x = A\sin\frac{2\pi}{T}t = 0{,}05\sin\frac{2\pi}{2}t = 0{,}05\sin\pi t. \qquad (в)$$

З рівняння (*в*) визначимо момент часу, за якого зміщення точки дорівнюватиме 0,025 м:

$$0{,}025 = 0{,}05\sin\pi t,\ \text{звідки}\ \sin\pi t = \frac{1}{2},\quad \text{а}\ \pi t = \frac{\pi}{6}.$$

Отже,

$$t = \frac{1}{6}\,\text{с}.$$

Знайдемо рівняння швидкості коливального руху точки як першу похідну від рівняння зміщення за часом, скориставшись виразом (*в*):

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = 0{,}05\pi\cos\pi t. \qquad (г)$$

Підставимо знайдене значення $t = \frac{1}{6}$ с в цю залежність і дістанемо

$$\upsilon = 0{,}05\pi\cos\frac{\pi}{6} = 0{,}14\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

Визначимо прискорення коливального руху точки як другу похідну від зміщення за часом або як першу похідну від її швидкості (*г*) за часом:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -0{,}05\pi^2\sin\pi t.$$

Підставивши у цей вираз значення $\pi t = \frac{\pi}{6}$, знайдемо прискорення:

$$a = -\,0{,}05\pi^2\sin\frac{\pi}{6} = -\,0{,}25\ \frac{\text{с}}{\text{м}^2}.$$

Відповідь: $\upsilon = 0{,}14\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $a = -\,0{,}25\ \frac{\text{с}}{\text{м}^2}$.

Задача 7.3. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання. В деякий момент часу t зміщення точки $x = 5$ см, її швидкість $\upsilon = 20\ \frac{\text{см}}{\text{с}}$ і прискорення $a = 80\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. Знайти циклічну частоту ω, період коливання T, фазу φ коливань у цей момент часу та амплітуду A.

Розв'язування

Дано	
$x = 5\ \text{см} = 0{,}05\ \text{м}$ $\upsilon = 20\ \frac{\text{см}}{\text{с}} = 0{,}2\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$ $a = 80\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2} = 0{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	Запишемо рівняння гармонічного коливання (7.2), швидкості (7.7) і прискорення (7.11):
ω — ? T — ? φ — ? A — ?	$x = A\sin(\omega t + \varphi_0);\ (а)$ $\upsilon = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0);\ (б)$ $a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0).\ (в)$

Поділивши рівняння (*в*) на (*а*) і взявши модуль $\left|-\frac{a}{x}\right| = \omega^2$, знайдемо циклічну частоту $\omega = \sqrt{\frac{a}{x}} = \sqrt{\frac{0{,}8}{0{,}05}} = 4$ (с^{-1}).

Визначимо період коливання T за формулою (7.4):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = 1{,}57\ (\text{с}).$$

Щоб визначити фазу коливання, поділимо рівняння (*а*) на (*б*):

$$\frac{x}{\upsilon} = \frac{\operatorname{tg}(\omega t + \varphi_0)}{\omega},$$

звідки

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi_0) = \frac{x\omega}{\upsilon} = \frac{0{,}05\cdot 4}{0{,}2} = 1,$$

або $\omega t + \varphi_0 = \varphi = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.

За рівнянням (*а*) обчислимо амплітуду

$$A = \frac{x}{\sin(\omega t + \varphi_0)} = \frac{0{,}05}{\sin 45^\circ} = 0{,}071\ (\text{м}).$$

Відповідь: $\omega = 4\ \text{с}^{-1}$; $T = 1{,}57$ с; $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $A = 0{,}071$ м.

Задача 7.4. Матеріальна точка масою 100 г здійснює гармонічні коливання згідно з рівнянням $x = 0{,}3\sin 4\pi t$ м. Знайти повертаючу силу F у момент часу $t = 0{,}2$ с, а також повну, потенціальну та кінетичну енергії точки.

Розв'язування

Дано	
$m = 100\ \text{г} = 0{,}1\ \text{кг}$ $x = 0{,}3\sin 4\pi t$ м $t = 0{,}2$ с	Повертаючу силу знайдемо за другим законом Ньютона (7.19): $F = ma = -m\omega^2 x,\ (а)$
F — ? W — ? $W_п$ — ? $W_к$ — ?	де a — прискорення точки за гармонічного коливання, ω — її

циклічна частота, x — зміщення. За умовою задачі маса точки та її зміщення відомі. Визначимо циклічну частоту коливання за рівнянням руху (за зміщенням x):

$$\omega = 4\pi. \qquad (б)$$

Підставимо значення зміщення x й отриманої циклічної частоти ω з рівняння (*б*) у рівняння (*а*). Воно набуде вигляду

$$F = -m(4\pi)^2\cdot 0{,}3\sin 4\pi t = -4{,}8\,\pi^2 m\sin 4\pi t.$$

Обчислимо величину повертаючої сили:

$$F = -4{,}8\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}1\sin 4\pi 0{,}2 = -2{,}78\ (\text{Н}).$$

Повну, потенціальну та кінетичну енергії точки визначимо відповідно за формулами (7.54), (7.50) і (7.51):

$$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{0{,}1 \cdot (4\pi)^2 \cdot 0{,}3^2}{2} = 0{,}710 \text{ (Дж)};$$

$$W_п = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= W\sin^2 4\pi t = 0{,}71\sin^2 4\pi \cdot 0{,}2 = 0{,}245 \text{ (Дж)};$$

$$W_к = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= W\cos^2 4\pi t = 0{,}71\cos^2 4\pi t = 0{,}465 \text{ (Дж)}.$$

Відповідь: $F = -2{,}78$ Н; $W = 0{,}710$ Дж;
$W_п = 0{,}245$ Дж; $W_к = 0{,}465$ Дж.

Задача 7.5. Повна енергія тіла, яке здійснює гармонічний коливальний рух, дорівнює $3 \cdot 10^{-5}$ Дж. Максимальна сила, що діє на тіло, становить $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н. Записати рівняння руху цього тіла, якщо період коливань дорівнює 2 с, а початкова фаза 60°.

Розв'язування

$W = 3 \cdot 10^{-5}$ Дж
$F_{max} = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н
$T = 2$ с
$\varphi_0 = 60° = \frac{\pi}{3}$ рад
x — ?

Запишемо рівняння руху тіла у формі рівняння (7.2):

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (а)$$

в якому нам не відомі амплітуда A і циклічна частота ω. Циклічну частоту знайдемо за формулою (7.4):

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ (с}^{-1}\text{)}. \qquad (б)$$

Щоб визначити амплітуду A, скористаємося виразами для повної енергії гармонічних коливань (7.54) і максимальної сили, що діє на тіло:

$$W = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2; \qquad (в)$$

$$F_{max} = ma_{max}, \qquad (г)$$

де a_{max} — максимальне прискорення за гармонічного руху, яке знаходимо за залежністю (7.12):

$$a_{max} = -\omega^2 x_{max} = -\omega^2 A. \qquad (д)$$

Підставимо отримане значення a_{max} у вираз (г) і дістанемо

$$F_{max} = -m\omega^2 A. \qquad (е)$$

Поділивши рівняння (в) на (е), знайдемо

$$\frac{W}{F_{max}} = -\frac{1}{2}A,$$

звідки

$$A = \left|-2\frac{W}{F_{max}}\right| = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 0{,}04 \text{ (м)}.$$

Підставимо у формулу (а) значення ω з виразу (б) та A, отримаємо шукане рівняння гармонічних коливань:

$$x = 0{,}04\sin(\pi t + \frac{\pi}{6}) \text{ (м)}.$$

Відповідь: $x = 0{,}04\sin(\pi t + \frac{\pi}{6})$ м.

Задача 7.6. До пружини підвішене тіло масою 5 кг. Знаючи, що пружина під впливом сили 10 Н розтягується на 0,02 м, визначити період вертикальних коливань підвішеного тіла.

Розв'язування

$m = 5$ кг
$F = 10$ Н
$\Delta l = 0{,}02$ м
T — ?

Якщо тіло, підвішене на пружині, вивести зі стану рівноваги, воно здійснюватиме гармонічні коливання за законом (7.29).

Період коливання цього тіла визначимо за формулою (7.30):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (а)$$

де k — коефіцієнт пружності пружини, який чисельно дорівнює силі пружності, під дією якої вона розтягується або стискується на одиницю довжини, тобто

$$k = \frac{F}{\Delta l}. \qquad (б)$$

Підставивши це значення k з виразу (б) у вираз (а), знайдемо період коливання тіла, про який ідеться в задачі:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta l}{F}};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5 \cdot 0{,}02}{10}} = 0{,}1 \text{ (с)}.$$

Відповідь: $T = 0{,}1$ с.

Задача 7.7. *Кульку, підвішену до нитки завдовжки 2 м, відхилили на кут $\alpha = 5°$ і відпустили, після чого вона почала коливатися (див. мал. 7.4). Вважаючи ці коливання незатухаючими гармонічними, знайти період коливання кульки (математичного маятника) та її швидкість під час проходження положення рівноваги.*

Розв'язування

$l = 2$ м
$\alpha = 5° =$
$= 8{,}73 \cdot 10^{-2}$ рад
T — ?
v_{max} — ?

Період коливання математичного маятника визначимо за формулою (7.37):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{9{,}8}} = 2{,}84 \text{ (с)}.$$

Під час проходження кулькою положення рівноваги її потенціальна енергія дорівнює нулю, а кінетична — максимальна і дорівнює повній енергії коливального руху маятника, тобто

$$W_к = W \quad \text{або} \quad \frac{mv^2_{max}}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2},$$

звідки

$$v_{max} = \omega A, \qquad (а)$$

де ω — циклічна частота; A — амплітуда коливань.

Знайдемо ω із формули (7.4):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (б)$$

За малих кутів відхилення математичного маятника амплітуда його коливань дорівнює дузі (див. мал. 7.4):

$$A = l\alpha, \qquad (в)$$

де α — кут відхилення, рад.

Підставивши значення ω і A відповідно з виразів (*б*) і (*в*) у формулу (*а*), дістанемо

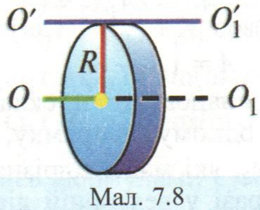
$$v_{max} = \frac{2\pi}{T}\, l\alpha.$$

Обчислимо швидкість, з якою кулька проходить положення рівноваги:

$$v_{max} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{2{,}84} \cdot 2 \cdot 8{,}73 \cdot 10^{-2} = 0{,}39\ \left(\frac{м}{с}\right).$$

Відповідь: $T = 2{,}84$ с; $v_{max} = 0{,}39\ \frac{м}{с}$.

Задача 7.8. Однорідний диск радіусом $R = 0{,}4$ м коливається навколо горизонтальної осі, що проходить через твірну циліндричної поверхні диска (мал. 7.8). Визначити зведену довжину $l_{зв}$ і період коливання такого маятника.



Мал. 7.8

Розв'язування

$R = 0{,}4$ м	Диск є нічим іншим, як фізичним маятником. Його зведену довжину і період коливання визначимо відповідно за формулами (7.45) і (7.44):
$l_{зв}$ — ?	
T — ?	

$$l_{зв} = \frac{J}{ml_C};$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{зв}}{g}},$$

де J — момент інерції фізичного маятника відносно осі $O'O'_1$, що проходить через твірну циліндричної поверхні диска; m — маса диска; l_C — відстань від осі коливання до центра мас (інерції) тіла.

Момент інерції диска знайдемо за формулою Штейнера

$$J_{O'O'_1} = J_{OO_1} + mR^2,$$

де $J_{OO_1} = \frac{mR^2}{2}$ — момент інерції диска відносно осі OO_1, яка проходить через його центр мас; m — маса диска; R — відстань між паралельними осями OO_1 і $O'O'_1$.

Підставивши значення J_{OO_1} у формулу Штейнера, отримаємо

$$J_{O'O'_1} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Взявши до уваги, що $l_C = R$, дістанемо

$$l_{зв} = \frac{3}{2}mR^2 \frac{1}{mR} = \frac{3}{2}R;$$

$$l_{зв} = \frac{3}{2} \cdot 0{,}4 = 0{,}6\ (м).$$

Визначимо період коливання цього фізичного маятника, скориставшись формулою (7.44) і знайденим значенням $l_{зв}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{3 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 9{,}8}} = 1{,}55\ (с).$$

Відповідь: $l_{зв} = 0{,}6$ м; $T = 1{,}55$ с.

7.5. ДОДАВАННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ОДНАКОВОГО НАПРЯМКУ. БИТТЯ

Часто тіло одночасно бере участь у декількох коливаннях однакового напрямку. Розглянемо випадок, коли воно одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях однакових напрямків і частоти за рівняннями

$$x_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_{01});$$
$$x_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_{02}). \qquad (7.57)$$

Зміщення x з положення рівноваги за участі тіла одночасно у двох коливаннях дорівнюватиме алгебричній сумі зміщень x_1 і x_2:

$$x = x_1 + x_2 = A_1\sin(\omega t + \varphi_{01}) + A_2\sin(\omega t + \varphi_{02}). \quad (7.58)$$