Антенна техніка телекомунікаційних мереж

Метод моментів у задачі визначення розподілу струму симетричного вібратора

Метод моментів

Шукану функцію розподілу струму $I(z')$ записують як суму лінійно-незалежних функцій:

$$I(z') = \sum_{p=1}^{N} I_p f_p(z'), \tag{1}$$

де $f_p(z')$ - базисні функції,

I_p - коефіцієнти,які є невідомими ваговими коефіцієнтами, з якими базисні функції апроксимують істинний розподіл.

Інтегральне рівняння (ІР) Галлена для розподілу струму симетричного вібратора:

$$\int_{-l}^{l} I(z')K(z,z')dz' = -i\frac{U_0}{60}\sin k|z|, \tag{2}$$

де $K(z,z') = \dfrac{e^{-ikr}}{r} - \dfrac{e^{-ikr_0}}{r_0}\cos kz$ - ядро цього ІР.

Метод моментів

Підстановка (1) в ІР Галлена (2) перетворює його на функціональне рівняння:

$$\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l} f_p(z') K(z, z') dz' = -i \frac{U_0}{60} \sin k|z| \tag{3}$$

Прирівнювання правої та лівої частин (3) роблять так: обидві частини (3) множать на деяку функцію $\varphi(z)$, яку називають ваговою функцією, після чого цей добуток інтегрують по z. Результат інтегрування називають моментом початкового виразу щодо функції $\varphi(z)$.

Розраховуючи моменти функціонального рівняння (3) щодо системи лінійно-незалежних функцій $\varphi(z)$, отримують СЛАР щодо шуканих коефіцієнтів I_p :

Метод моментів та метод Гальоркіна

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} f_p(z')\varphi_1(z)K(z,z')dz'dz = -i\frac{U_0}{60}\int_{-l}^{l}\varphi_1(z)\sin k|z|dz \\
&\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} f_p(z')\varphi_2(z)K(z,z')dz'dz = -i\frac{U_0}{60}\int_{-l}^{l}\varphi_2(z)\sin k|z|dz \\
&\dots \\
&\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} f_p(z')\varphi_N(z)K(z,z')dz'dz = -i\frac{U_0}{60}\int_{-l}^{l}\varphi_N(z)\sin k|z|dz
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Якщо $\varphi_p = f_p$, то такий різновид методу моментів називають метод Гальоркіна.

Його переваги: ряд інтегральних характеристик розв'язку (наприклад, потужність випромінювання) має стаціонарні властивості, тобто слабко залежить від точності представлення шуканого струму.

Вибір базисних функцій методу моментів

Вибір базисних функцій f_p - важливий момент, оскільки від цього вибору залежить мінімальна кількість членів ряду N, за якої шуканий розподіл струму апроксимується із заданою точністю. У свою чергу, від N залежить трудомісткість, а для складних – і принципова можливість розв'язання задачі.

Вимоги до цих функцій:

1) мають бути лінійно незалежні;

2) розв'язок, знайдений за їх допомогою, має бути досить точним.

Зазвичай базисні функції вибирають відповідно до фізичних особливостей розв'язуваної задачі. У даному випадку вони мають дорівнювати нулю на кінцях вібратора (тобто при $|z| = l$).

Приклад: степеневі базисні функції:

$$f_p = \left(1 - \frac{|z'|}{l}\right)^p,$$

звідки
$$I(z') = \sum_{p=1}^{N} I_p \left(1 - \frac{|z'|}{l}\right)^p.$$

Якщо $l \le 0{,}625\lambda$, то ці функції забезпечують прийнятну точність вже при N=2-3.

Метод "зшивання" по точках як різновид методу моментів

Розв'язок (4) вимагає серйозних витрат машинного часу на подвійне інтегрування виразів типу:

$$\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} f_p(z')\varphi_n(z)K(z,z')dz'dz$$

З метою зменшення обсягу розрахунків можна використати в якості вагових функцій дельта-функцію:

$$\varphi_n = \delta(z-z_n) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l} f_p(z')K(z_1,z')dz' = -i\frac{U_0}{60}\sin k|z_1| \\
\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l} f_p(z')K(z_2,z')dz' = -i\frac{U_0}{60}\sin k|z_2| \\
\ldots \\
\sum_{p=1}^{N} I_p \int_{-l}^{l} f_p(z')K(z_N,z')dz' = -i\frac{U_0}{60}\sin k|z_N|
\end{array}\right\}$$