

Антенна техніка телекомунікаційних мереж

**Теорема перемноження
діаграм напрямленостей**

Теорема перемноження діаграм напрямленостей

Отримання спрямованого випромінювання АР пояснюється інтерференцією полів, створюваних окремими випромінювачами. Внаслідок цього ДН АР залежить як від типу випромінювачів, так і від їхнього розташування, від відстані між ними, від довжини хвилі та співвідношення між амплітудами та фазами струмів у випромінювачах. Відповідним розташуванням випромінювачів та збудженням у них струмів можна отримати самі різноманітні ДН.

Вектор напруженості поля, створюваного всіма випромінювачами, буде дорівнювати сумі всіх N векторів напруженостей полів, тобто при підсумовуванні полів у розглядуваній точці потрібно враховувати орієнтацію кожного вектора у просторі (поляризацію), в також його амплітуду та фазу.

Якщо розглядувана система складається з випромінювачів різного типу, довільно розташованих у просторі, задачу підсумовування полів не можна спростити і у загальному випадку розв'язок виходить доволі громіздким.

Теорема перемноження діаграм напрямленостей

Проте для системи ідентичних випромінювачів за їхньої однакової орієнтації у просторі загальний вираз для результуючої напруженості поля дещо спрощується. У цьому випадку напруженість поля, створюваного кожним окремим випромінювачем системи у віддаленій точці простору, буде, зокрема, характеризуватись однаковою поляризацією. Тому амплітуду загальної напруженості поля системи можна визначити як суму комплексних амплітуд складових:

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n. \quad (1)$$

Для розглядуваної системи:

$$h_{d1} = h_{d2} = \dots = h_{dn} = h_d,$$
$$F_1(\theta, \varphi) = F_2(\theta, \varphi) = \dots = F_n(\theta, \varphi).$$

Крім цього, враховуючи те, що лінійні розміри системи джерел обмежені та малі порівняно з відстанню до точки спостереження, для амплітудного множника можна прийняти:

$$r_1 \cong r_2 \cong \dots \cong r_n \cong r.$$

Теорема перемноження діаграм напрямленостей

Тому вираз (1) можна спростити, винісши спільні множники за знак суми:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= i \frac{30kh_{\text{д}} F_1(\theta, \varphi)}{r} \sum_{n=1}^N \dot{I}_n e^{-ikr_n} = \left[B = i30kh_{\text{д}} \frac{\dot{I}_1}{r} \right] = \\ &= BF_1(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_1} e^{-ikr_n},\end{aligned}\quad (2)$$

Тут \dot{I}_1 – струм першого випромінювача.

Якщо припустити, що всі випромінювачі розглядуваної системи є абсолютно неспрямованими, тобто множник $F_1(\theta, \varphi)$ не залежить від кутів, і тому його прийняти рівним одиниці. Тоді

$$\vec{E} = B \sum_{n=1}^N \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_1} e^{-ikr_n}.$$
 (3)

Теорема перемноження діаграм напрямленостей

Даний вираз визначає напруженість поля у довільному напрямі (відстань r_n залежить від кутів θ, φ).

Абсолютне значення цього виразу визначає діаграму напрямленості системи з N неспрямованих випромінювачів, збуджуваних струмами I_n .

Якщо ввести позначення (**множник решітки**)

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{I_n}{I_1} e^{-ikr_n} \right| = f_N(\theta, \varphi), \quad (4)$$

тоді (2) можна переписати так:

$$E = BF_1(\theta, \varphi) f_N(\theta, \varphi)$$

Множник B не впливає на форму ДН, яку можна записати так:

Теорема перемноження діаграм напрямленостей

$$f(\theta, \varphi) = F_1(\theta, \varphi) f_N(\theta, \varphi). \quad (5)$$

Це і є теорема перемноження діаграм напрямленостей:

діаграма напрямленості системи з N ідентичних та однаково орієнтованих спрямованих випромінювачів визначається добутком діаграми напрямленості одиничного випромінювача на діаграму напрямленості тієї ж системи з N уявних неспрямованих випромінювачів.

Вираз (5) має дуже велике значення у теорії антен, оскільки він у багатьох випадках спрощує дослідження питання про ДН складних антенних систем. Множник (4) ще називають **множник решітки** (множник системи).

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

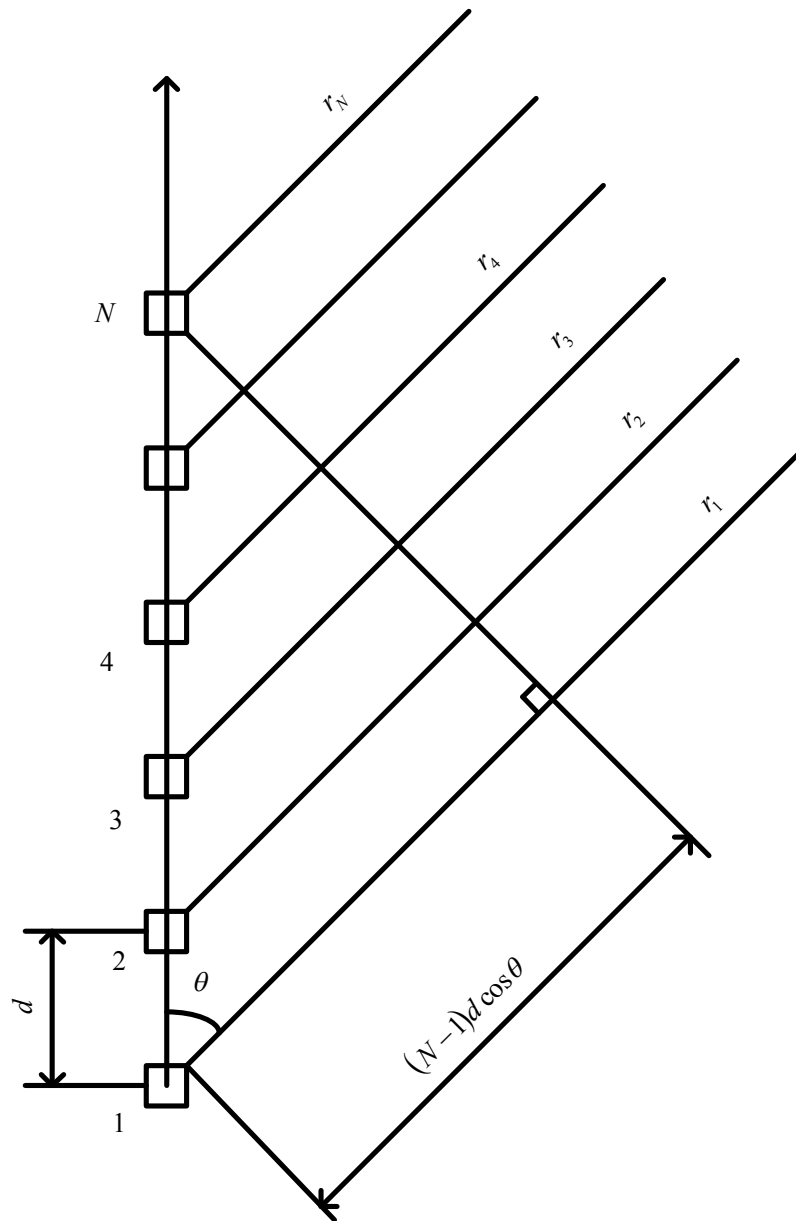
Вираз (4) можна спростити при розташуванні випромінювачів уздовж прямої лінії на однакових відстанях один від одного (лінійна еквідистантна решітка) – рисунок на наступному слайді.

Нехай лінія розташування випромінювачів співпадає з полярною віссю z сферичної системи координат, початок якої перебуває у центрі випромінювача 1. Тоді напрям на точку спостереження, розташовану на досить великій відстані, буде визначатись меридіональним кутом сферичної системи координат.

З рисунка випливає:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - d \cos \theta, \\ r_3 &= r_1 - 2d \cos \theta, \\ &\dots \\ r_n &= r_1 - (n-1)d \cos \theta, \\ &\dots \\ r_N &= r_1 - (N-1)d \cos \theta. \end{aligned} \tag{6}$$

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів



Лінійна система ідентичних випромінювачів

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Підставляючи (6) у (2), отримаємо:

$$\begin{aligned} E &= BF_1(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_1} e^{-ik[r_1 - (n-1)d \cos \theta]} = \\ &= Be^{-ikr_1} F_1(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_1} e^{i[k(n-1)d \cos \theta]}. \end{aligned} \quad (7)$$

Модуль виразу (7) визначає собою ДН лінійної системи ідентичних випромінювачів. Множник

$$f_N(\theta) = \left| \sum_{n=1}^N \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_1} e^{i[k(n-1)d \cos \theta]} \right| \quad (8)$$

є множитком решітки, який визначає ДН лінійної системи неспрямованих випромінювачів. Цей вираз показує, що ця ДН не залежить від азимутального кута φ сферичної системи координат.

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Ця обставина дозволяє використовувати теорему перемноження діаграм напрямленостей для будь-якої площини $\varphi = const$ у просторі, використовуючи один і той самий множник системи (8).

Вираз (8) можна суттєво спростити для лінійної системи з випромінювачами, у яких амплітуди струмів однакові, а фази змінюються за лінійним законом (еквідистантна рівноамплітудна АР). Такі АР часто використовують, тому вони становлять практичний інтерес.

Оскільки у даному випадку цікавить лише відносна зміна напруженості поля у різних напрямках, амплітуди струмів I_n всіх випромінювачів можна прирівняти до одиниці.

Лінійний закон зміни фази струмів можна записати так:

$$\psi_n = (N - 1)\psi, \quad (9)$$

де ψ — кут зсуву фаз між струмами сусідніх випромінювачів, тобто

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1 e^{-i\psi}, I_3 = I_2 e^{-i\psi} = I_1 e^{-i2\psi}, \\ I_n &= I_{n-1} e^{-i\psi} = I_1 e^{-i(n-1)\psi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Підставивши (10) у (7) та враховуючи те, що амплітуди струмів прирівняно до одиниці, отримаємо:

$$\vec{E} = B e^{-ikr_1} F_1(\theta, \varphi) \sum_{n=1}^N e^{i[(n-1)(kd \cos \theta - \psi)]}. \quad (11)$$

У цей вираз входить сума з N членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює одиниці, а знаменник

$$q = e^{i(kd \cos \theta - \psi)} = [b = kd \cos \theta - \psi] = e^{ib}.$$

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Сума N членів геометричної прогресії:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N q^{N-1} &= \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{e^{ibN} - 1}{e^{ib} - 1} = \frac{e^{i\frac{b}{2}(N-1)} \sin \frac{Nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}} = \\ &= e^{i\frac{N-1}{2}(kd \cos \theta - \psi)} \frac{\sin \left[\frac{N}{2} (kd \cos \theta - \psi) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \psi) \right]}. \end{aligned} \quad (12)$$

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Підставляючи (12) у (2), отримаємо:

$$\vec{E} = B \exp \left\{ -i \left[k \left(r_1 - \frac{n-1}{2} d \cos \theta \right) + \frac{(n-1)\psi}{2} \right] \right\} \times \\ \times F_1(\theta, \psi) \frac{\sin \left[\frac{N}{2} (kd \cos \theta - \psi) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \psi) \right]}. \quad (13)$$

Множник $r_1 - \frac{n-1}{2} d \cos \theta = r_0$ у показнику є відстань від середини антенної системи до точки спостереження, а $\frac{(n-1)\psi}{2} = \psi_0$ визначає фазовий кут струму, який відповідає цій же середній точці антени.

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

З урахуванням цих позначень (13) можна переписати так:

$$\vec{E} = BF_1(\theta, \psi) \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(kd \cos \theta - \psi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(kd \cos \theta - \psi)\right]} \exp[-i(kr_0 + \psi_0)]. \quad (14)$$

Фазовий множник виразу (14)

$$\exp[-i(kr_0 + \psi_0)] \quad (15)$$

визначає фазову характеристику системи, і, відповідно, форму її хвильової поверхні (поверхні рівних фаз). **За сферичної форми хвильової поверхні її центр називають фазовим центром антенної системи.**

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Амплітуда поля системи випромінювачів відрізняється від амплітуди поля одинарного випромінювача множителем:

$$f_N(\theta) = \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(kd \cos \theta - \psi)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}(kd \cos \theta - \psi)\right]}. \quad (15)$$

Цей вираз визначає ДН лінійної системи з N неспрямованих випромінювачів і є множителем решітки.

З (14) також випливає, що загальний вираз для ДН лінійної системи з N спрямованих випромінювачів визначається виразом:

$$f(\theta, \varphi) = F_1(\theta, \varphi) f_N(\theta). \quad (16)$$

Поле лінійної системи ідентичних випромінювачів

Вираз (15) визначає ненормовану ДН системи з N неспрямованих випромінювачів, оскільки його максимальне значення відрізняється від одиниці і дорівнює N при

$$kd \cos \theta - \psi = 0. \quad (17)$$

Також можна показати, що N визначає максимально можливе значення виразу (15). Тому нормоване значення цього виразу дорівнює:

$$F_N(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\sin \left[\frac{N}{2} (kd \cos \theta - \psi) \right]}{\sin \left[\frac{1}{2} (kd \cos \theta - \psi) \right]}. \quad (18)$$

**Аналіз множника решітки
(випадок двох ізотропних випромінювачів
при різних фазових співвідношеннях та
відстанях між ними)**

Два ізотропних випромінювача

При $N=2$ вираз (15) набуває вигляду:

$$f_N(\theta) = \frac{\sin(kd \cos \theta - \psi)}{\sin\left[\frac{1}{2}(kd \cos \theta - \psi)\right]} = 2 \cos\left(\frac{kd \cos \theta - \psi}{2}\right). \quad (19)$$

Цей вираз визначає ДН двох ізотропних (непрямованих) випромінювачів, рознесених на відстань d , зі струмами, зсунутими по фазі на кут ψ .

Наприклад, це може бути ДН двох вертикальних вібраторів у горизонтальній площині.

Розглянемо низку частинних випадків.

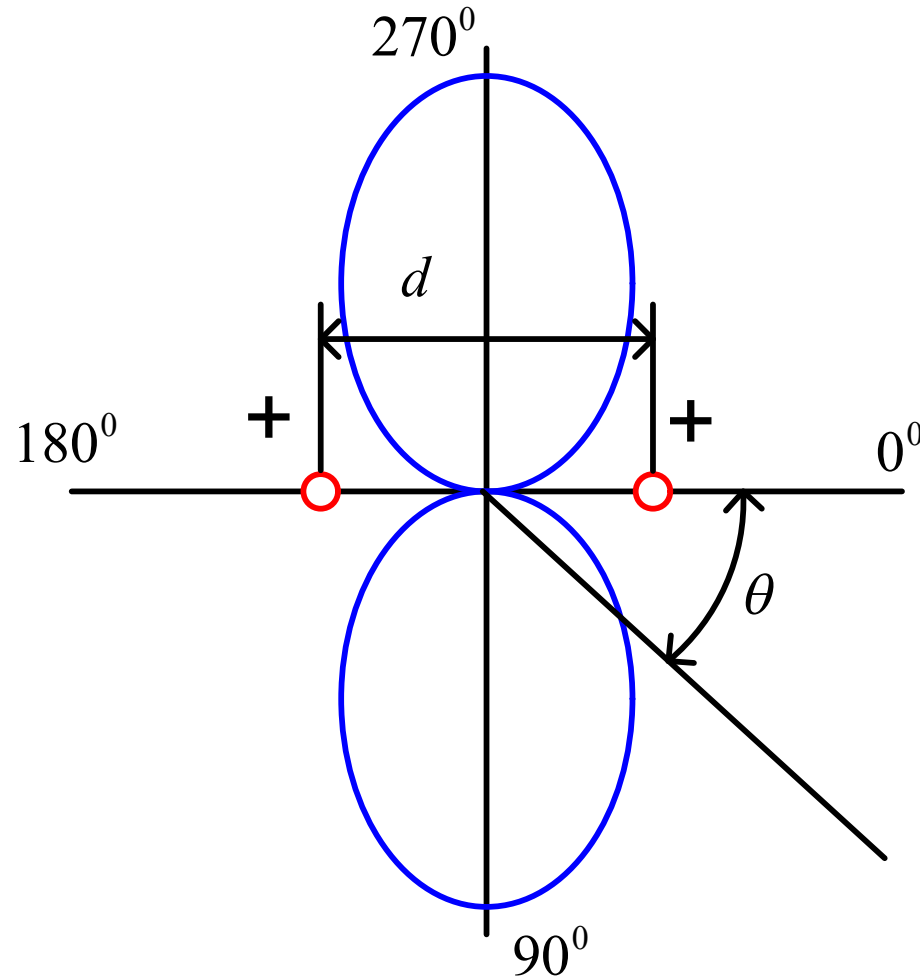
Нехай $d = \lambda/2$, $\psi = 0$. Тоді

$$f_N(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right). \quad (20)$$

Два ізотропних випромінювача

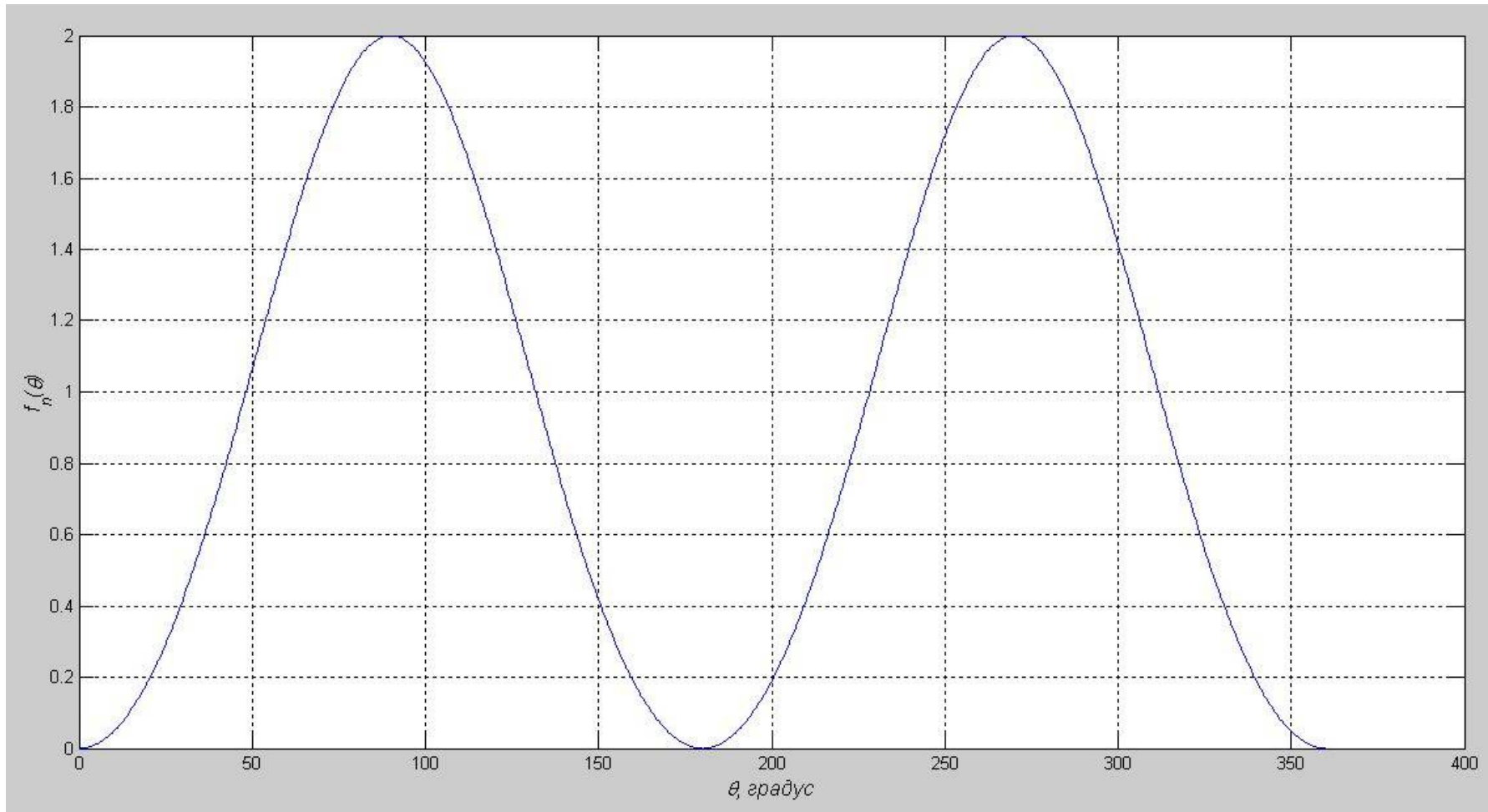
Вираз (20) дорівнюватиме нулю при $\theta = 0, \theta = 180^\circ$ та має максимум при $\theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ$.

Просторова конфігурація двох синфазних вертикальних вібраторів.



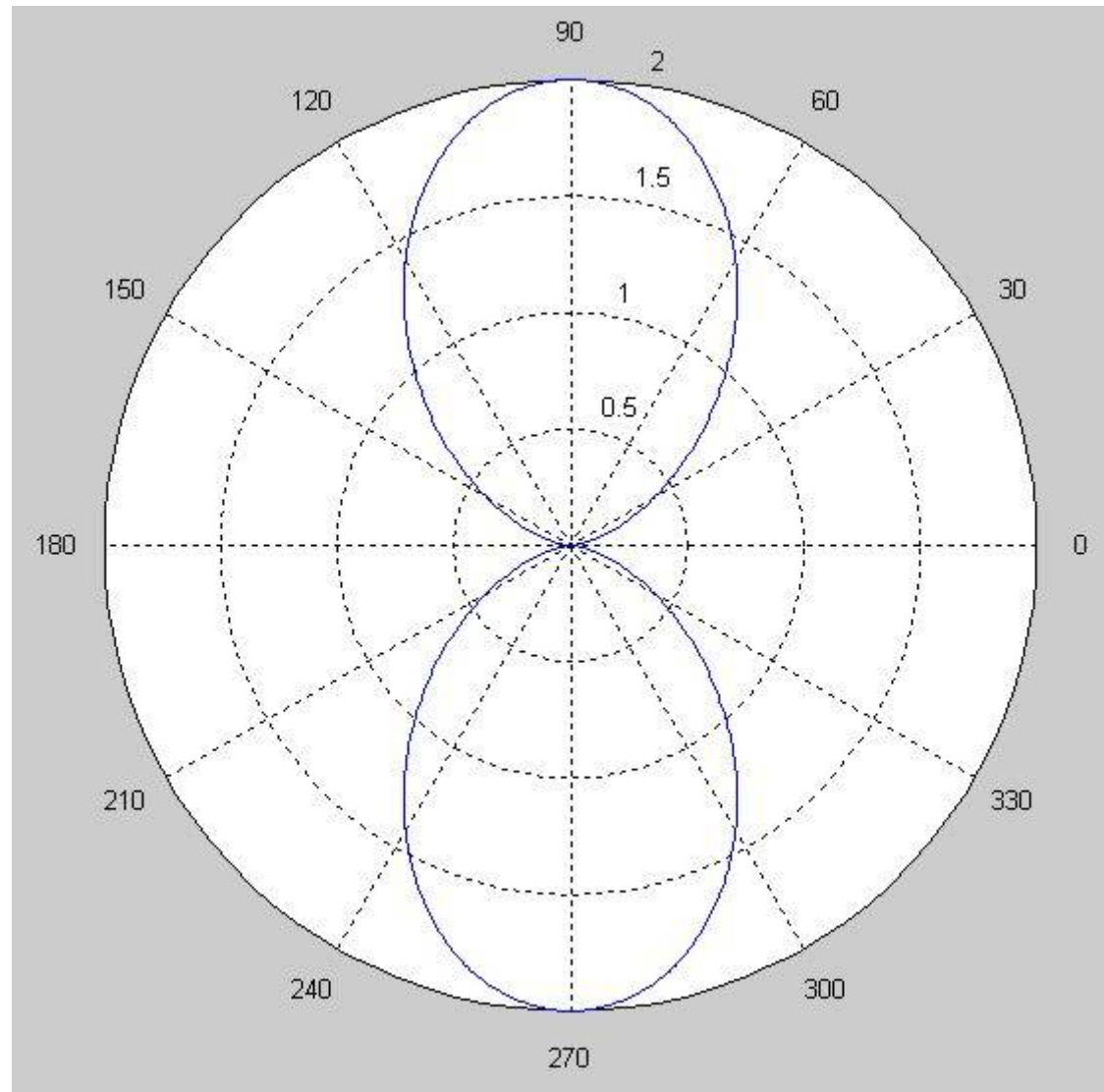
Два ізотропних випромінювача

Результуюча ДН



$$d = \lambda/2, \psi = 0.$$

Два ізотропних випромінювача



$$d = \lambda/2, \psi = 0.$$

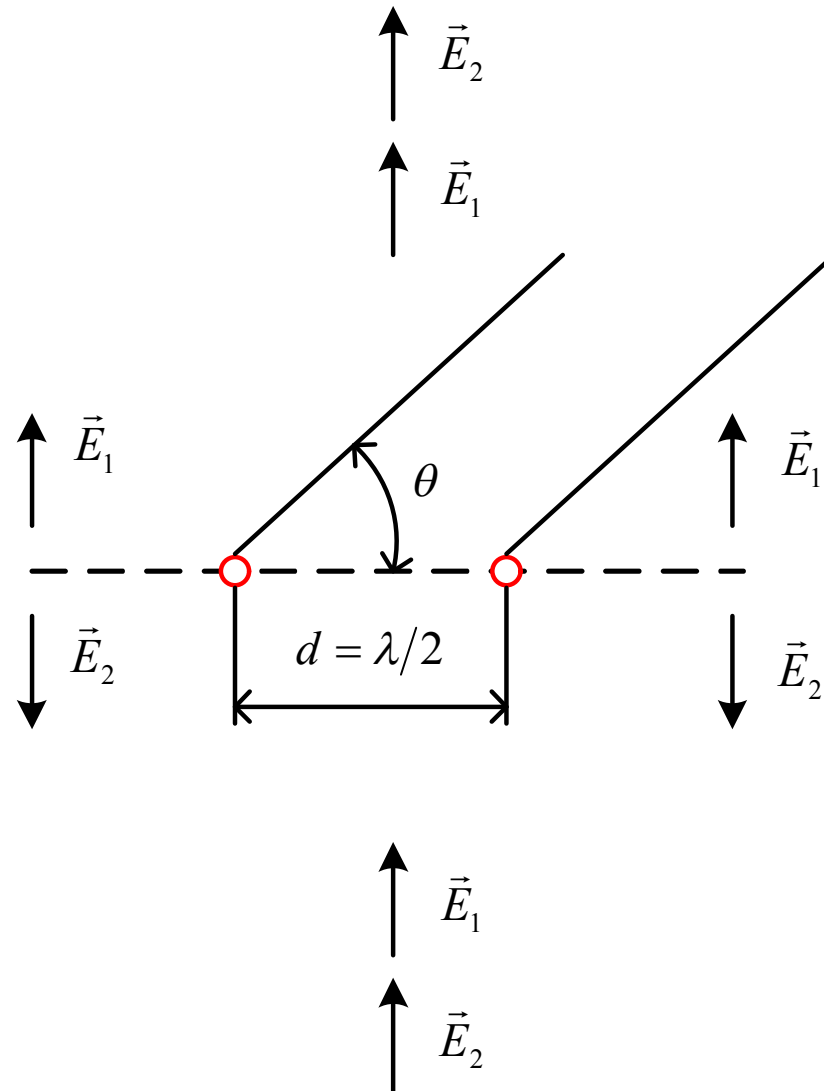
Два ізотропних випромінювача

Таку антенну систему називають синфазною ($\psi = 0$). Характерною її рисою є те, що максимуми випромінювання будуть у напрямку, перпендикулярному до лінії розташування випромінювачів.

У цьому напрямку довжина шляху від кожного випромінювача до точки спостереження буде однаковою. Тому вектори напруженостей полів, створюваних кожним вібратором, будуть у фазі, *оскільки поля в указаному напрямі будуть запізнюватись на один і той самий час відносно струмів у вібраторах.*

Мінімуми випромінювання (нулі) будуть уздовж лінії розташування випромінювачів. Пояснюється це тим, що *хвилі, випромінювані двома синфазними джерелами, у цьому напрямі проходять шляхи, які відрізняються на половину довжини хвилі. В результаті хвилі, які потрапляють з джерел у точку спостереження, будуть у протифазі.* Відповідні векторні діаграми складання полів показано на наступному слайді.

Два ізотропних випромінювача



Векторна діаграма складання полів

Два ізотропних випромінювача

Тепер $d = \lambda/2$, $\psi = \pi$. З (15) маємо:

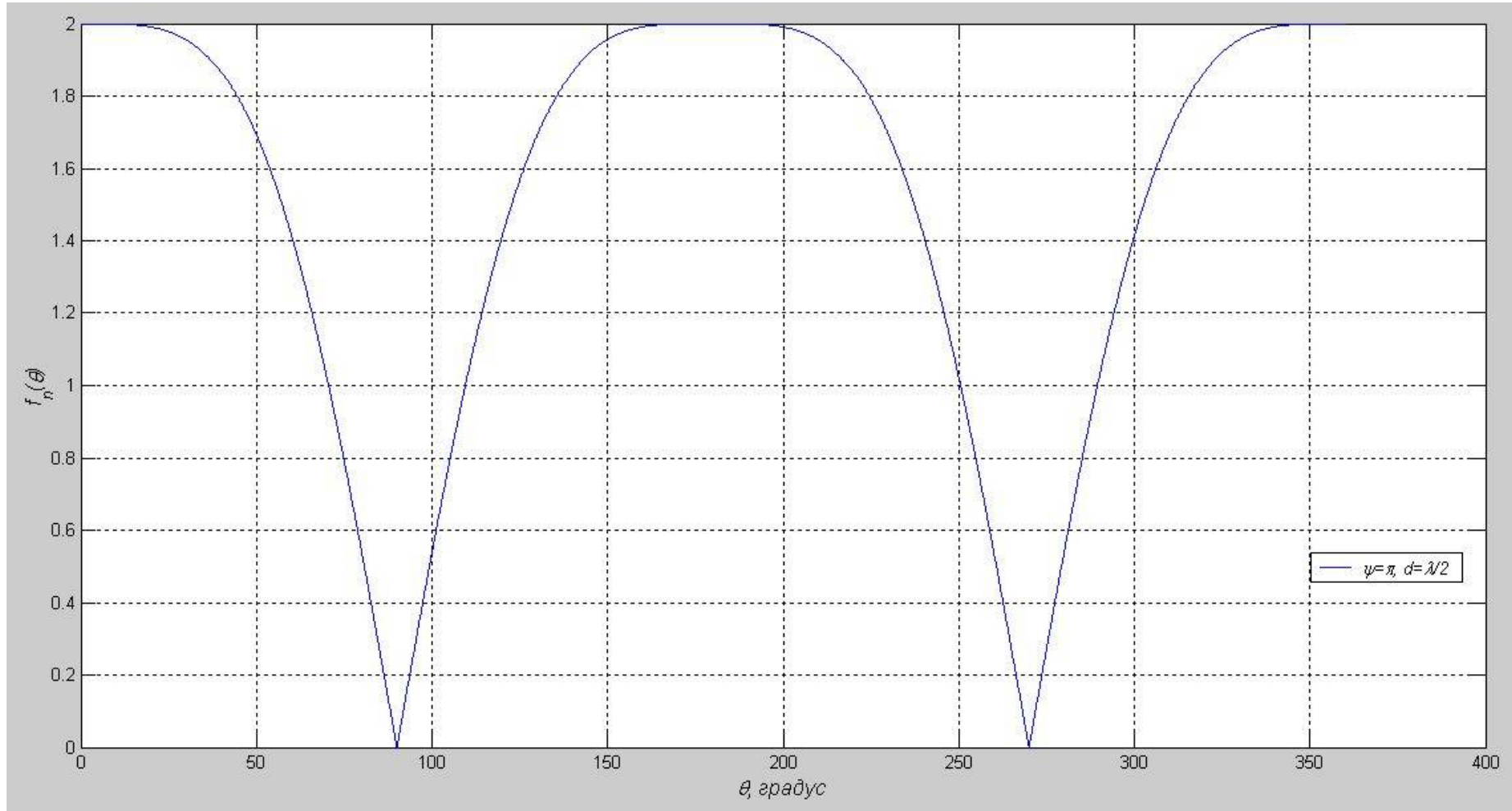
$$f_N(\theta) = 2 \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \cos \theta - \pi \right) \right] = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right). \quad (21)$$

Цей вираз дорівнюватиме нулю при $\theta = \pm 90^\circ$ та має максимум при $\theta = 0^\circ$, $\theta = 180^\circ$.

Таку антенну систему (зміннофазну, $\psi = \pi$). Характерною її рисою є те, що максимуми випромінювання будуть уздовж лінії розташування випромінювачів, а мінімуми (нулі) – у напрямку, перпендикулярному до цієї лінії. Така форма ДН обумовлена інтерференцією полів двох джерел, подібно до розглянутої раніше системи двох синфазних випромінювачів.

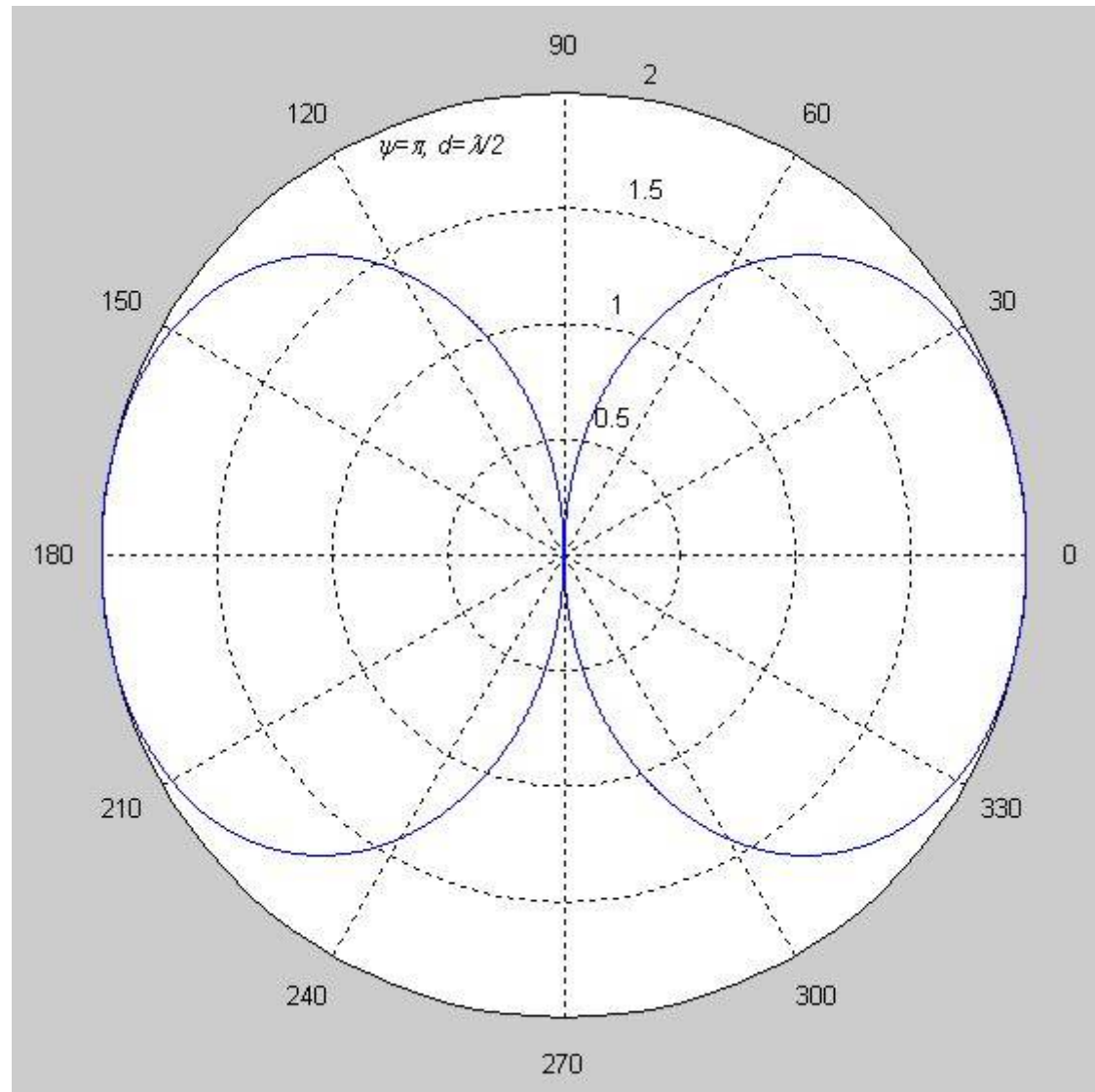
Два ізотропних випромінювача

Результуюча ДН



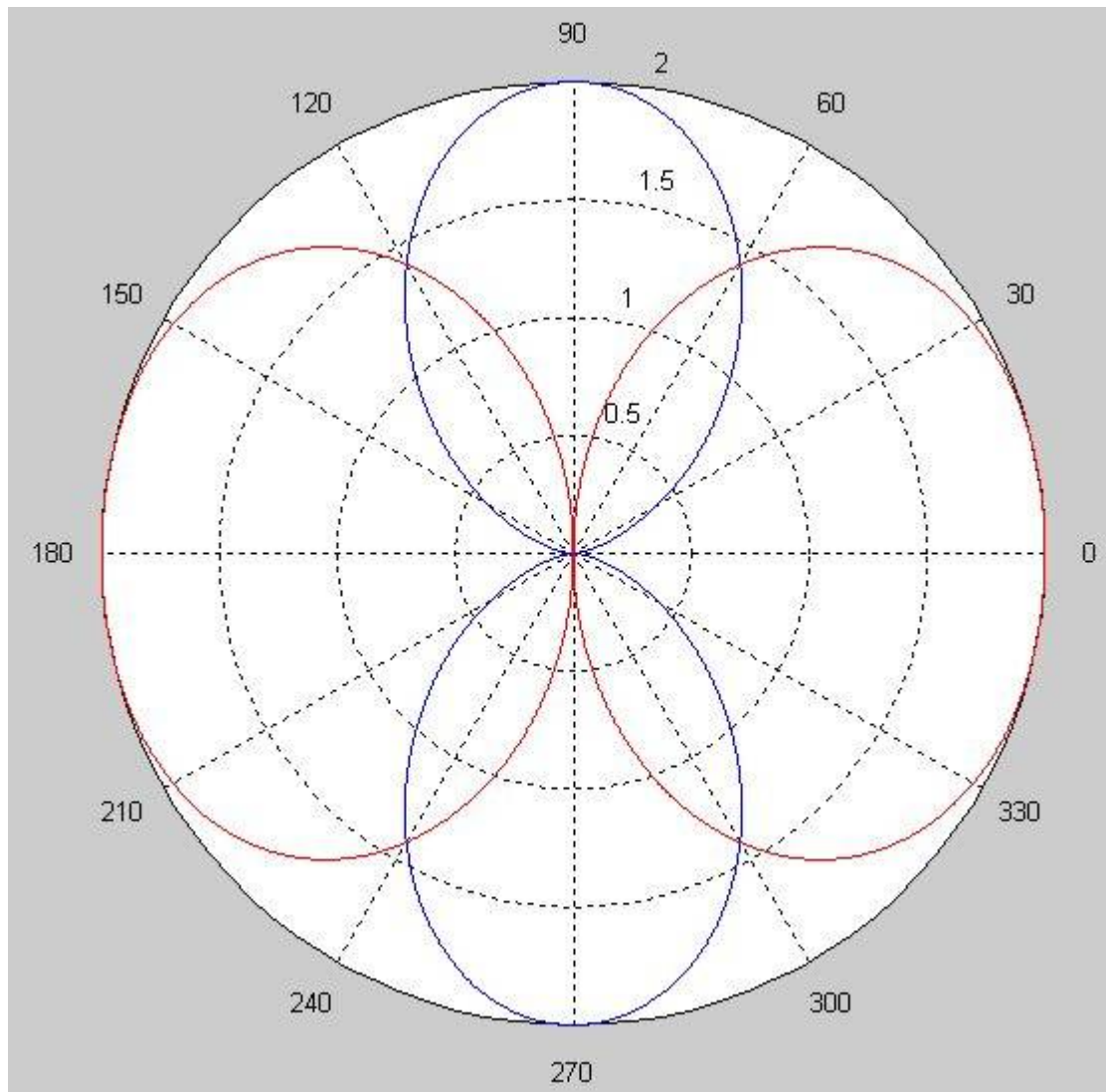
$$d = \lambda/2, \psi = \pi.$$

Два ізотропних випромінювача



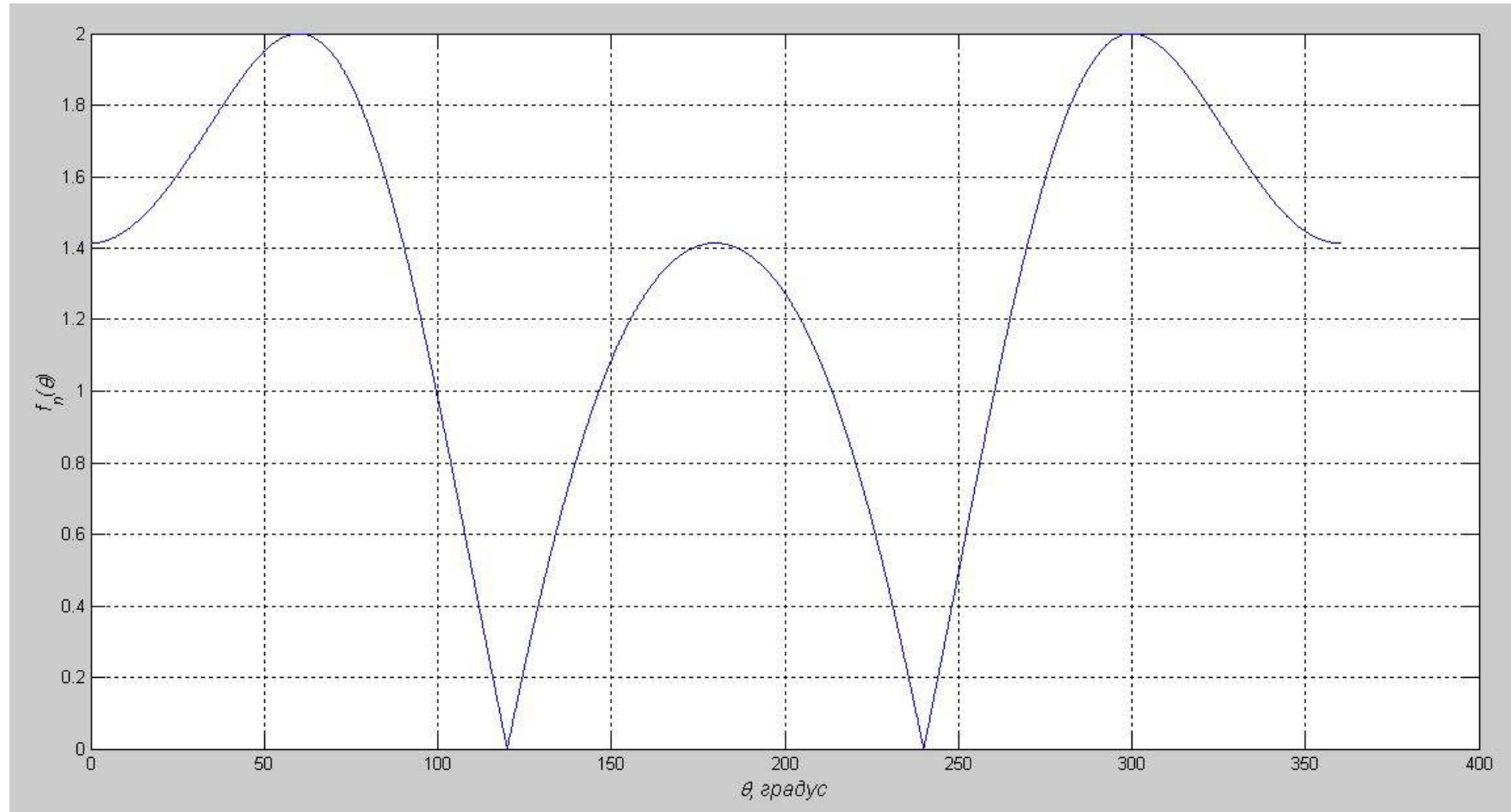
$$d = \lambda/2, \psi = \pi.$$

Два ізотропних випромінювача



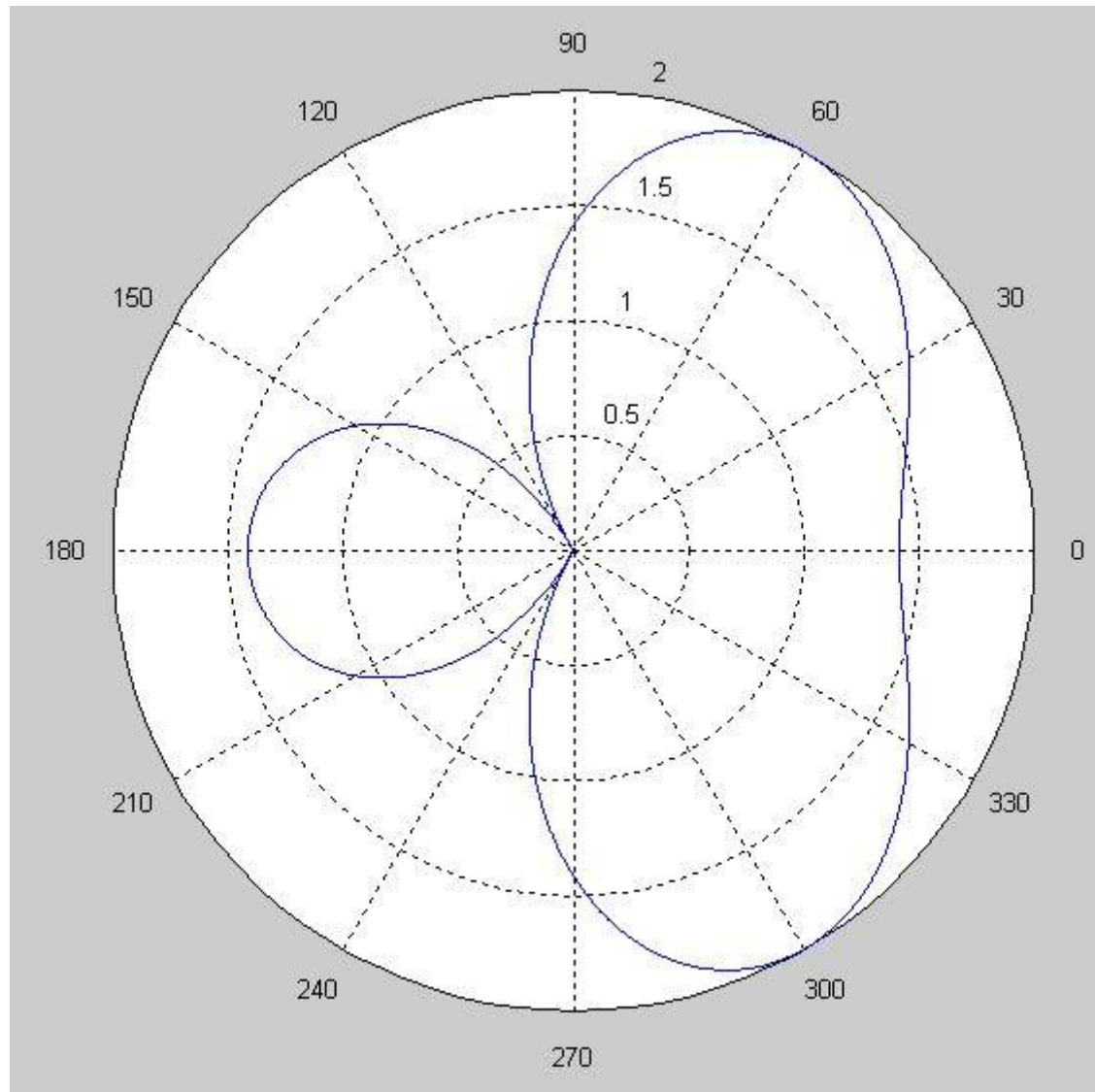
$d = \lambda/2, \psi = \pi$ - червоний $d = \lambda/2, \psi = 0$ - синій 27

Два ізотропних випромінювача



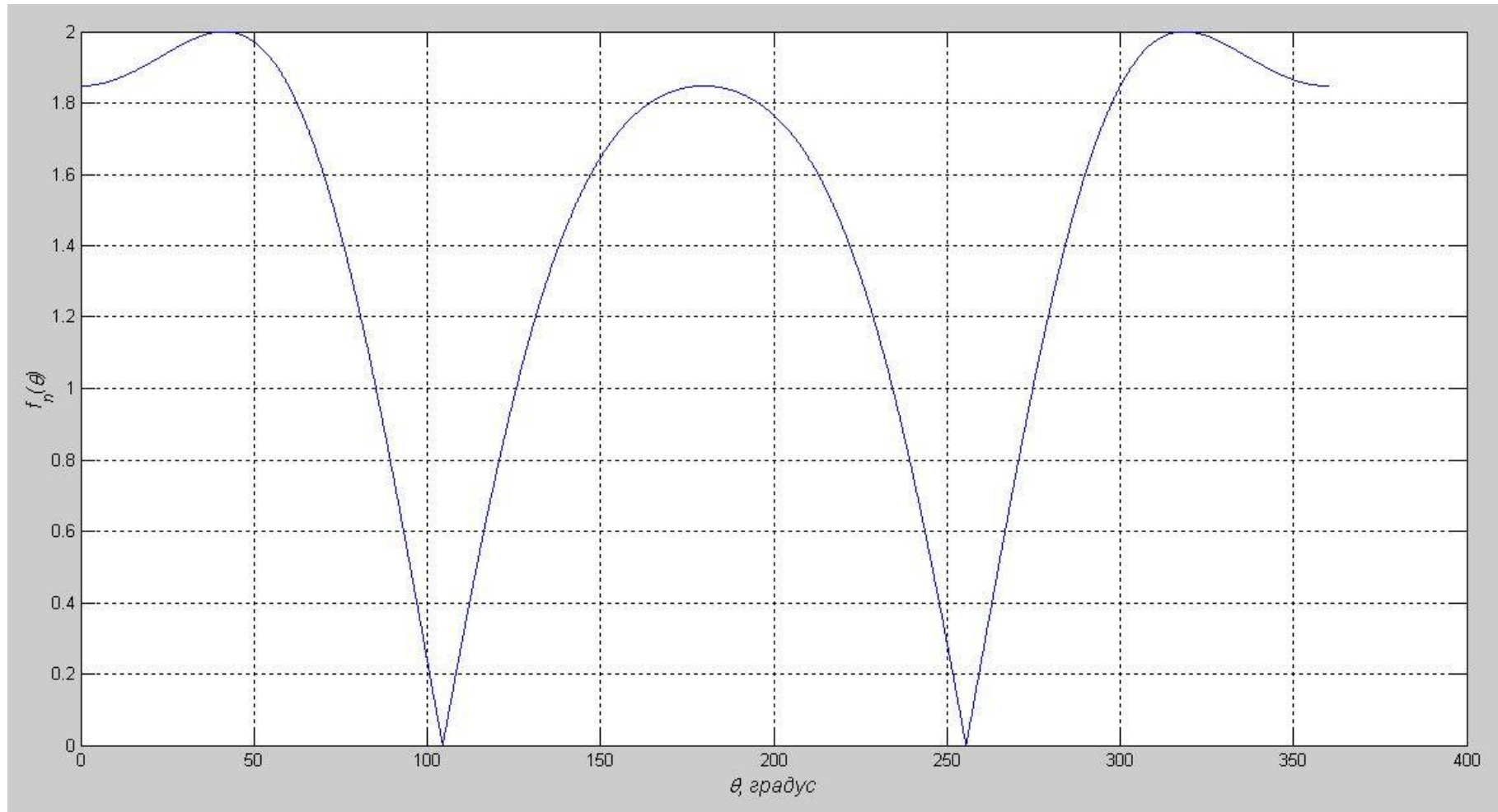
$$d = \lambda/2, \quad \psi = \pi/2.$$

Два ізотропних випромінювача



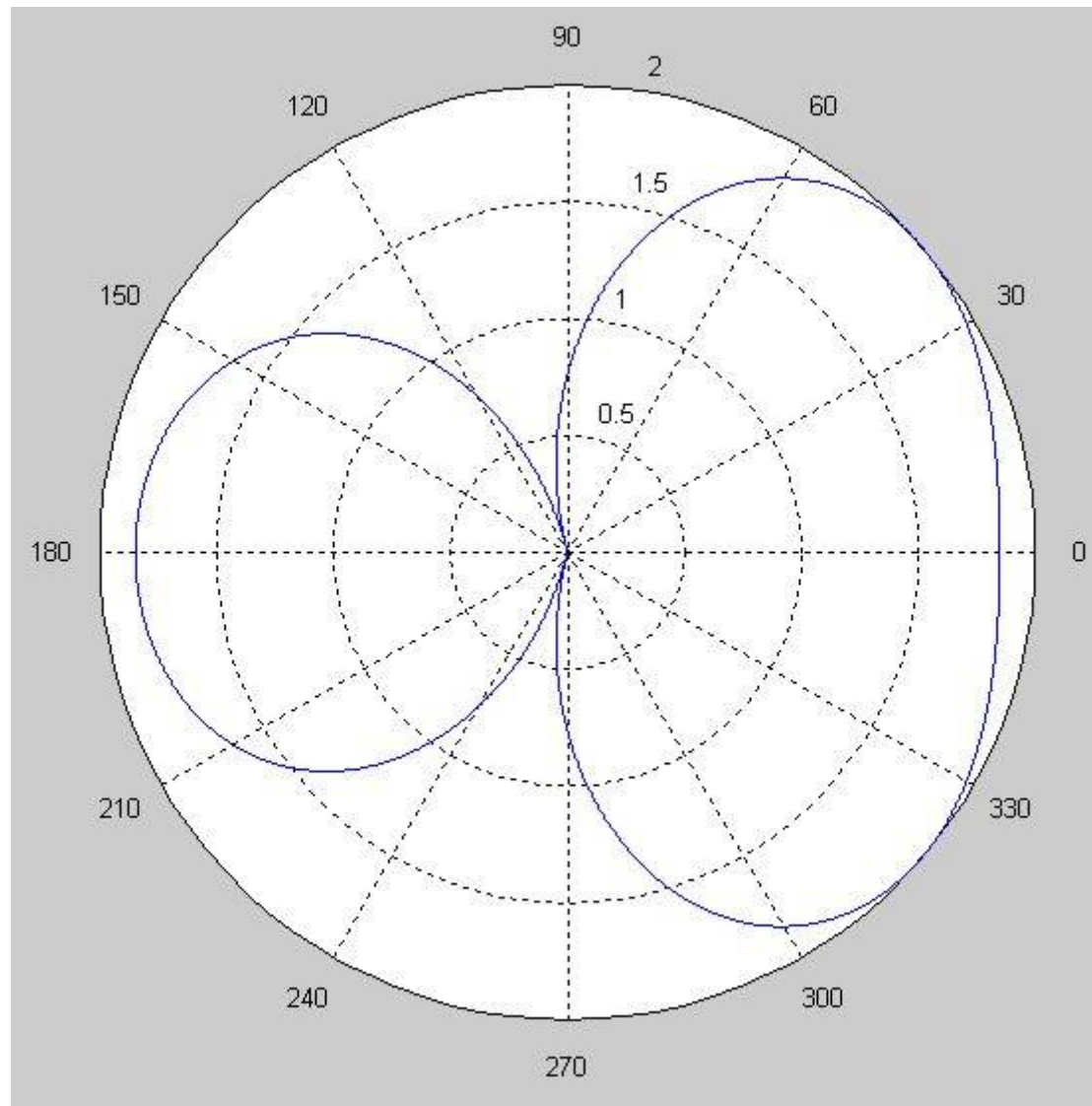
$$d = \lambda/2, \psi = \pi/2.$$

Два ізотропних випромінювача



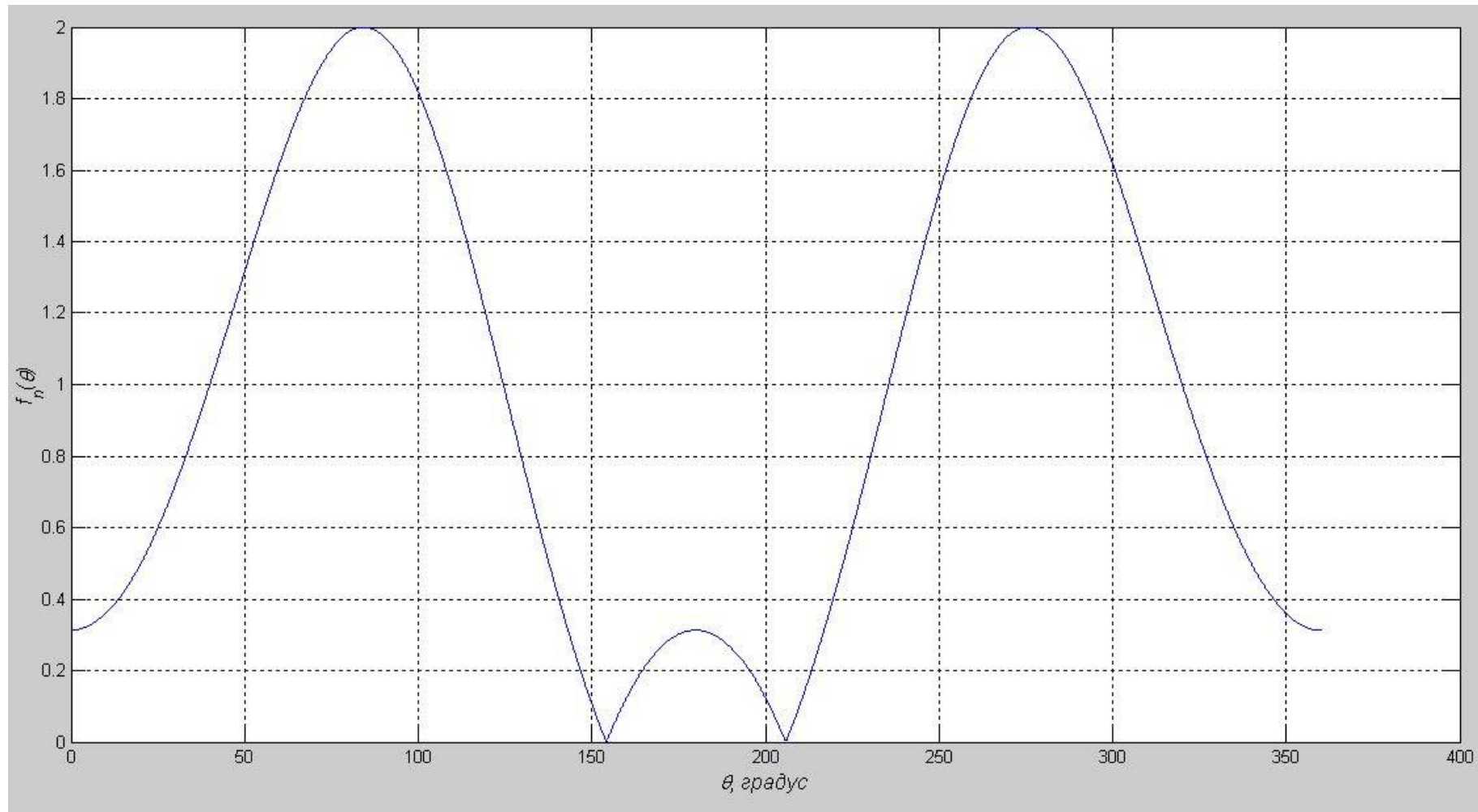
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 3\pi/4.$$

Два ізотропних випромінювача



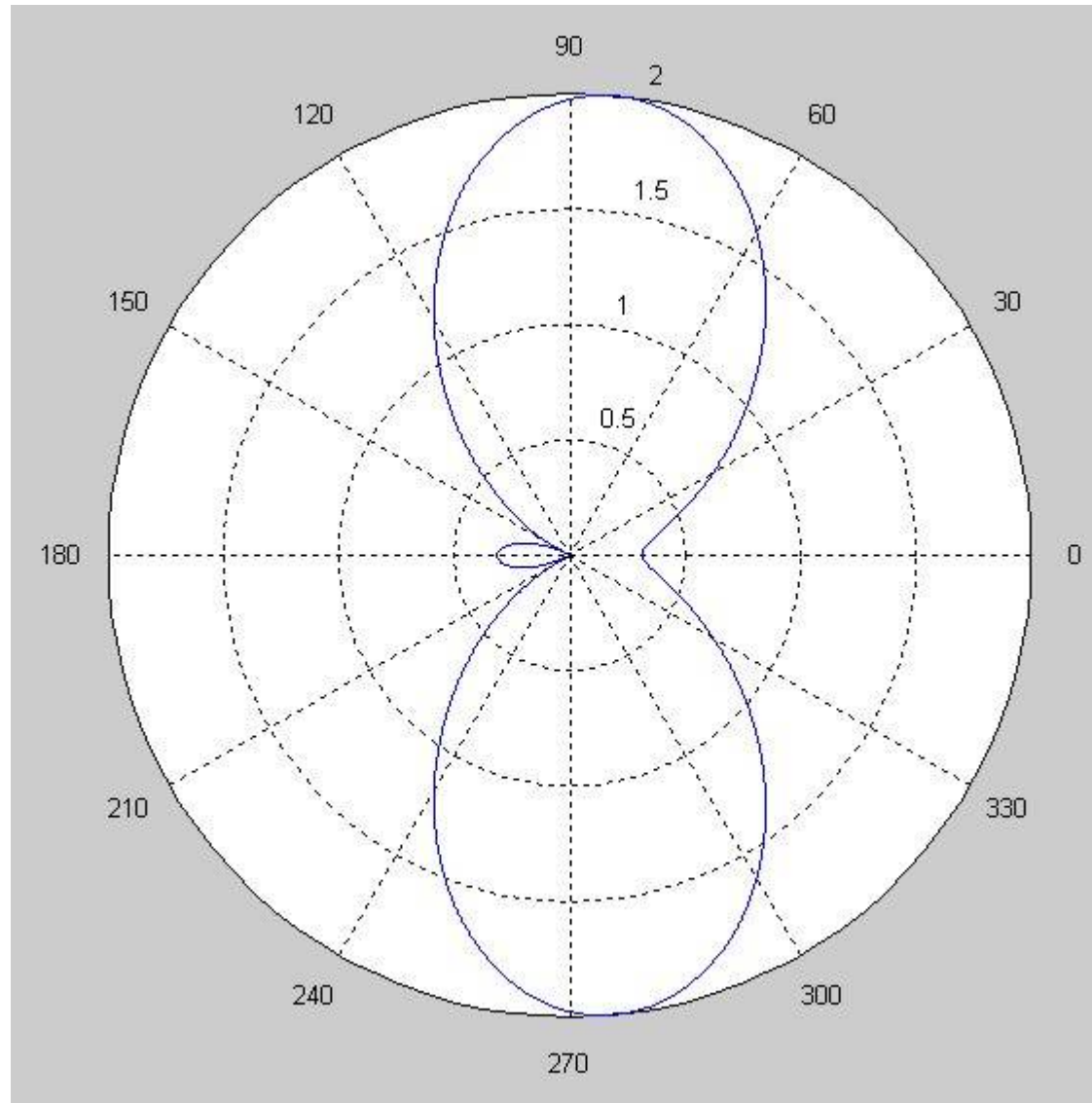
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 3\pi/4.$$

Два ізотропних випромінювача



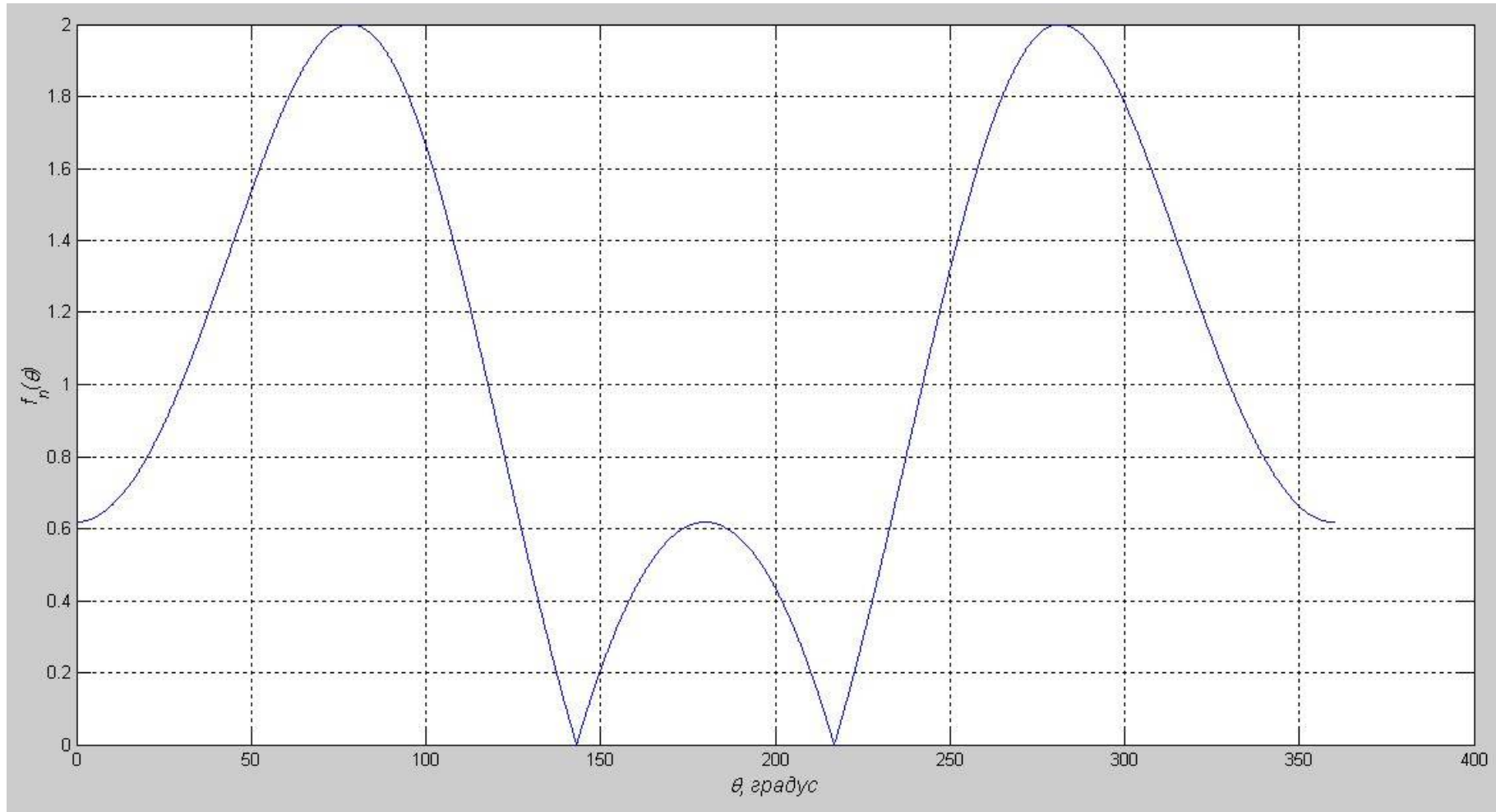
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0, 1\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



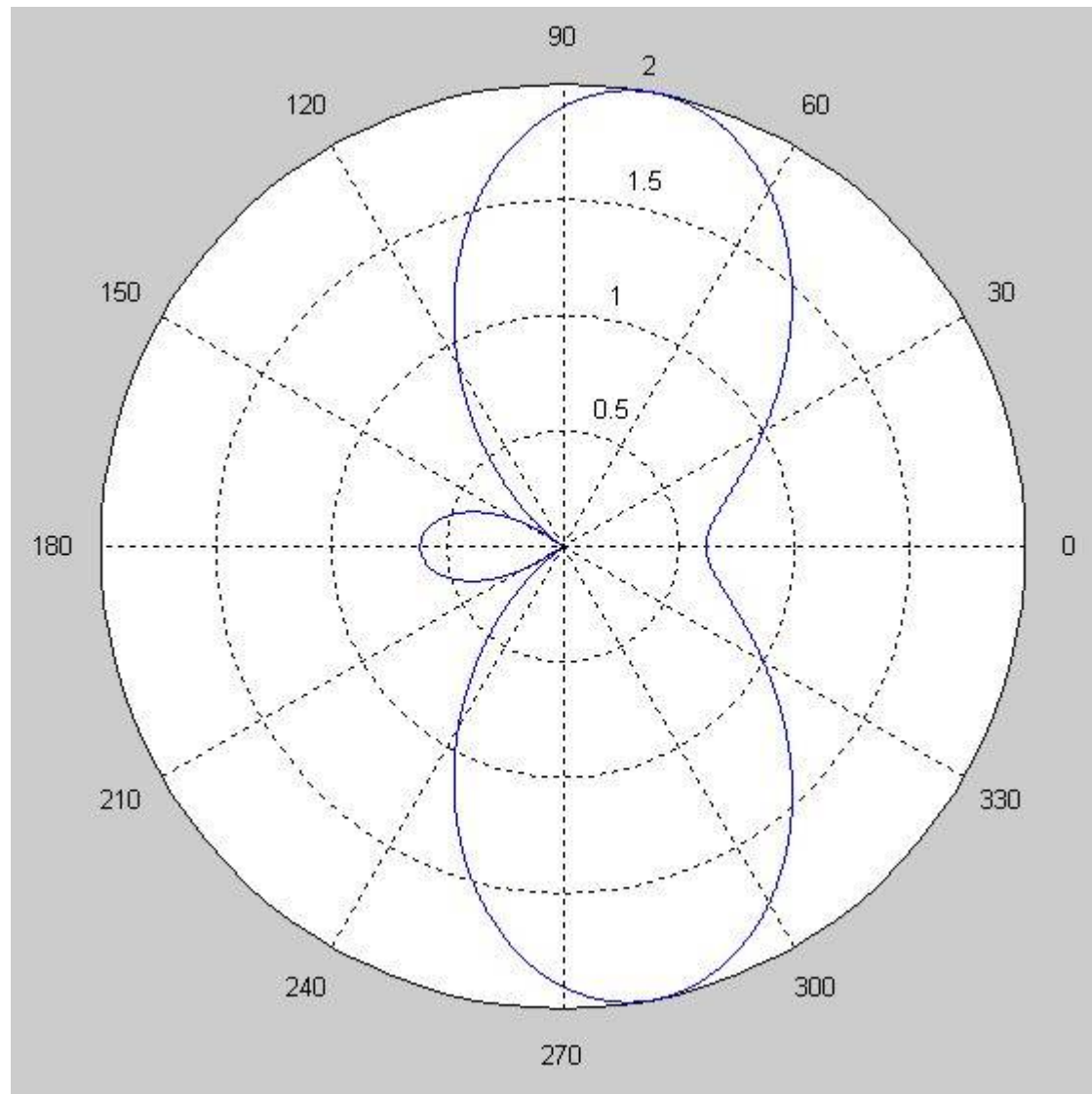
$$d = \lambda/2, \psi = 0, 1\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



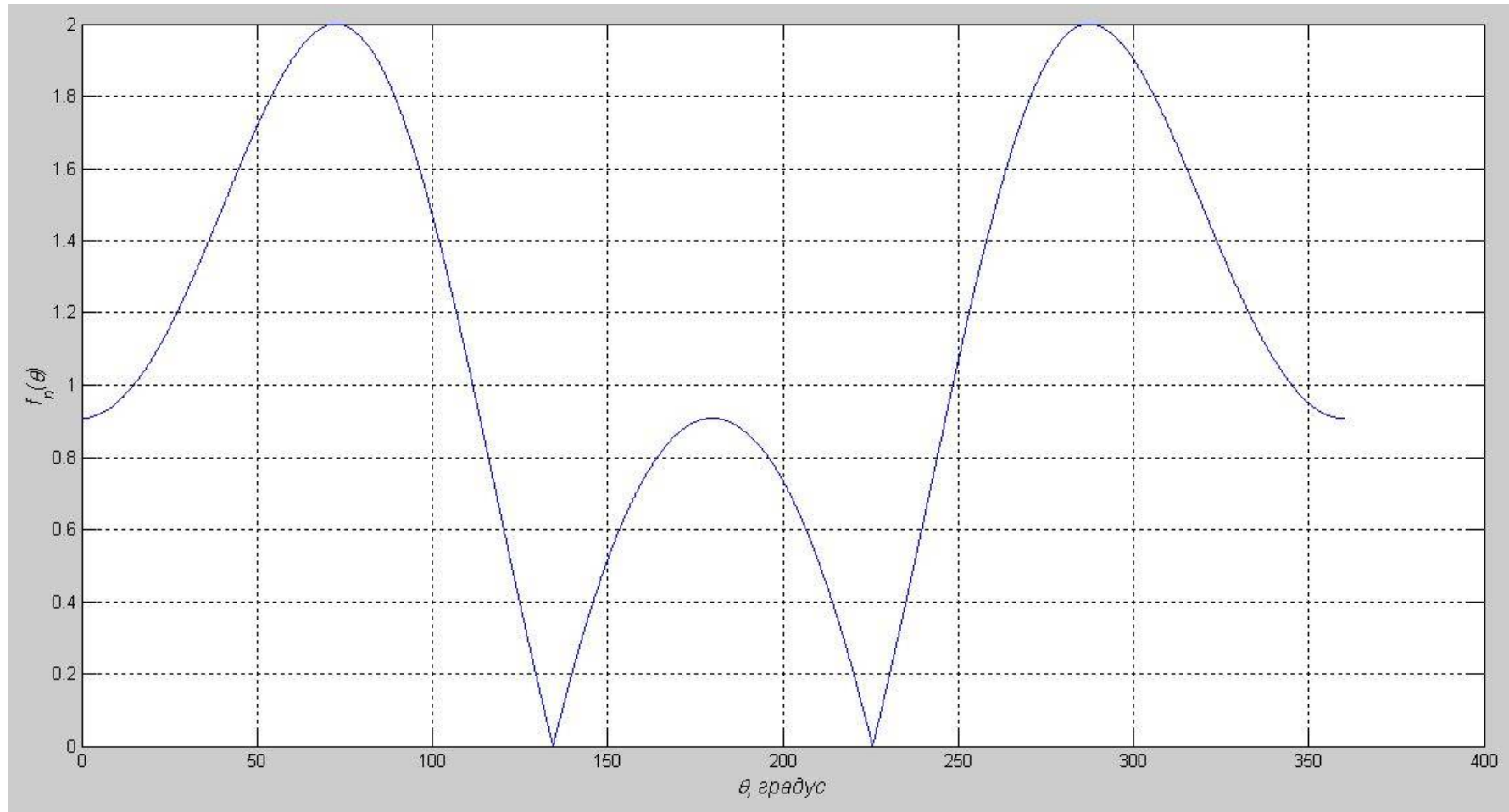
$$d = \lambda/2, \psi = 0, 2\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



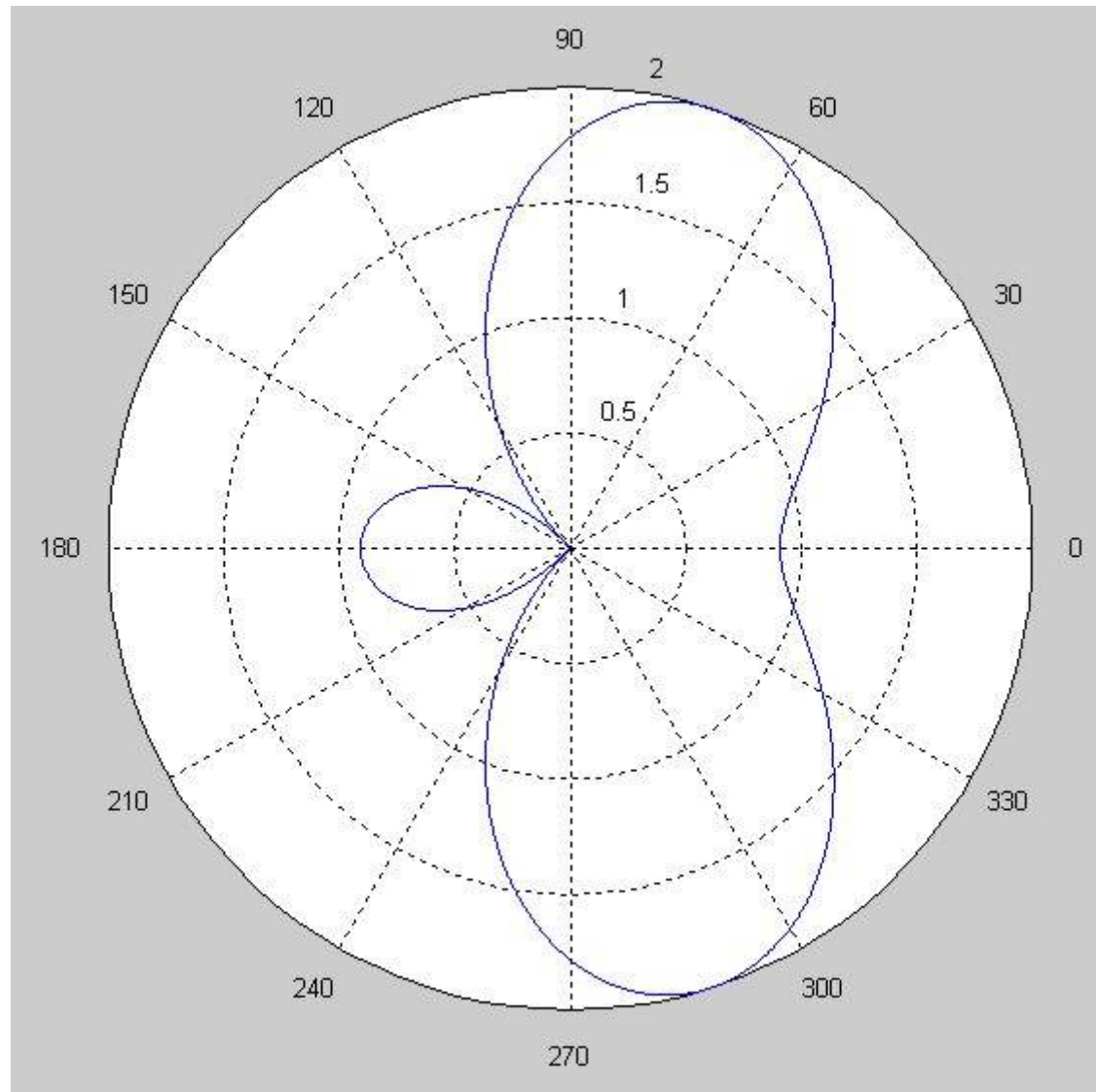
$$d = \lambda/2, \psi = 0, 2\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



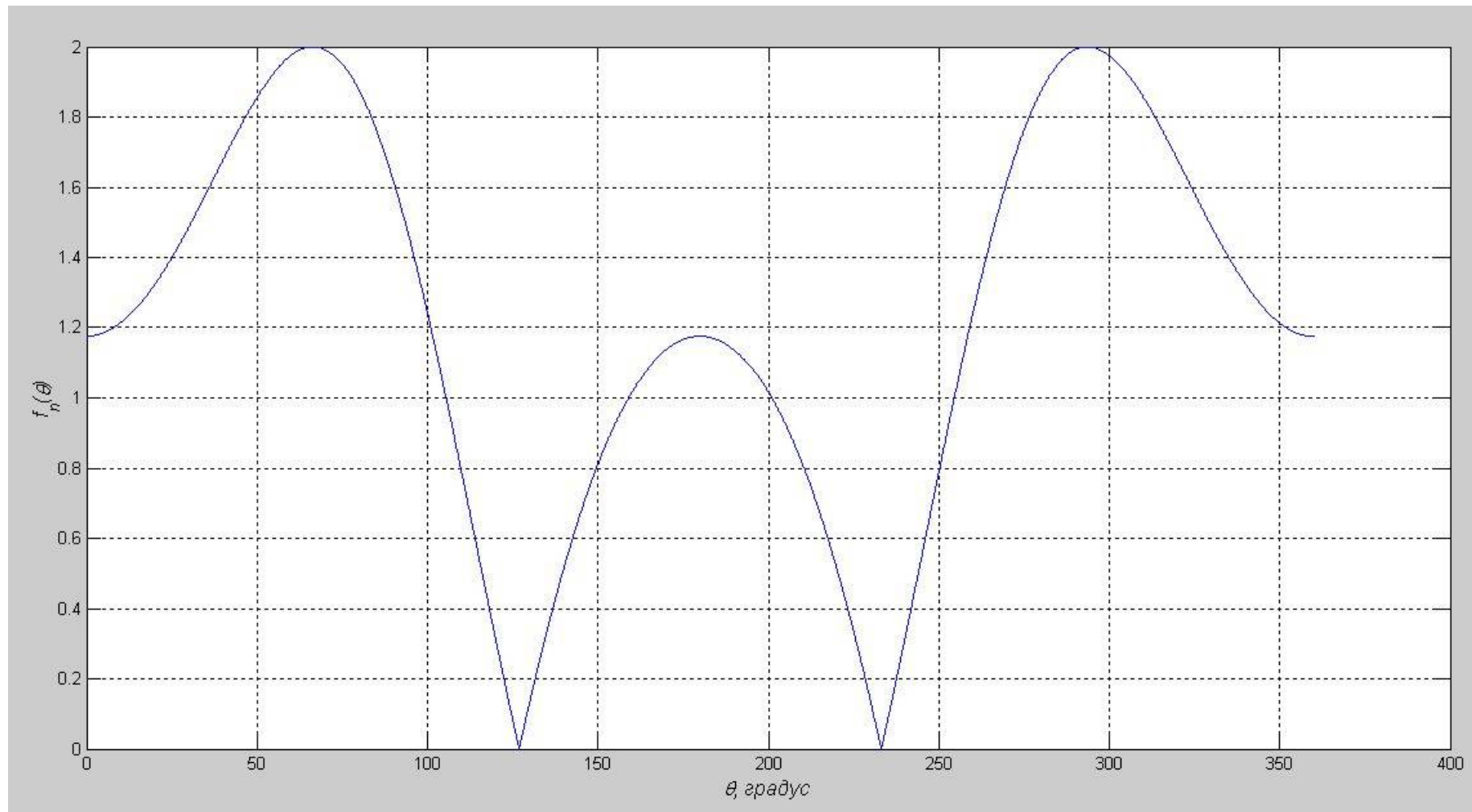
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,3\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



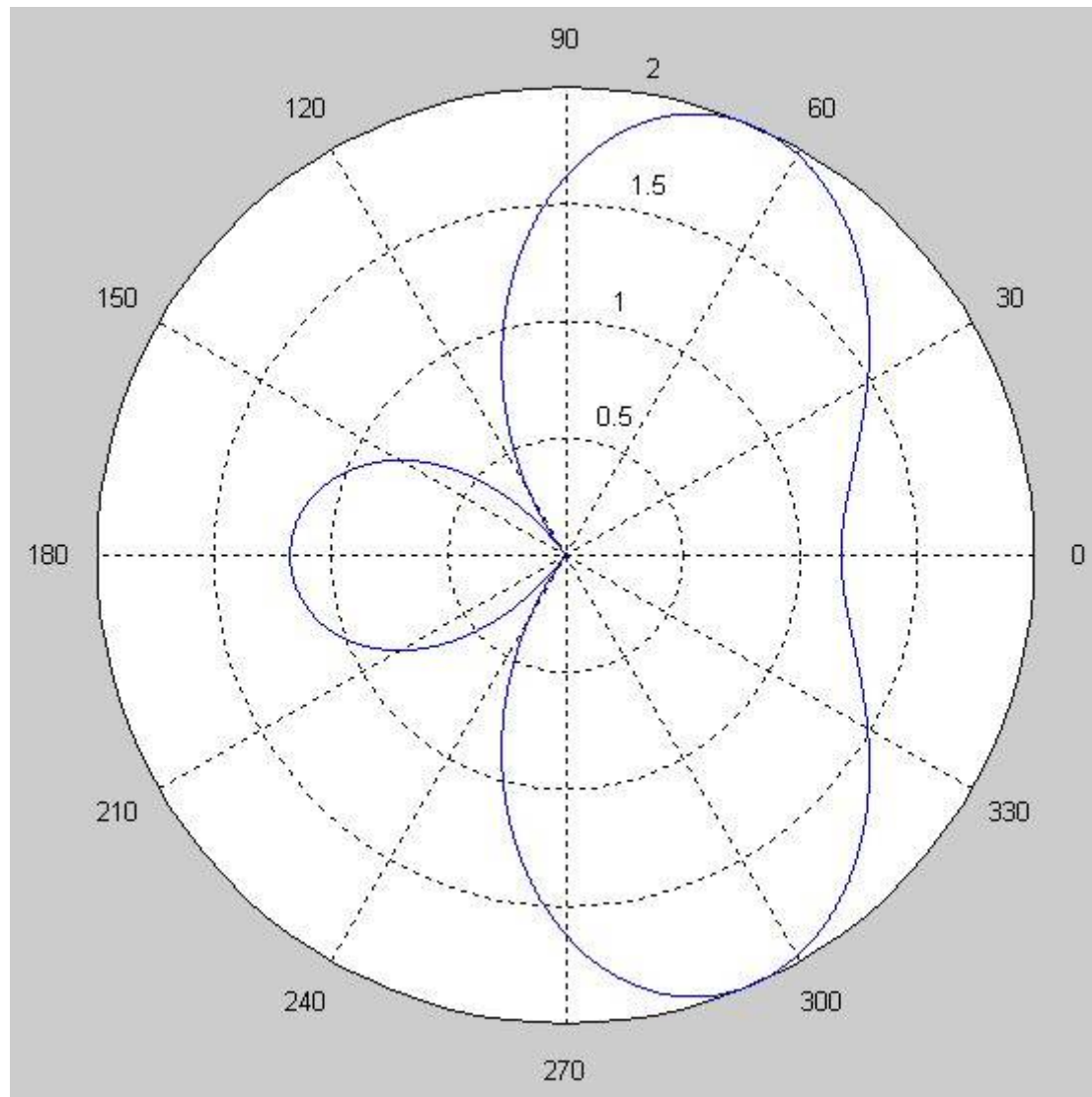
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,3\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



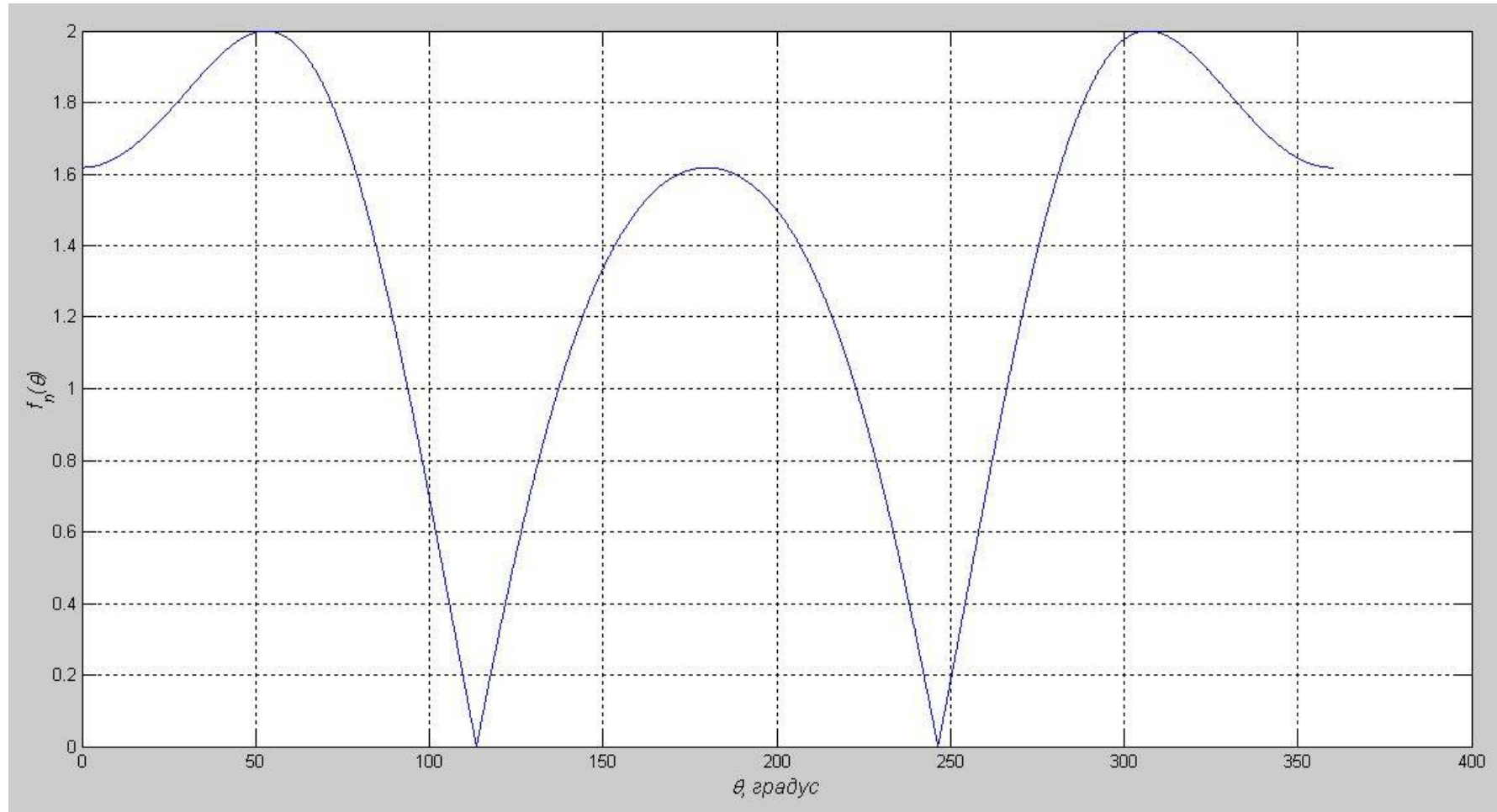
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,4\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



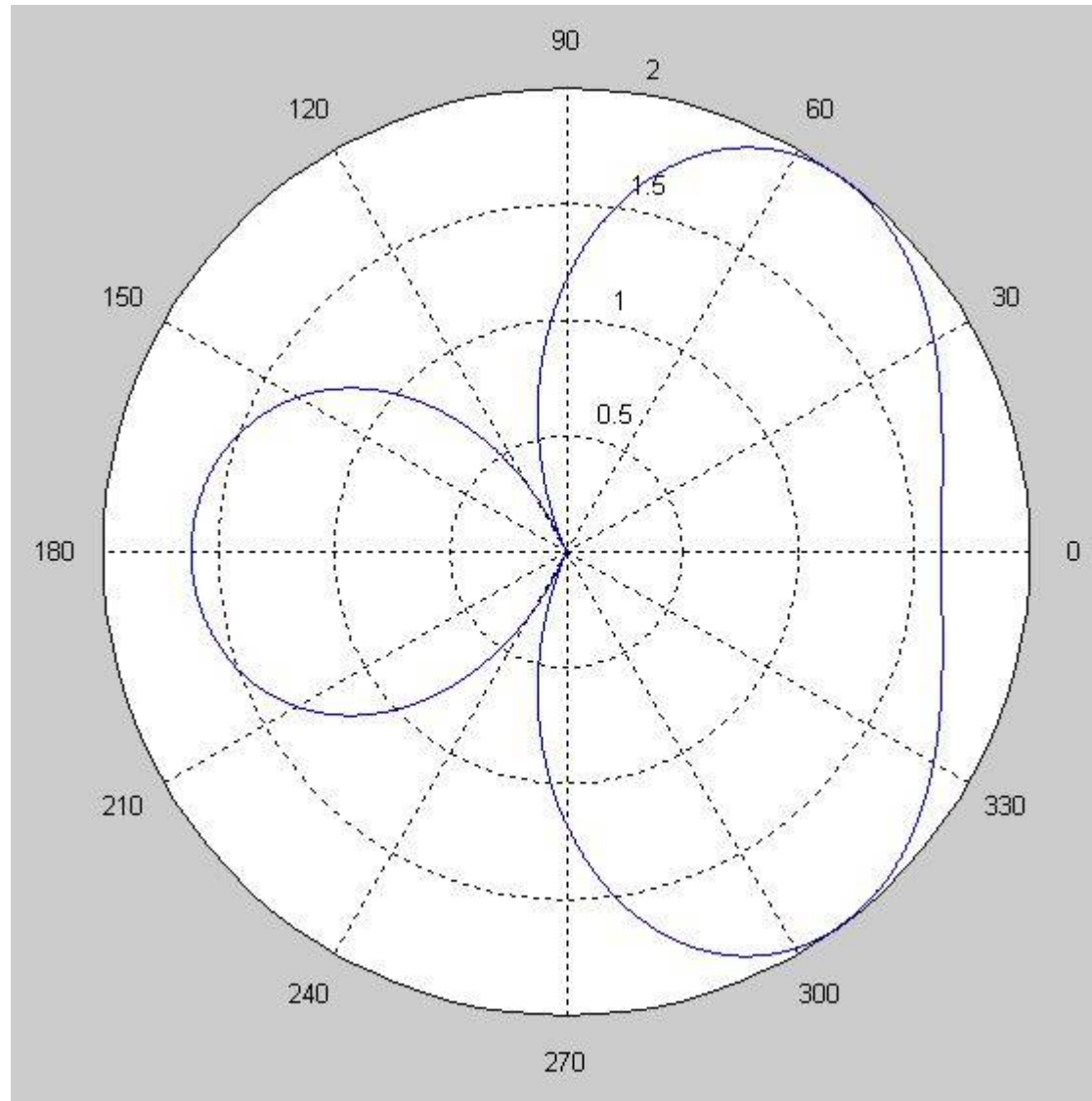
$$d = \lambda/2, \psi = 0,4\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



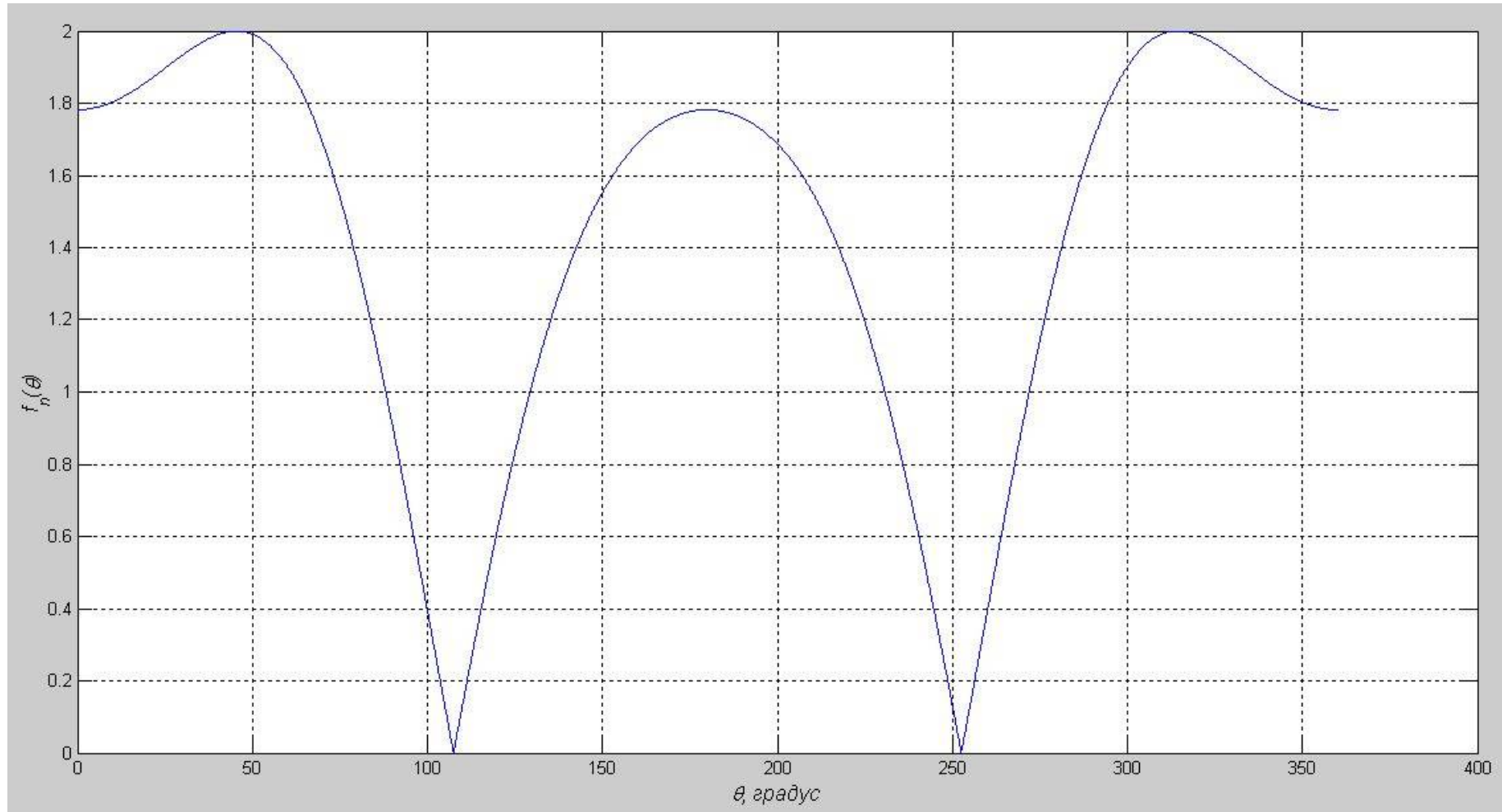
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,6\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



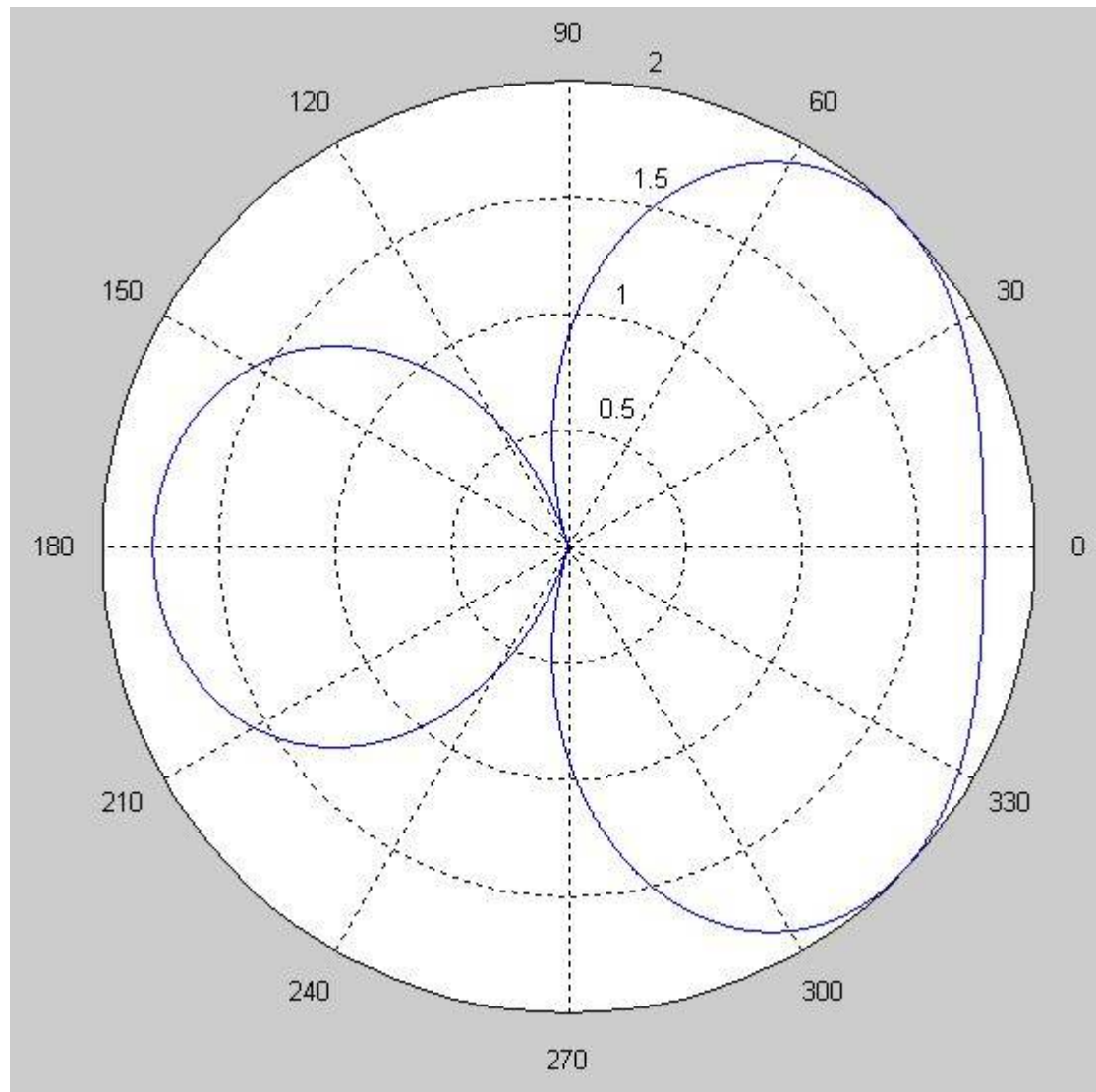
$$d = \lambda/2, \psi = 0,6\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



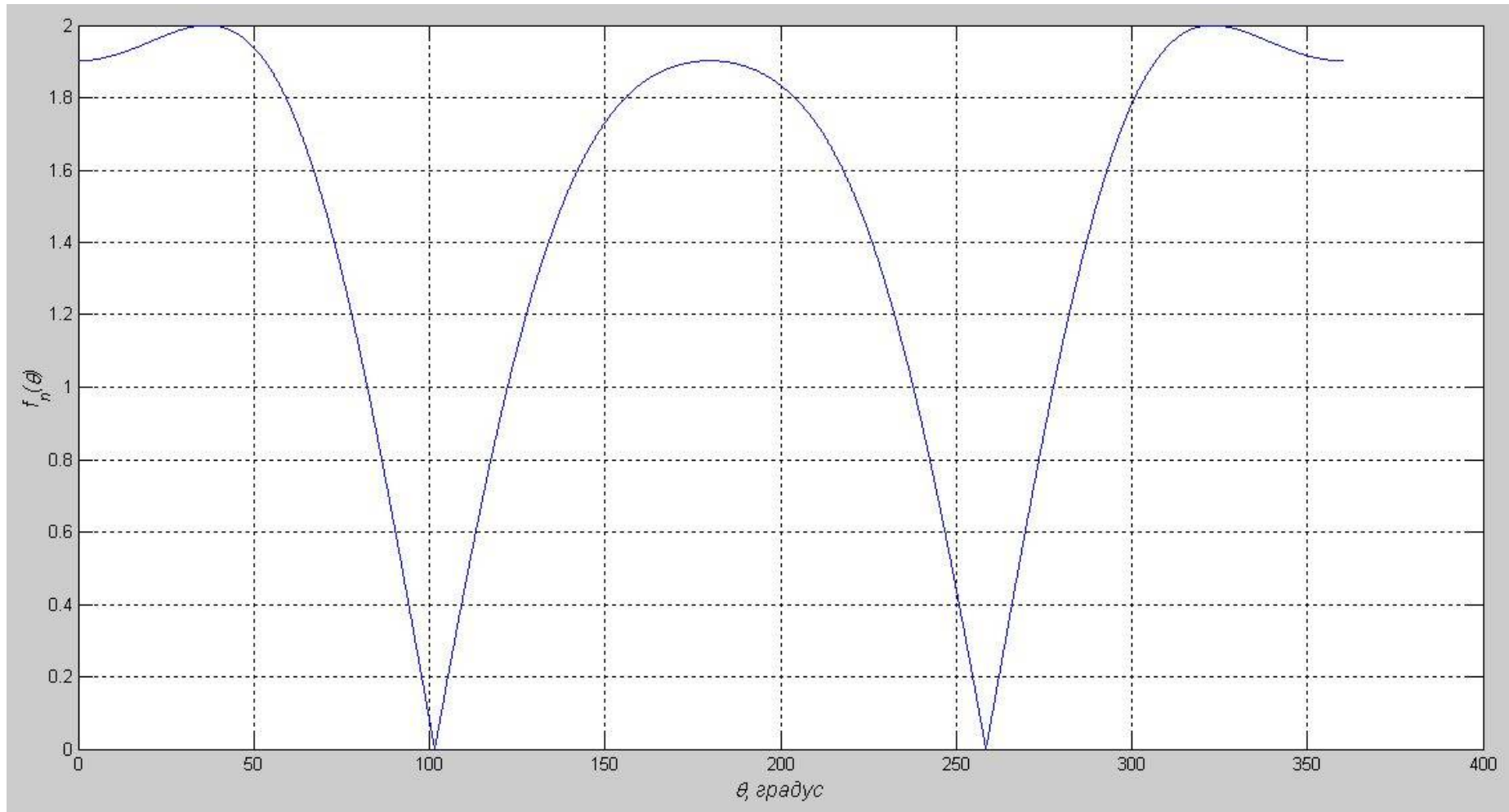
$$d = \lambda/2, \psi = 0,7\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



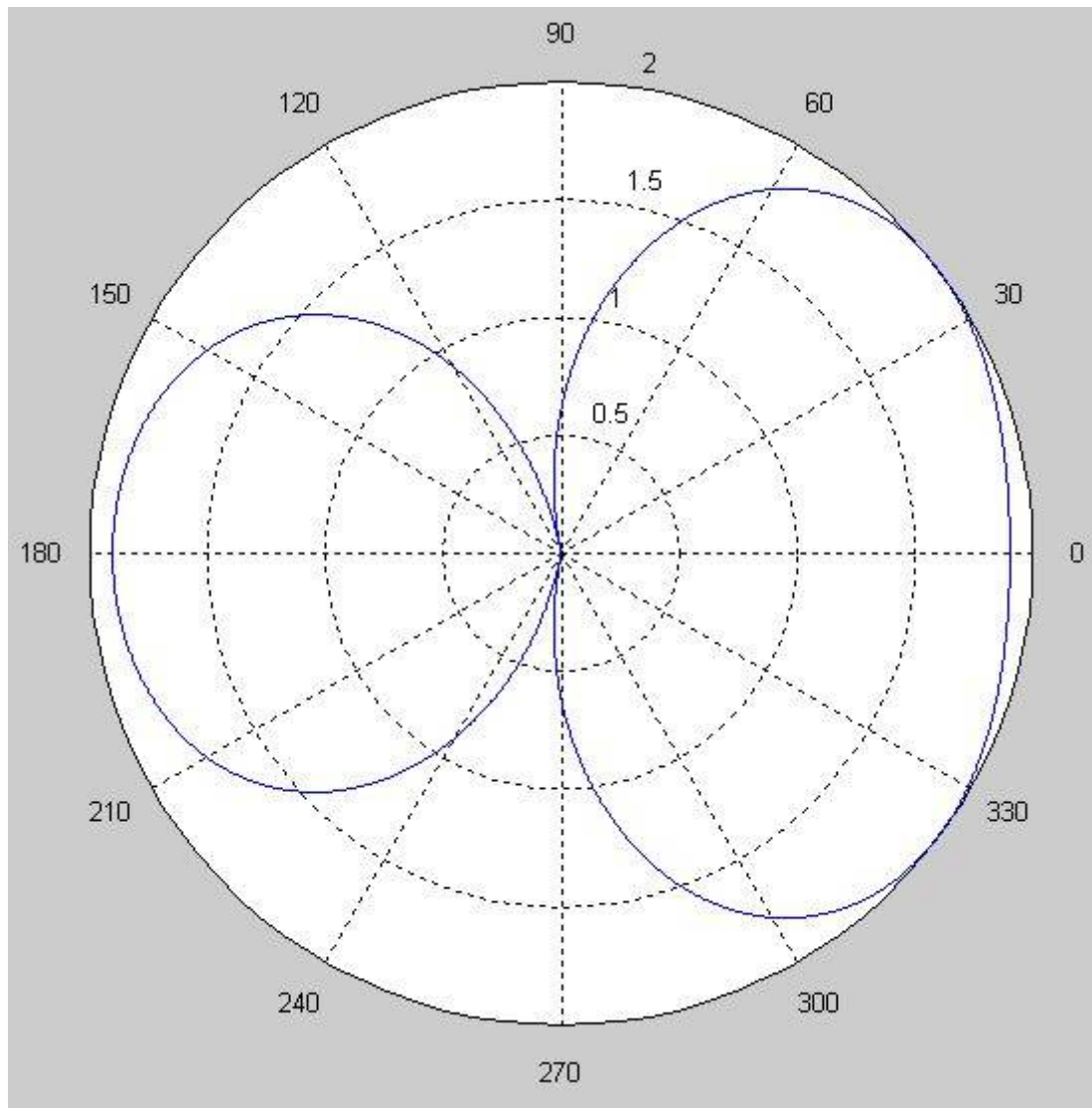
$$d = \lambda/2, \psi = 0,7\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



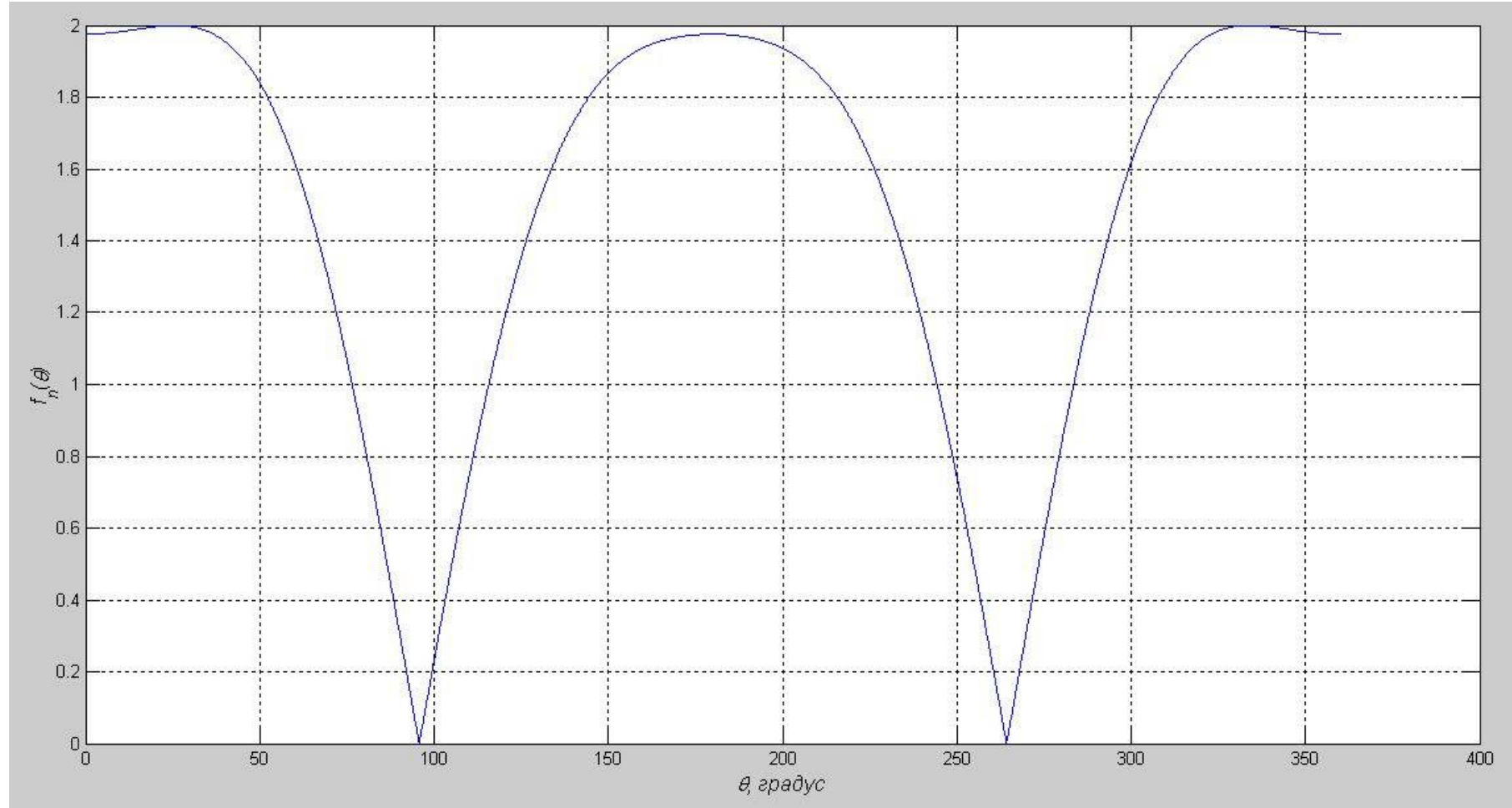
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,8\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



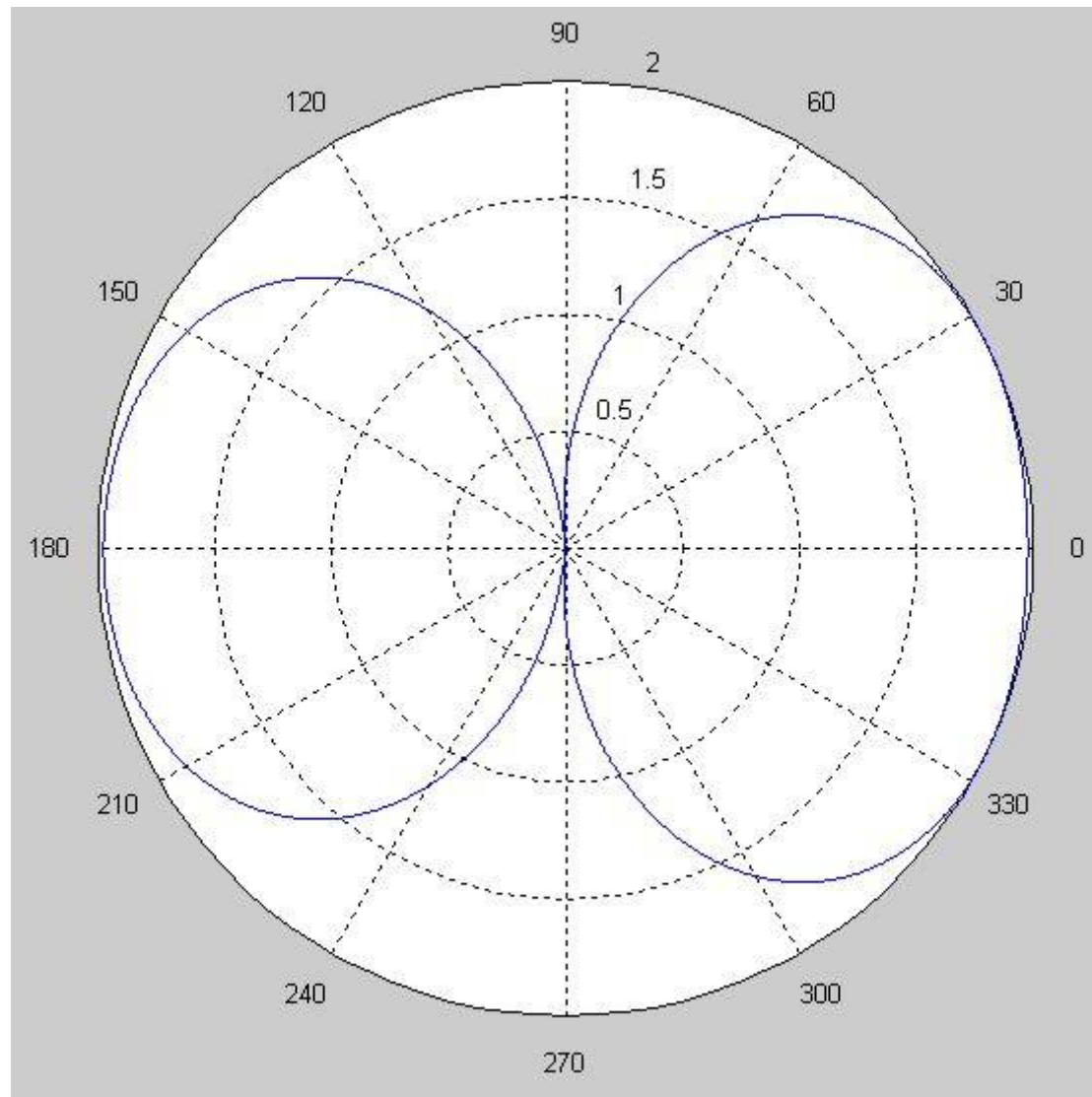
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,8\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



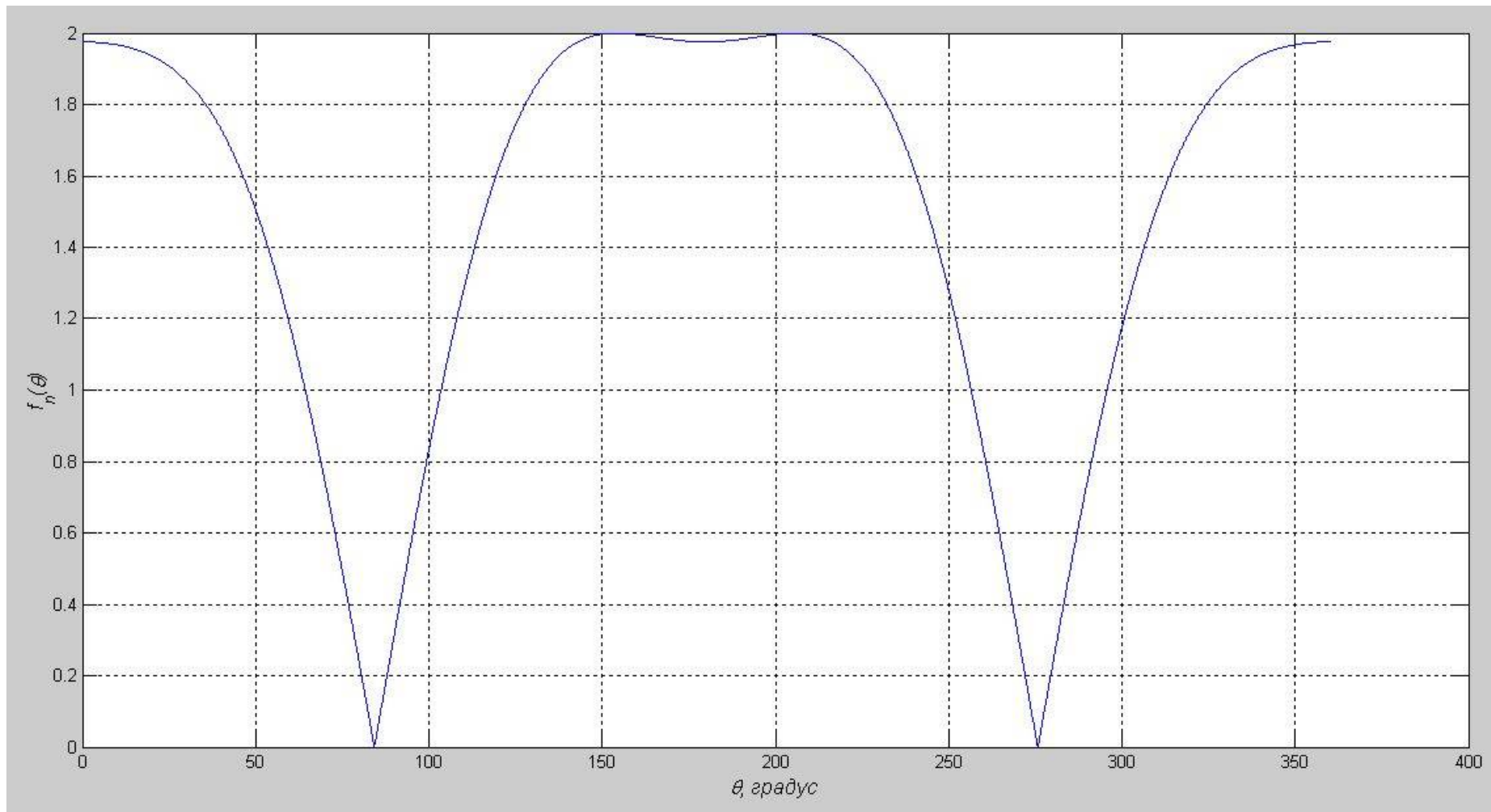
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 0,9\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



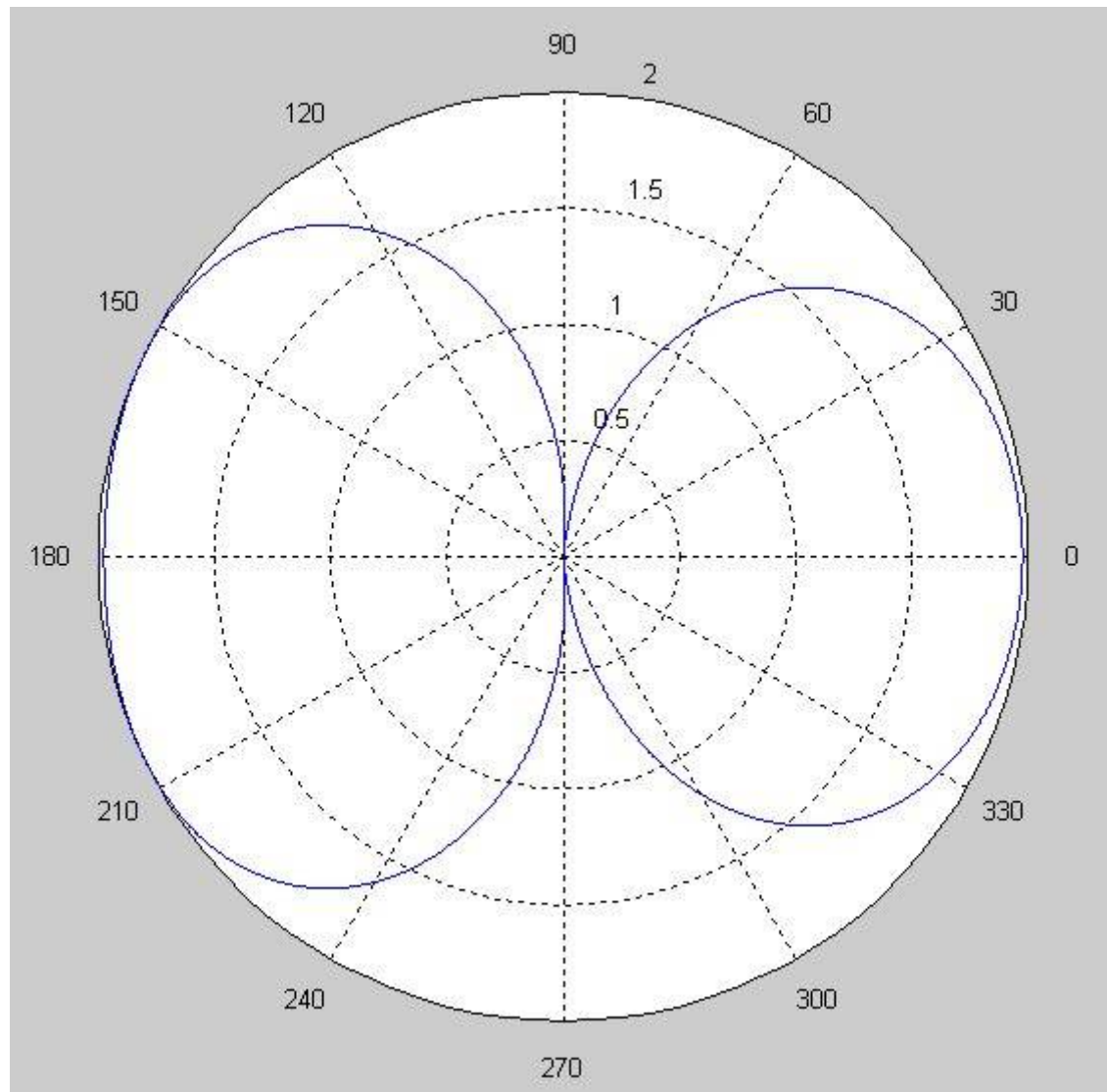
$$d = \lambda/2, \psi = 0,9\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



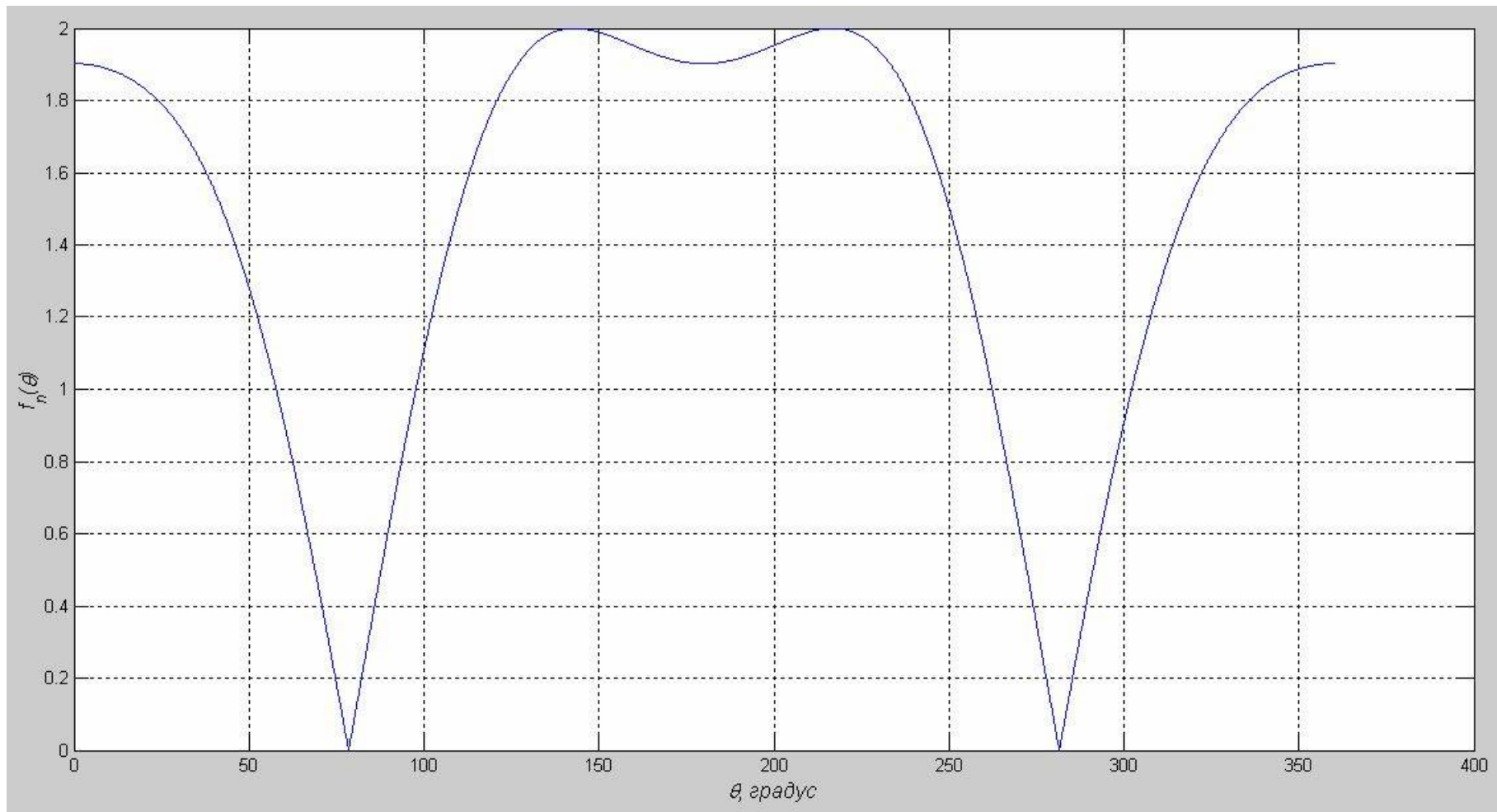
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,1\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



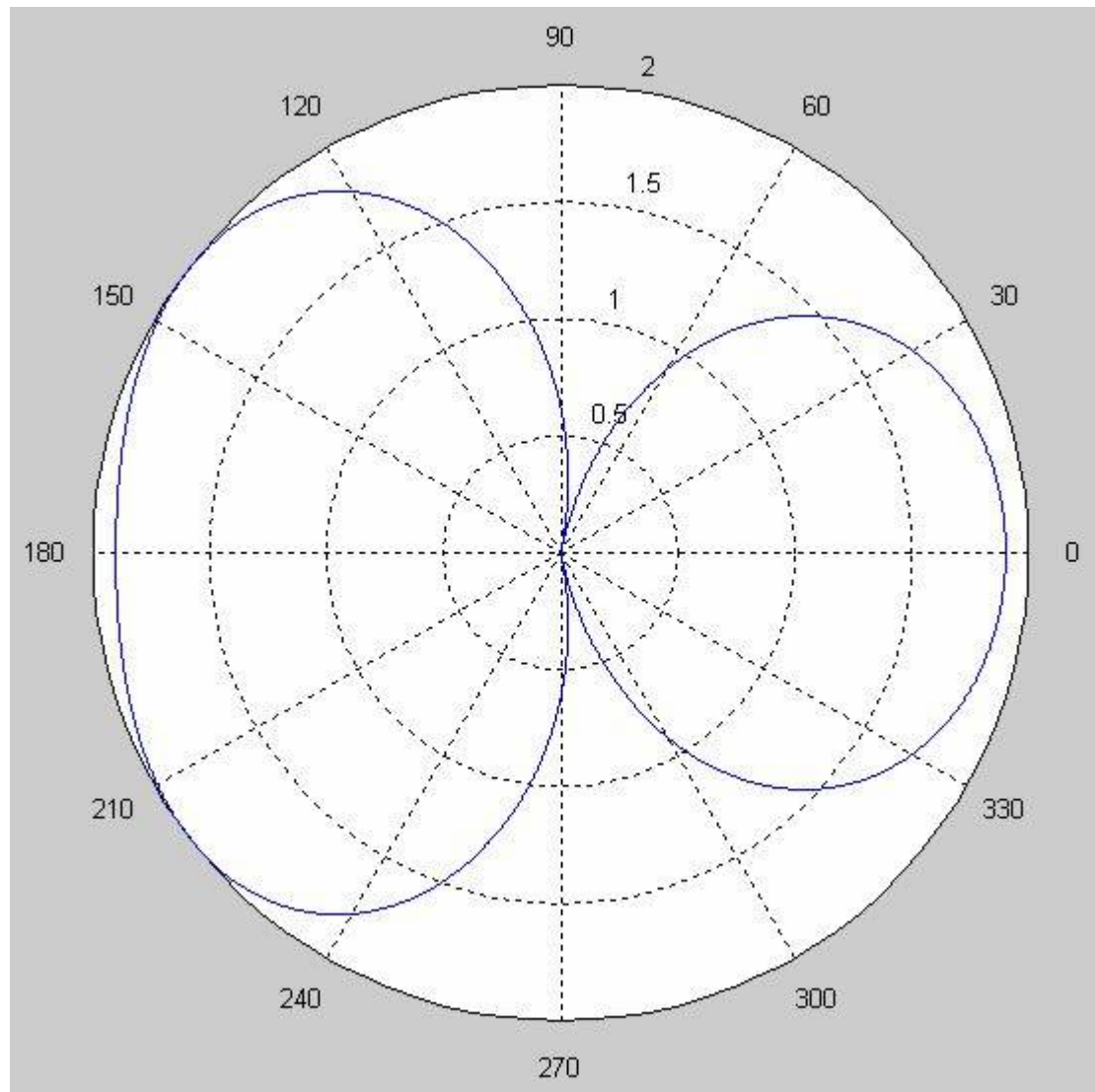
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,1\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



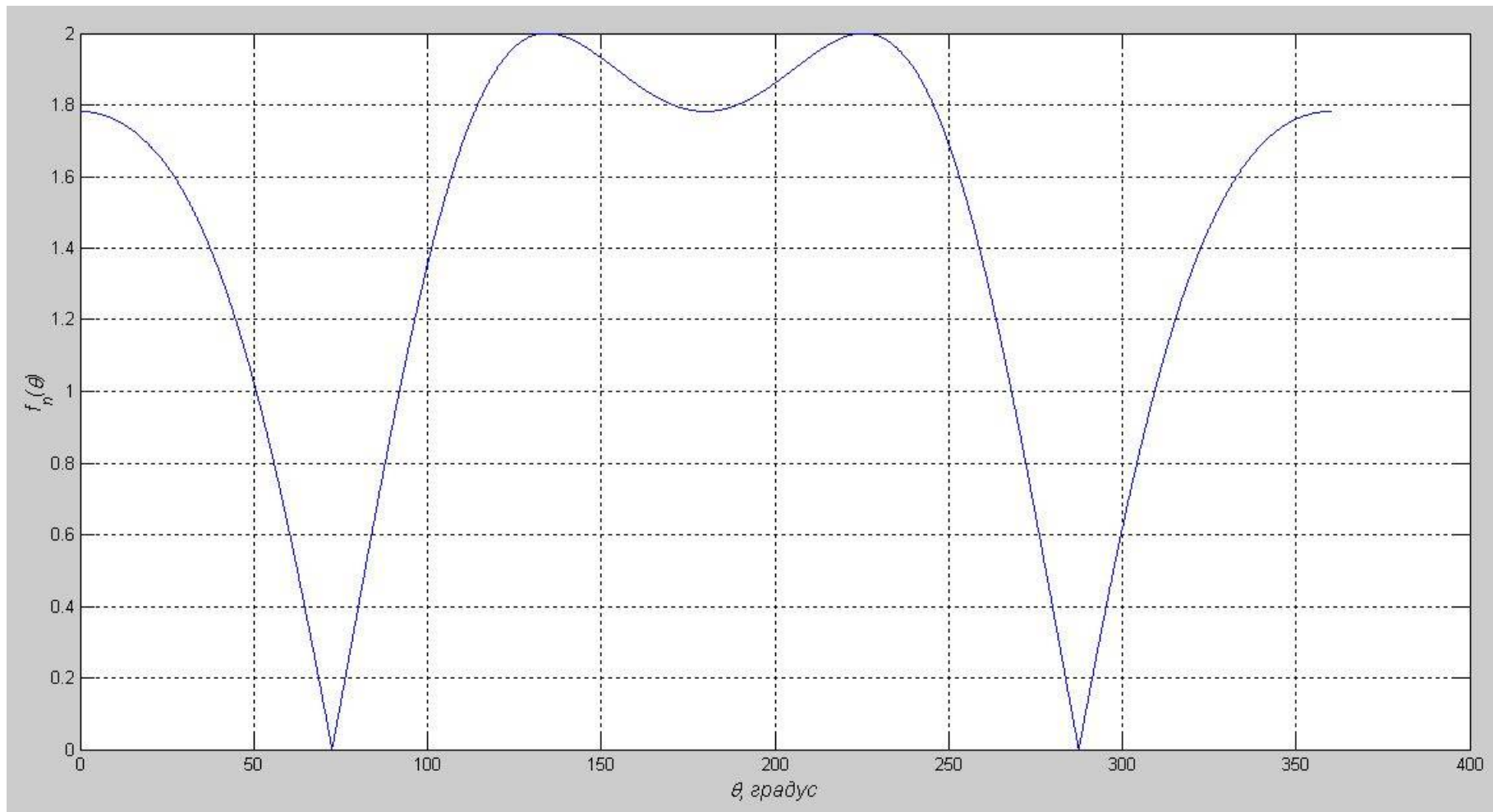
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,2\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



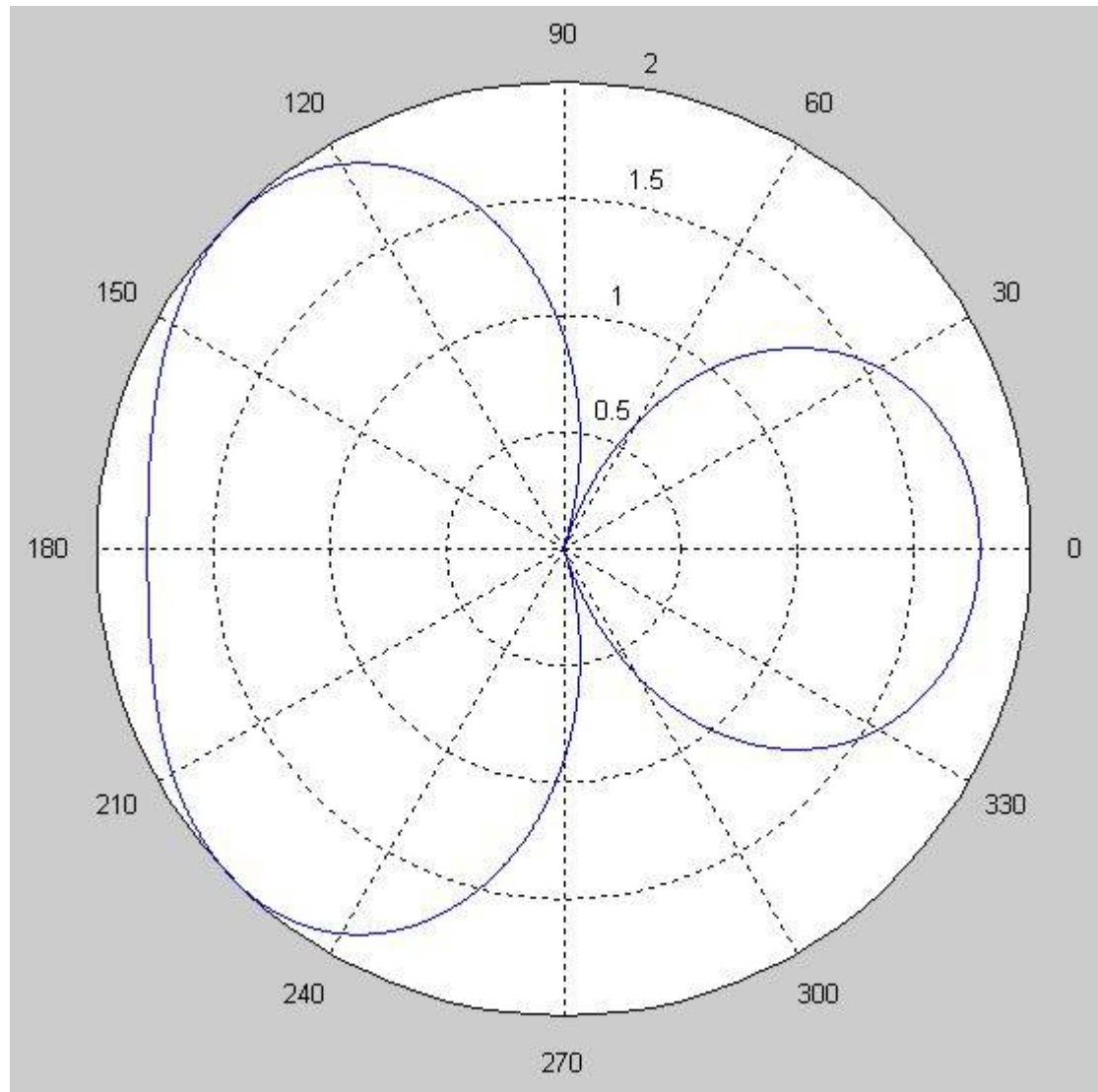
$$d = \lambda/2, \psi = 1,2\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



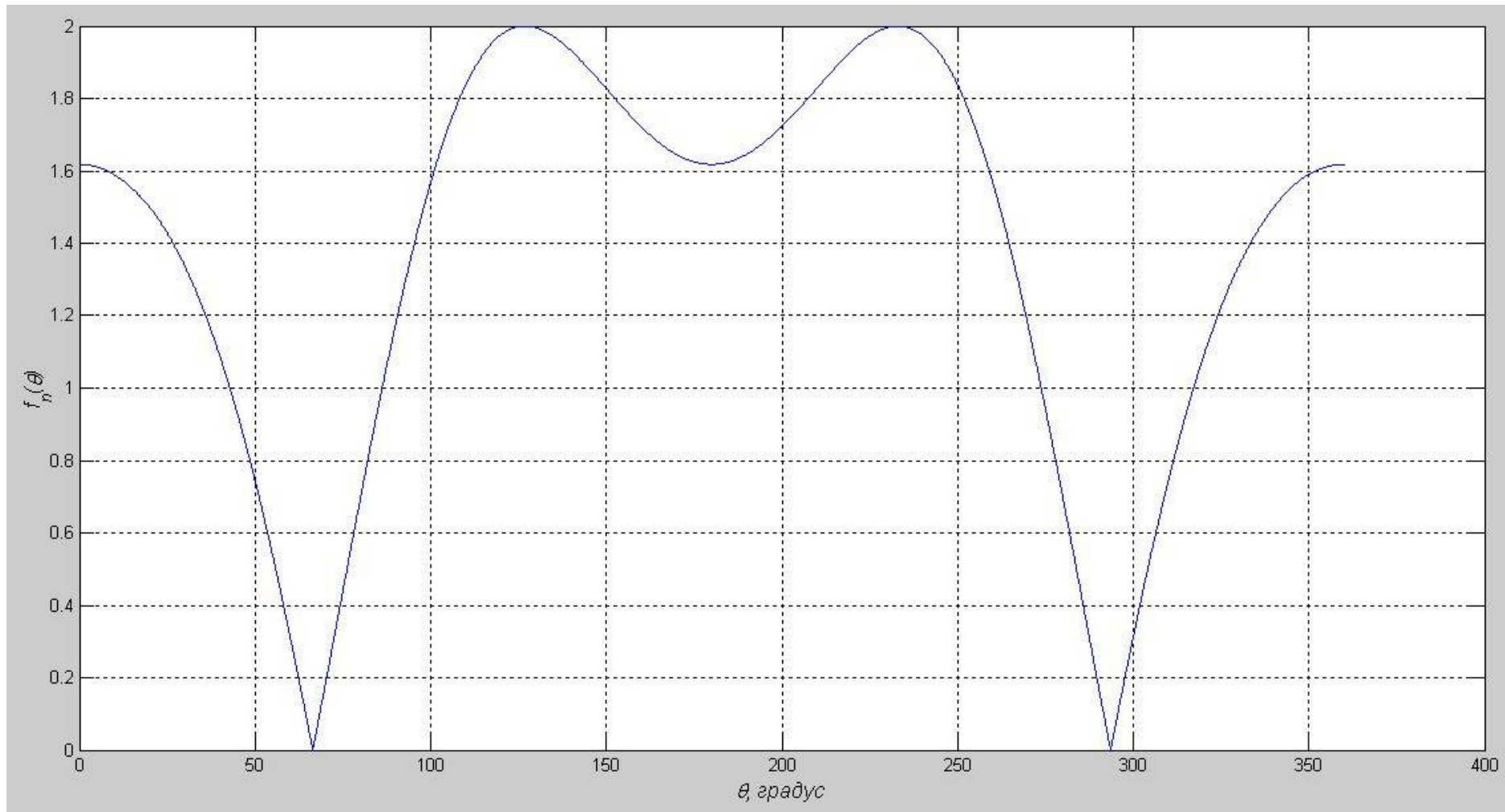
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,3\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



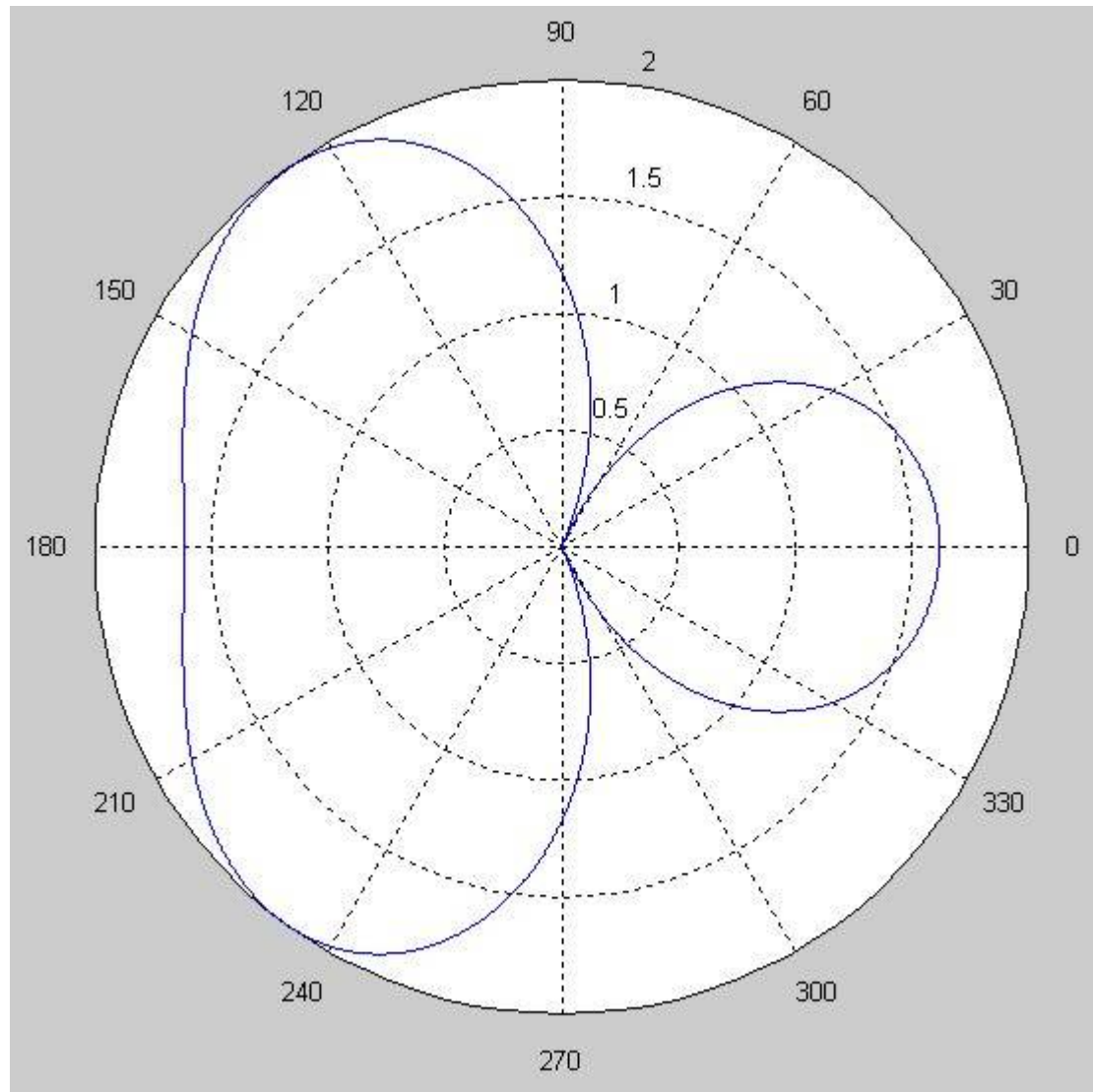
$$d = \lambda/2, \psi = 1,3\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



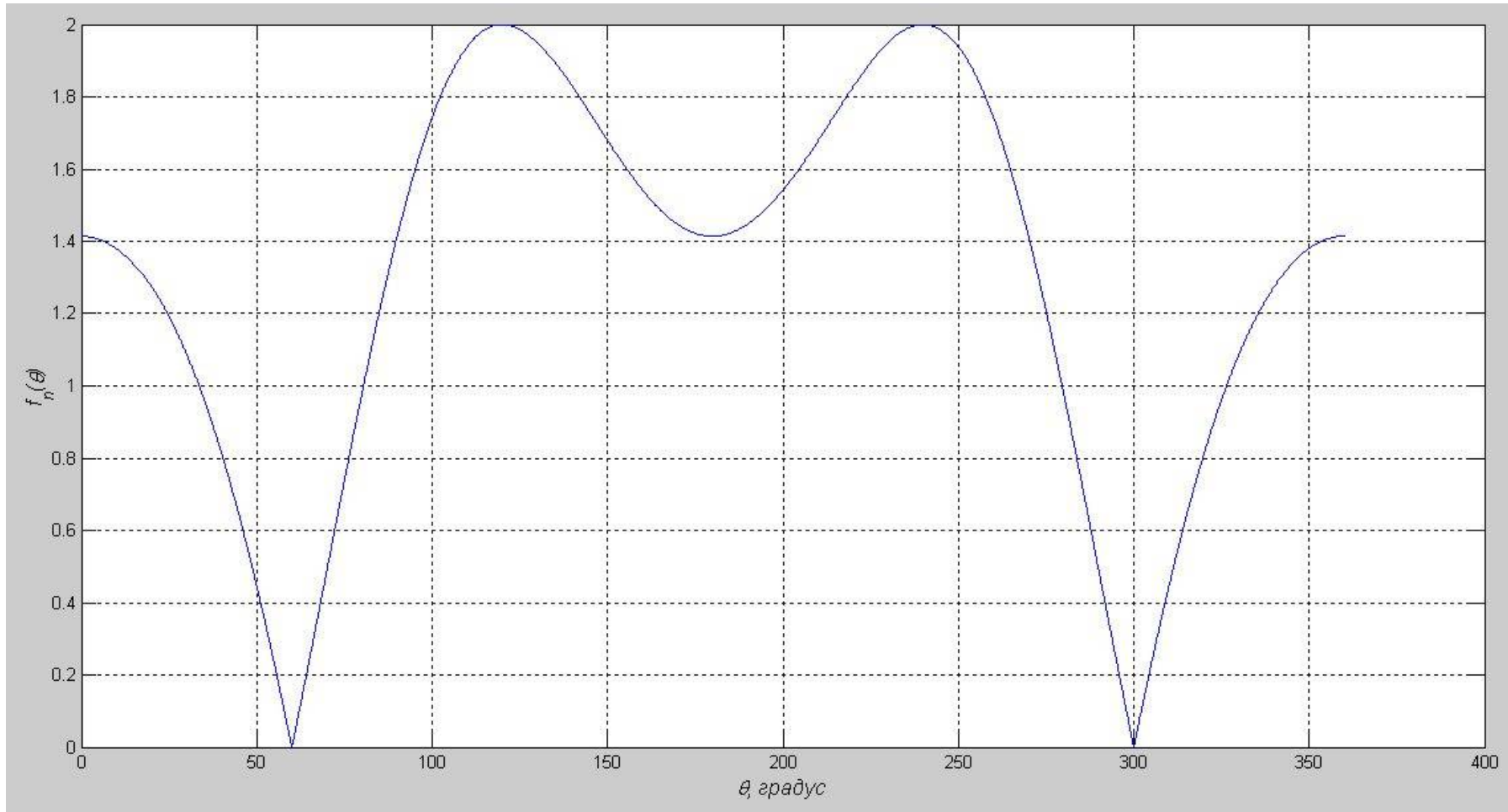
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,4\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



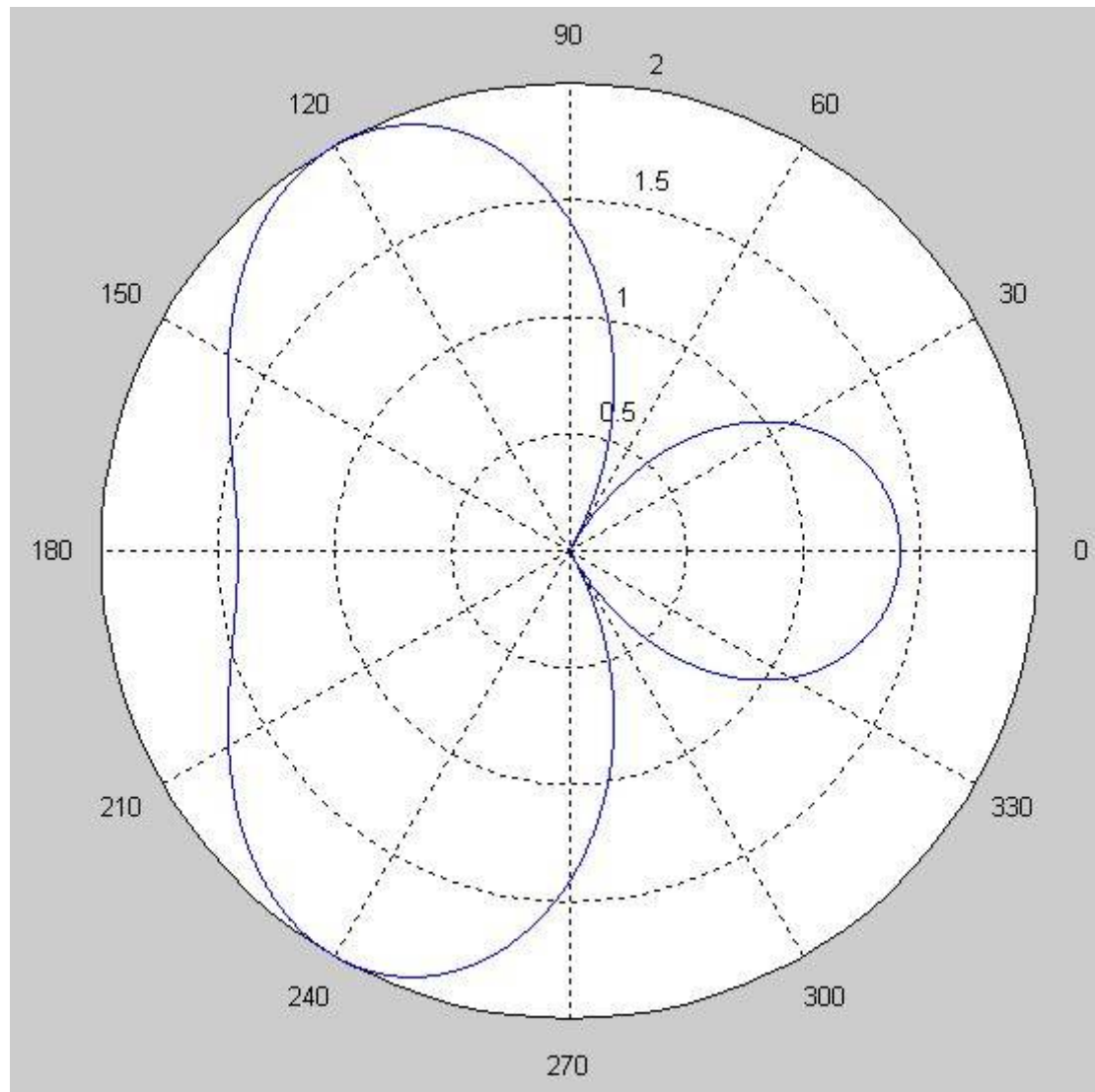
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,4\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



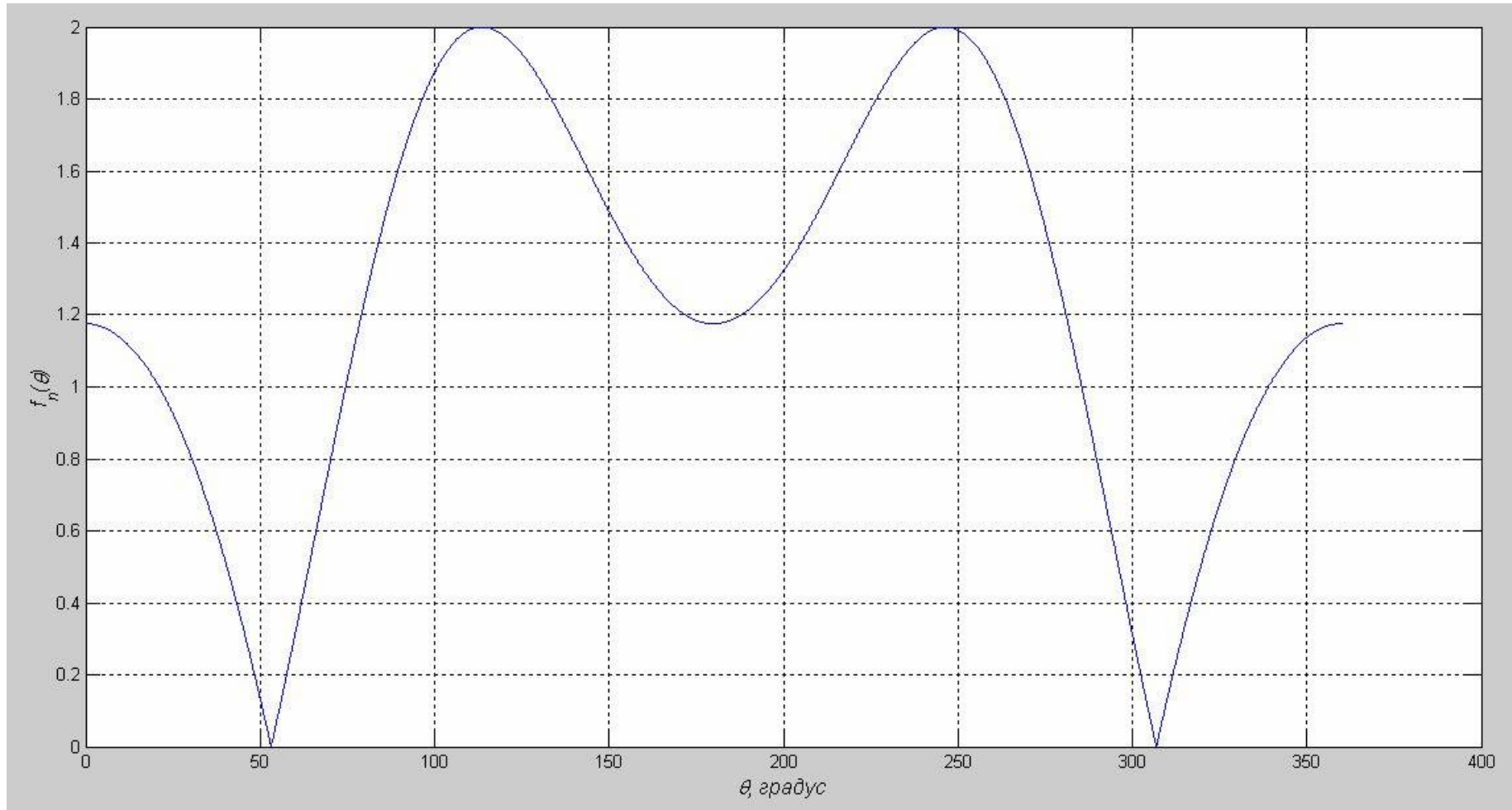
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,5\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



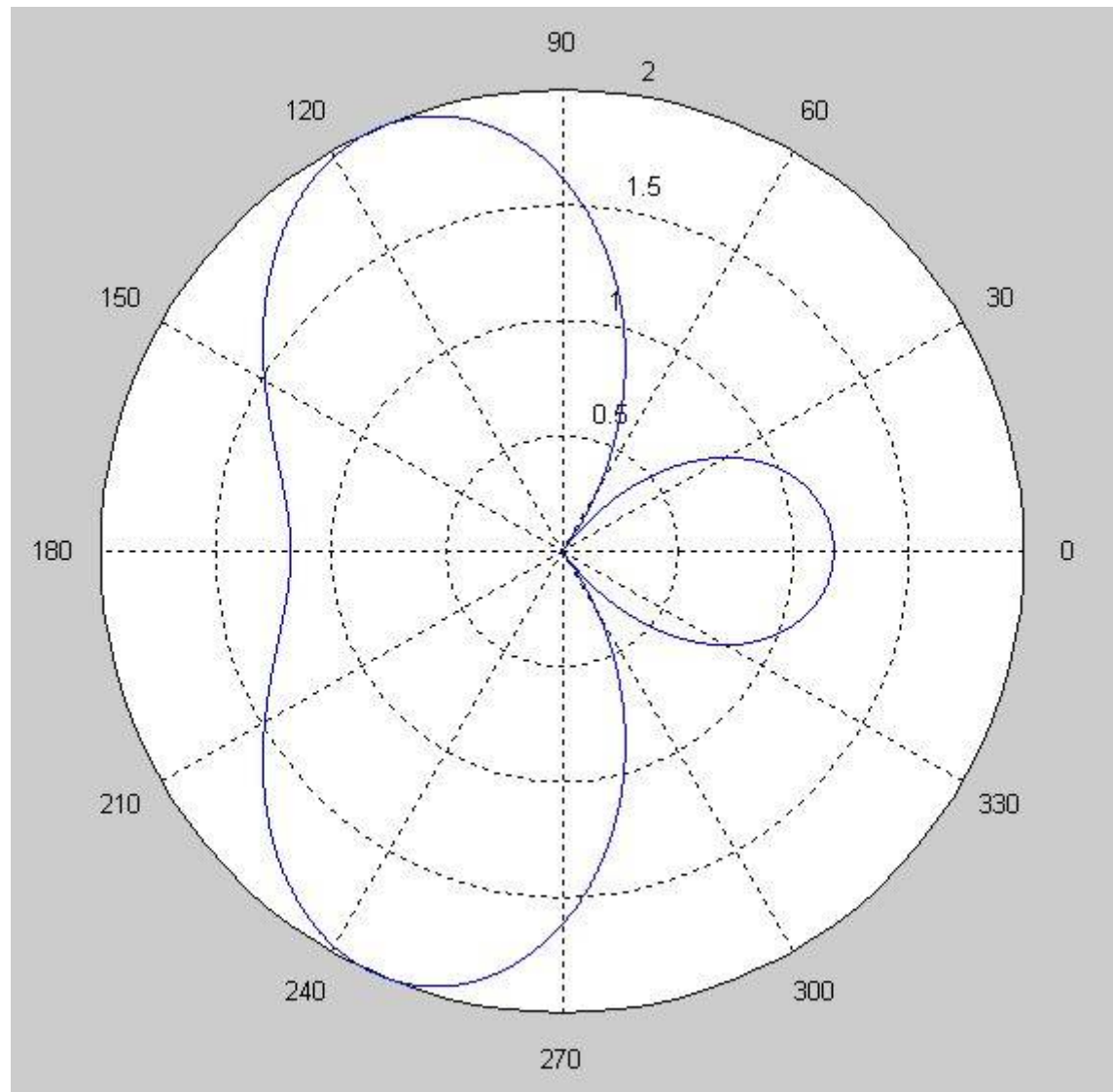
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,5\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



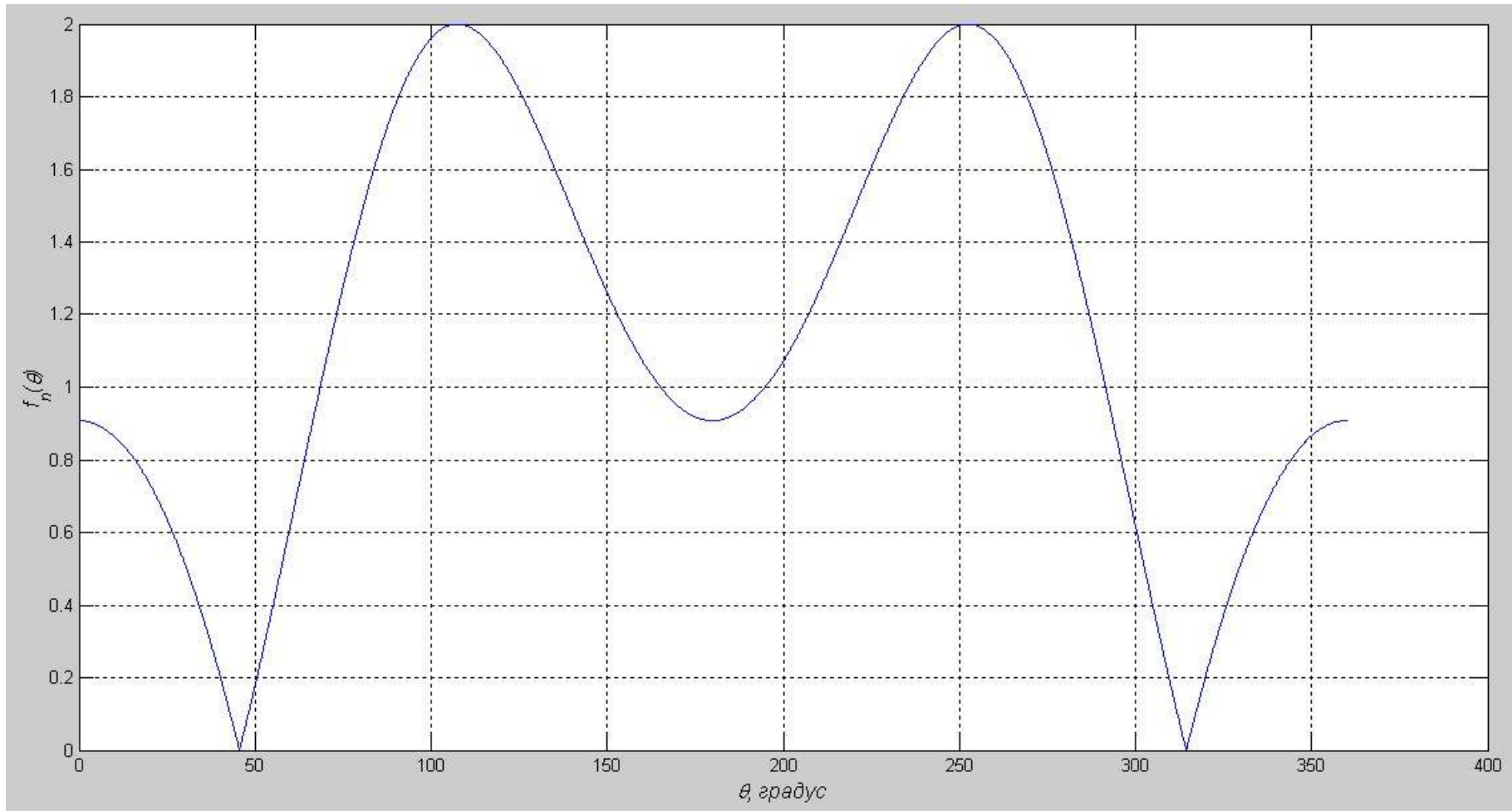
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,6\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



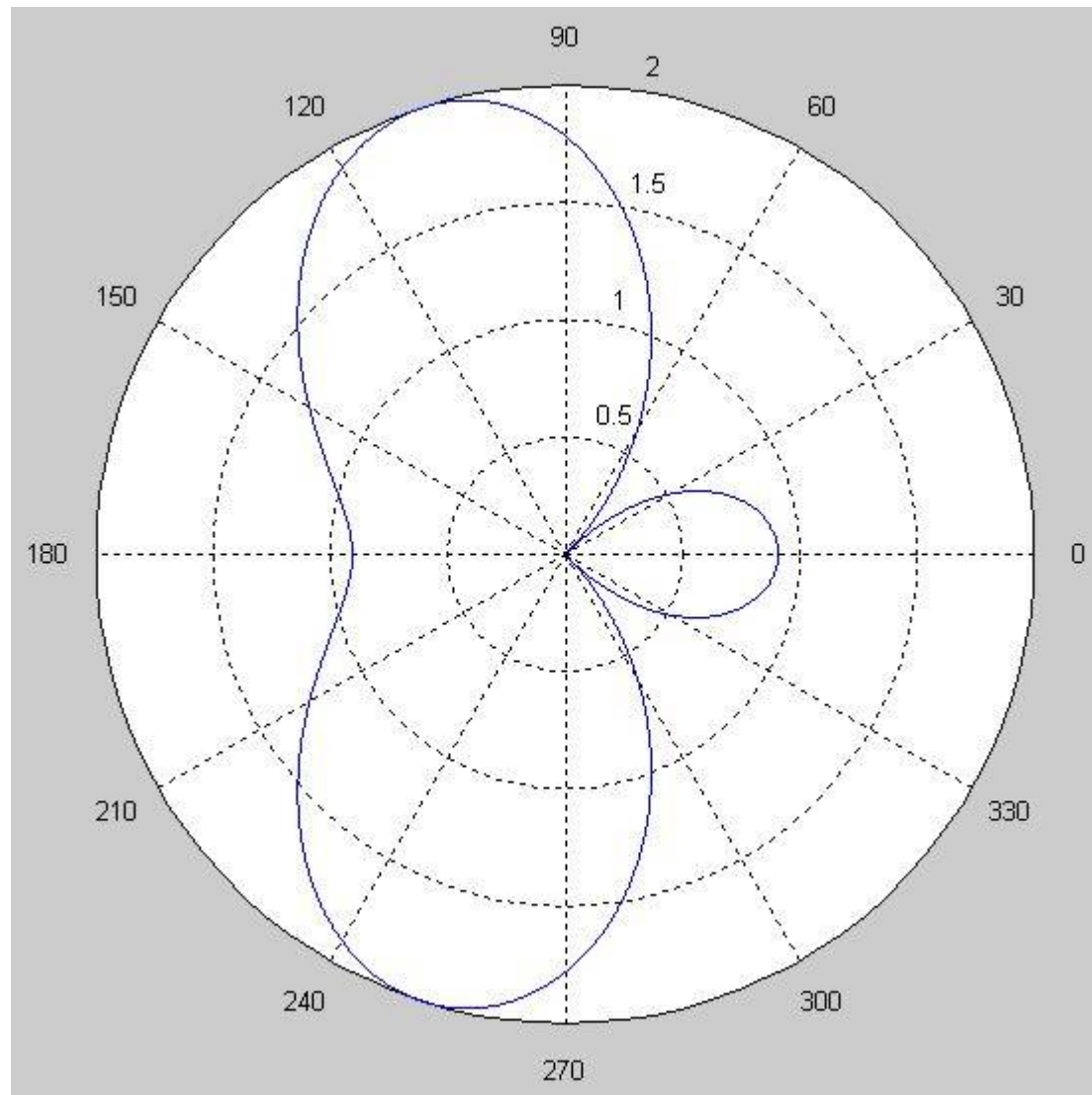
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,6\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



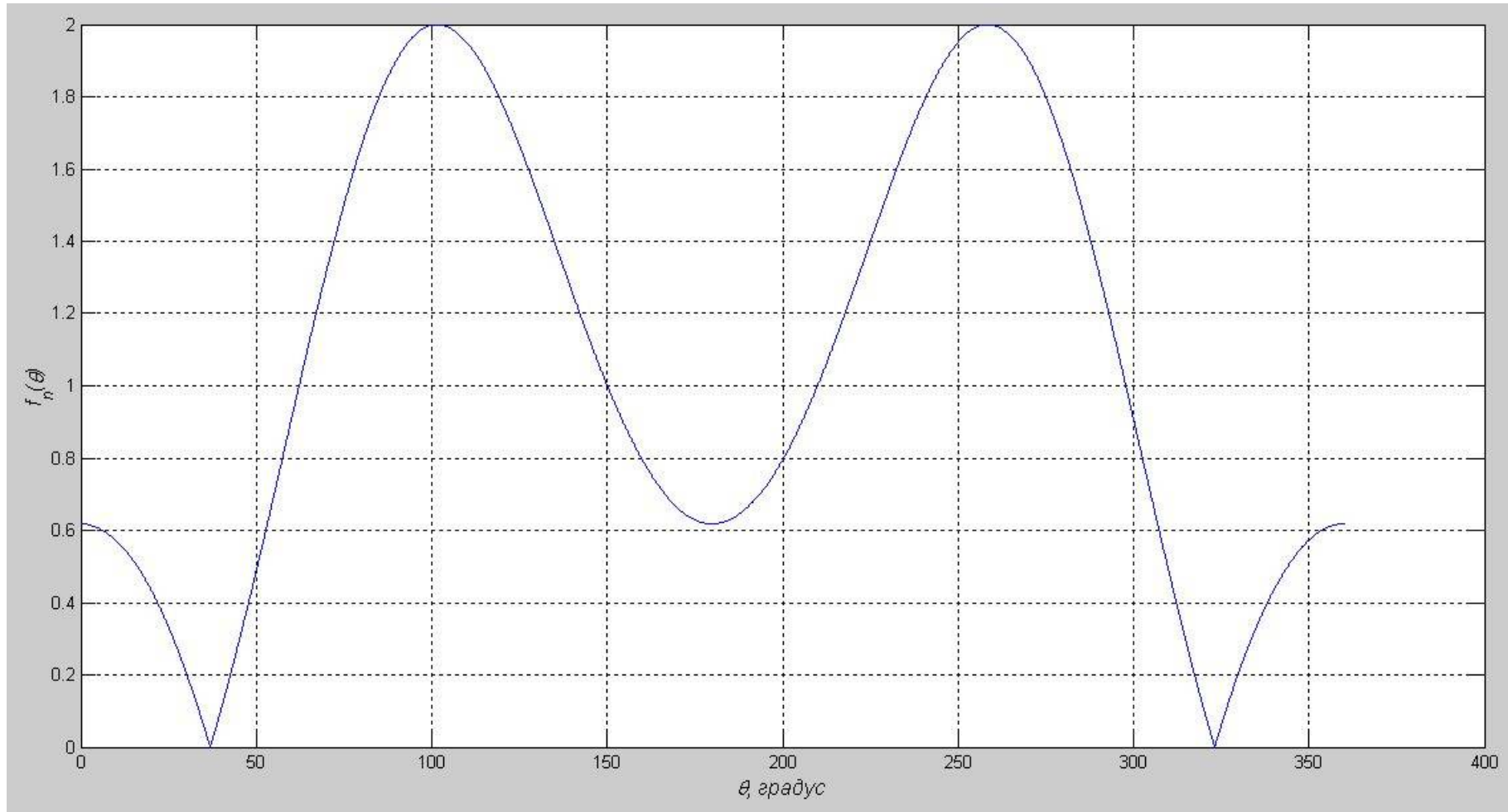
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,7\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



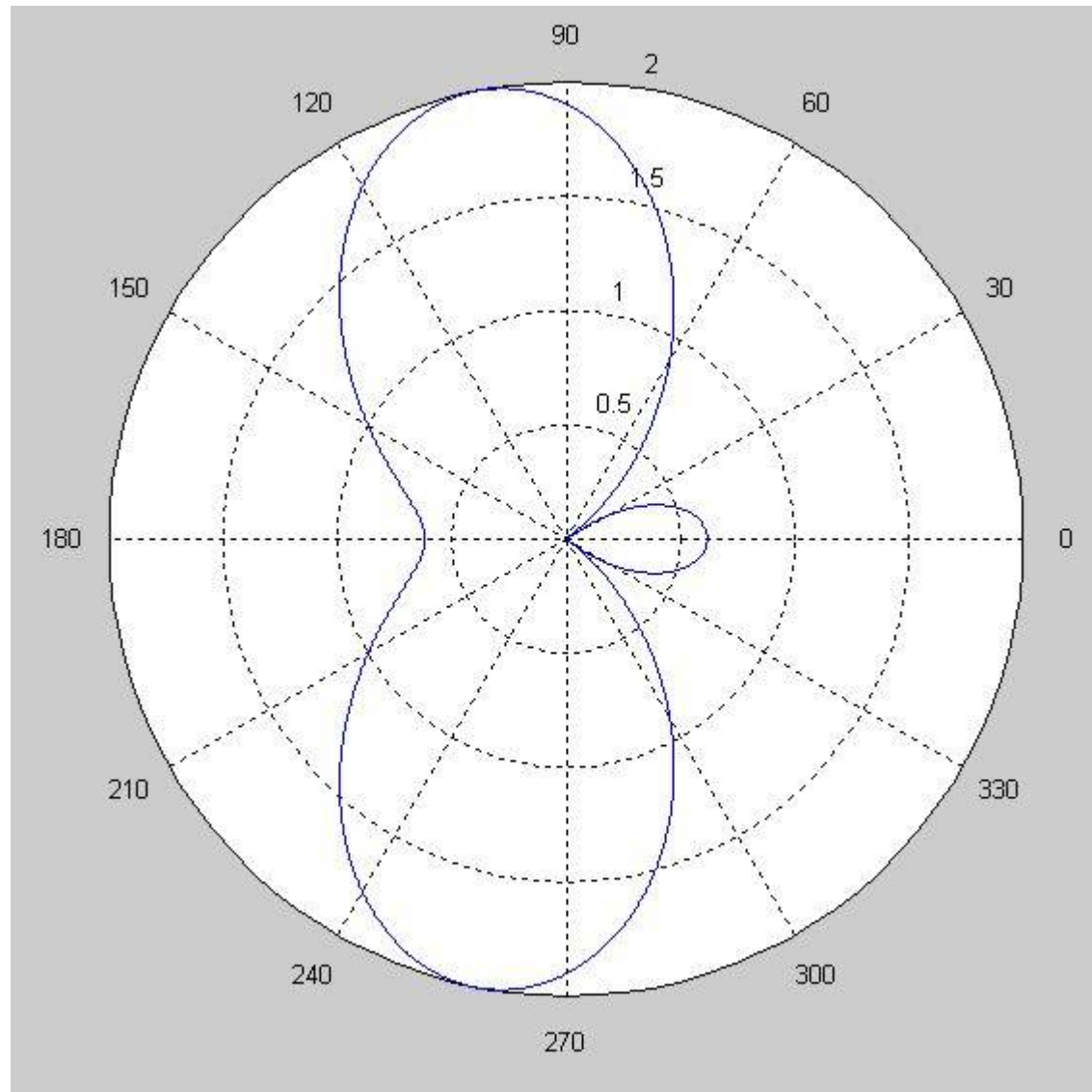
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,7\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



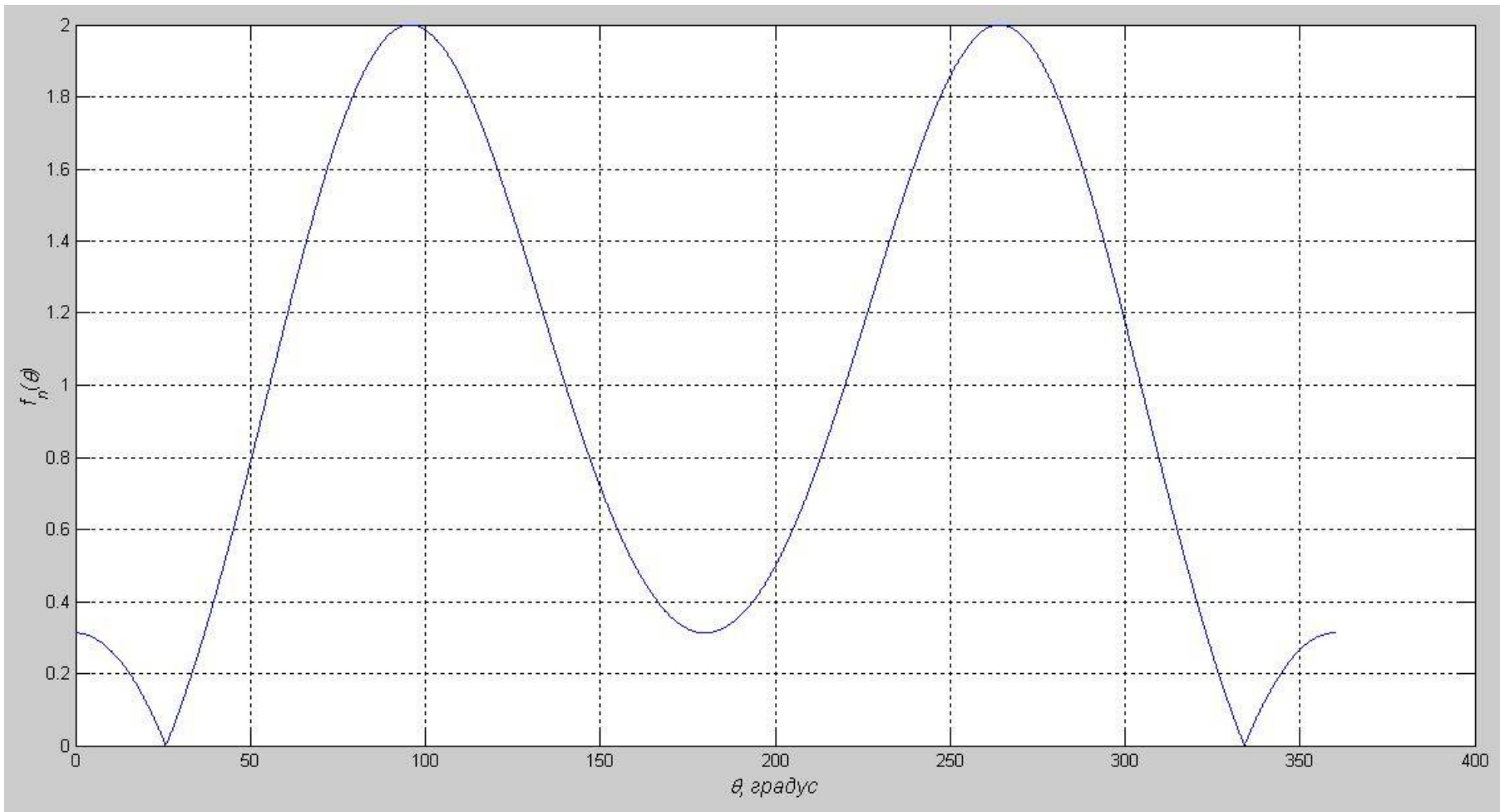
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,8\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



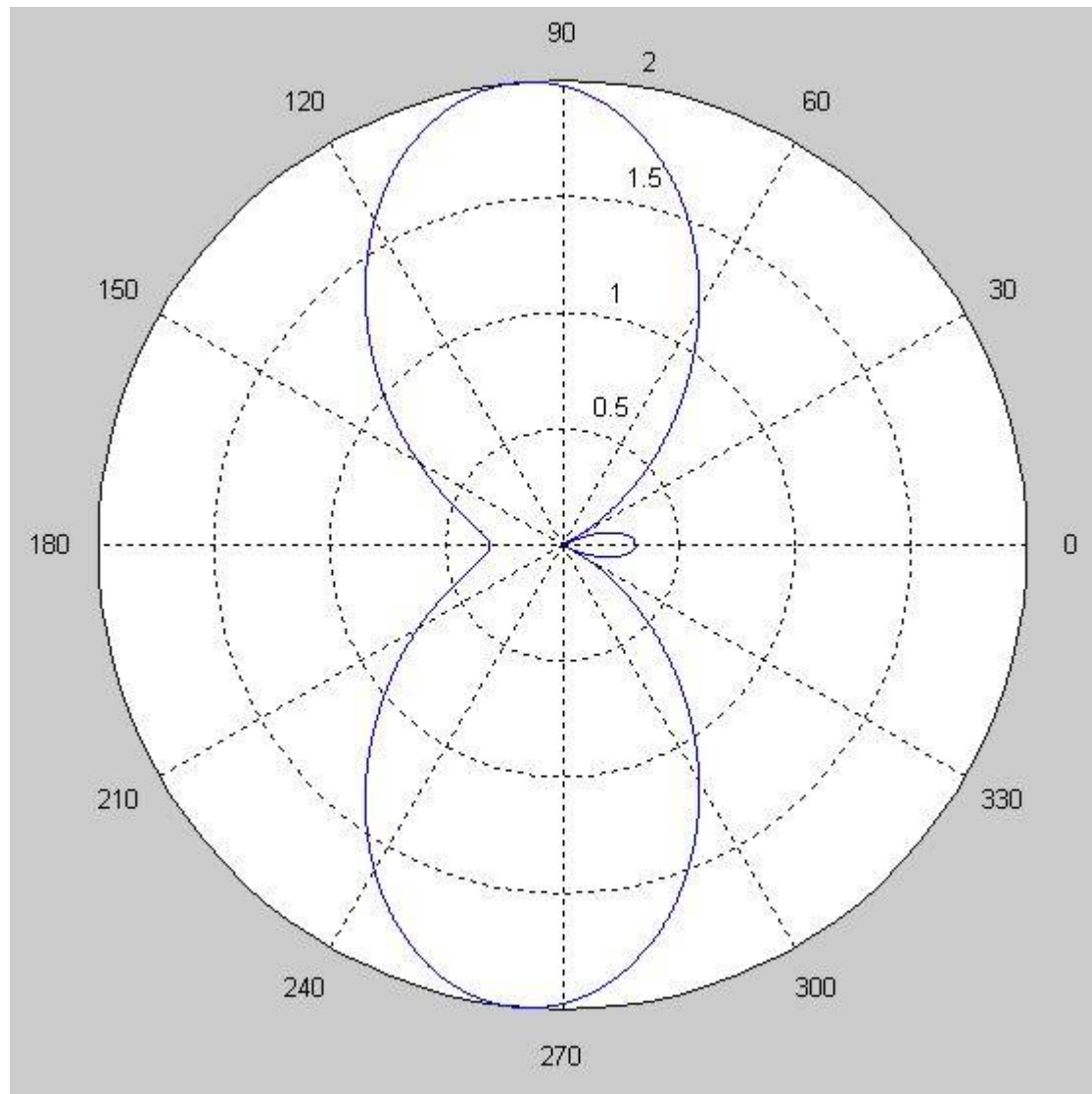
$$d = \lambda/2, \psi = 1,8\pi.$$

Два ізотропних випромінювача



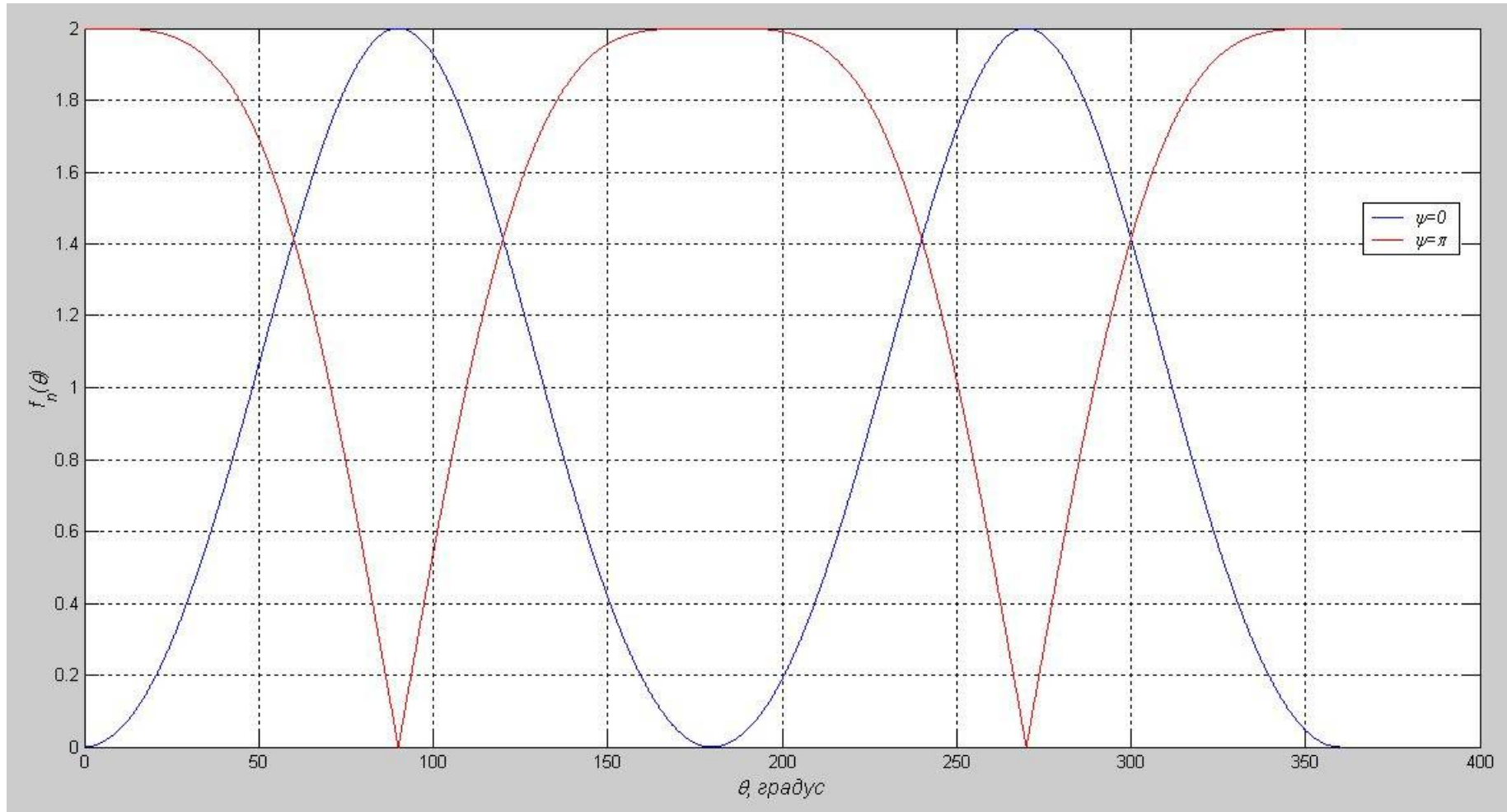
$$d = \lambda/2, \quad \psi = 1,9\pi.$$

Два ізотропних випромінювача

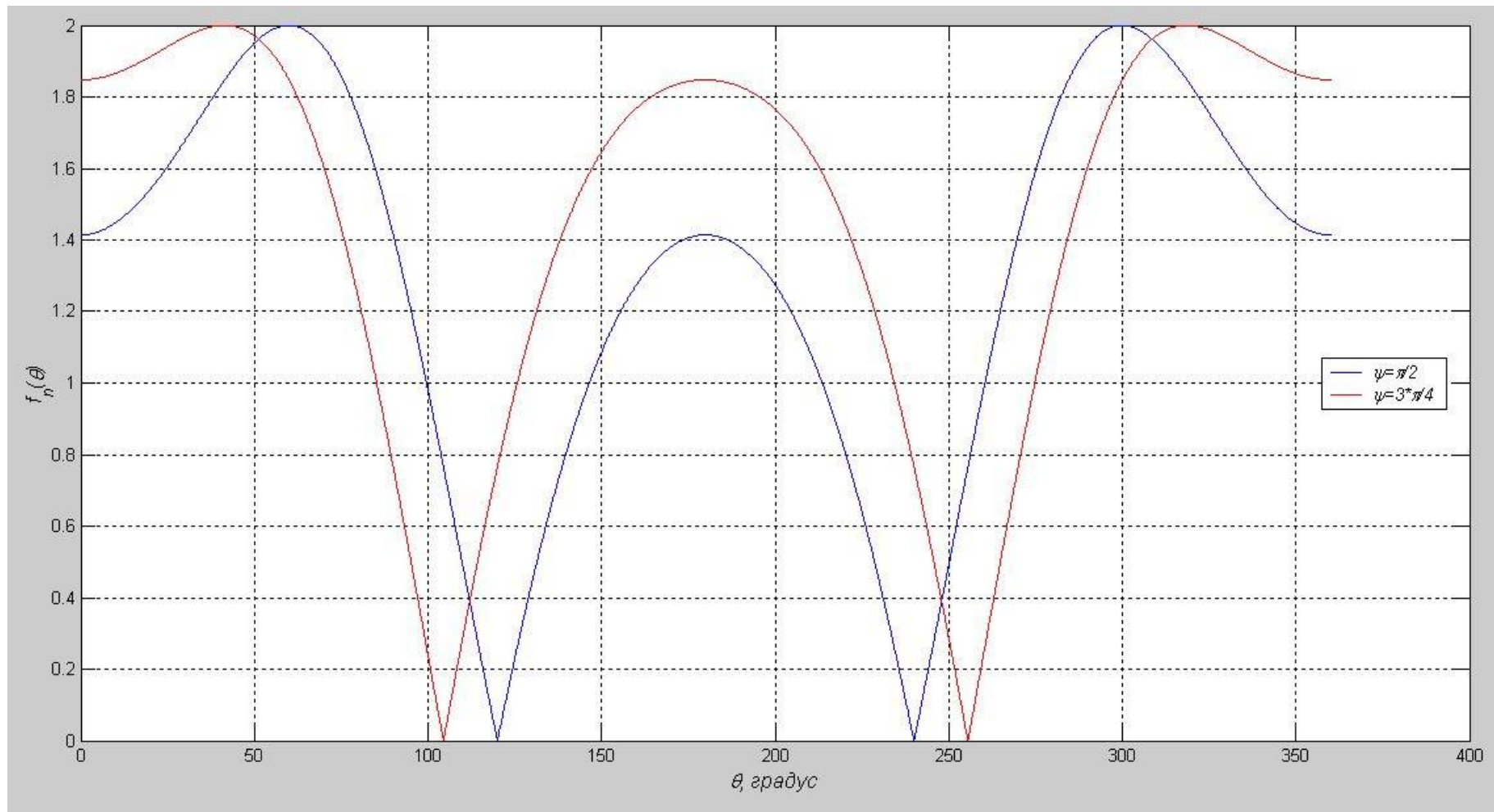


$$d = \lambda/2, \psi = 1,9\pi.$$

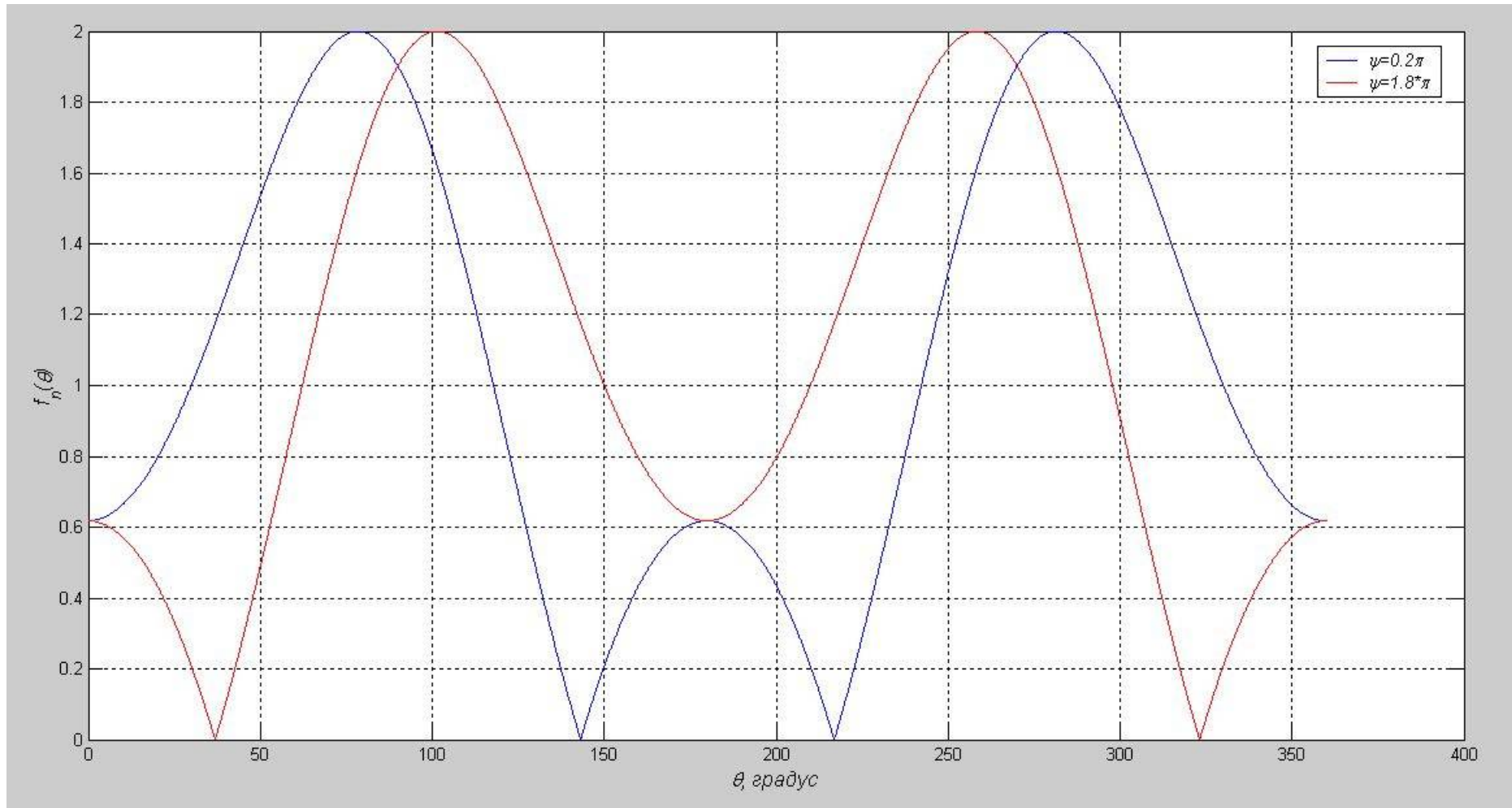
Два ізотропних випромінювача



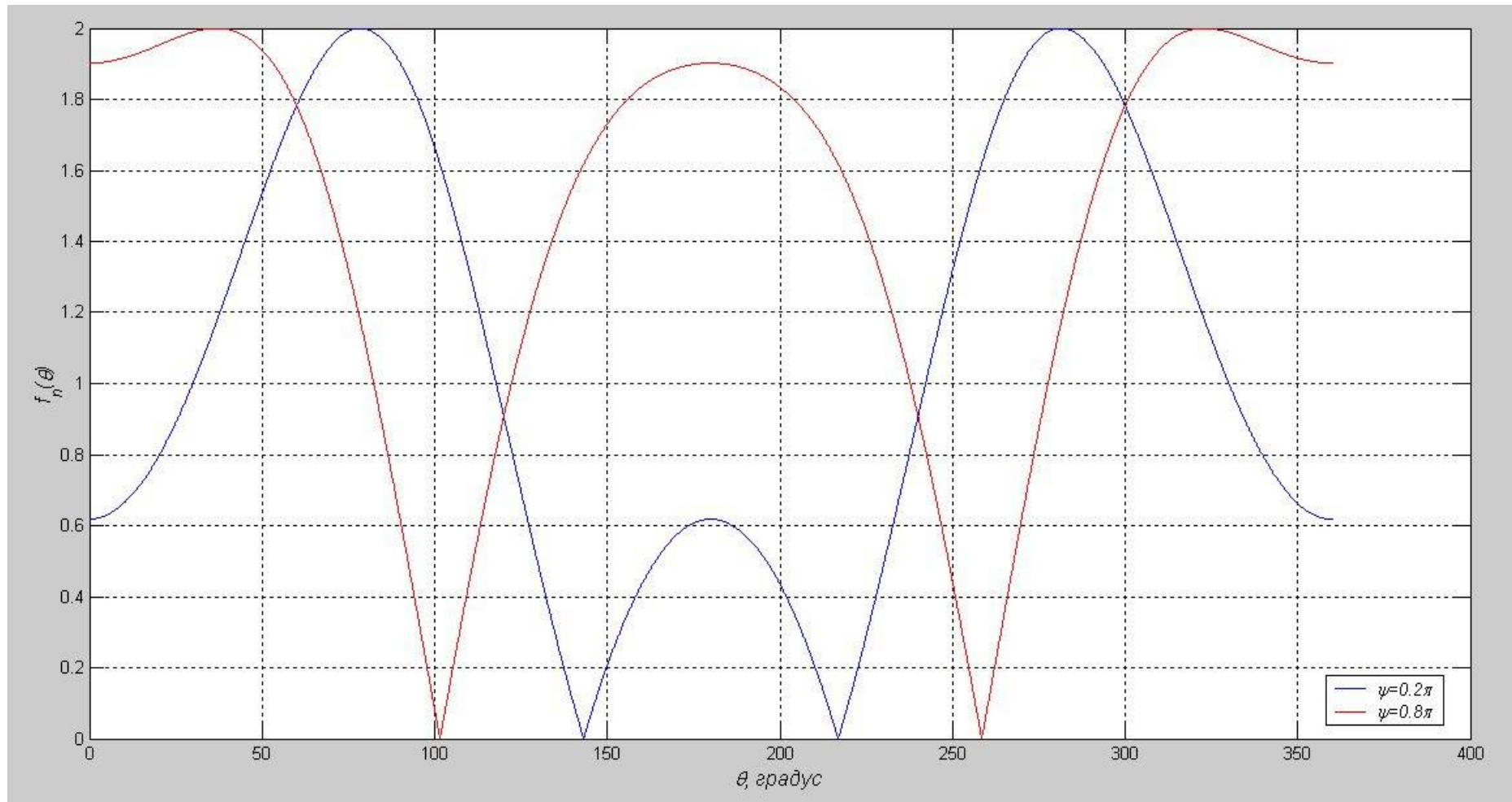
Два ізотропних випромінювача



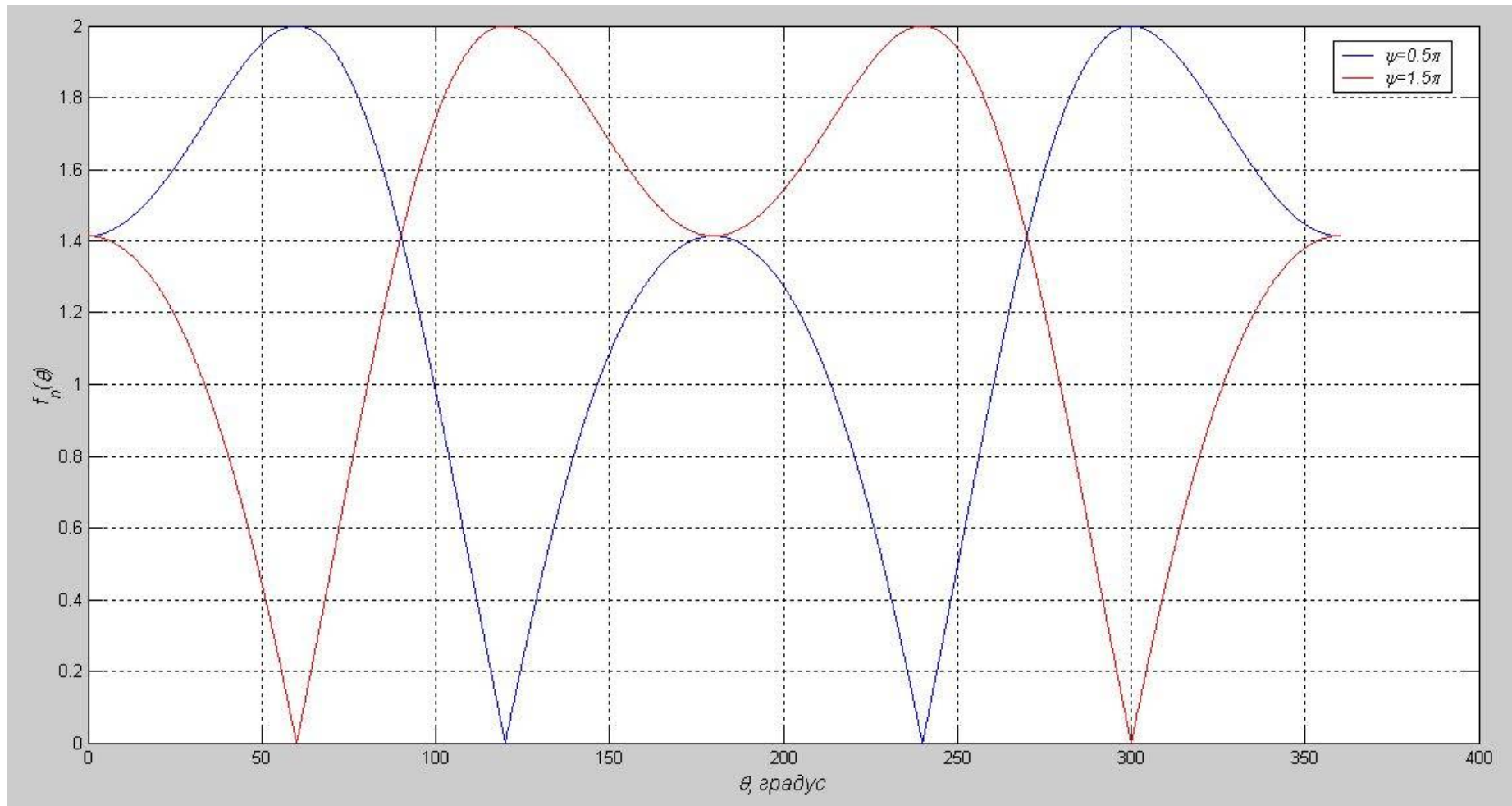
Два ізотропних випромінювача



Два ізотропних випромінювача

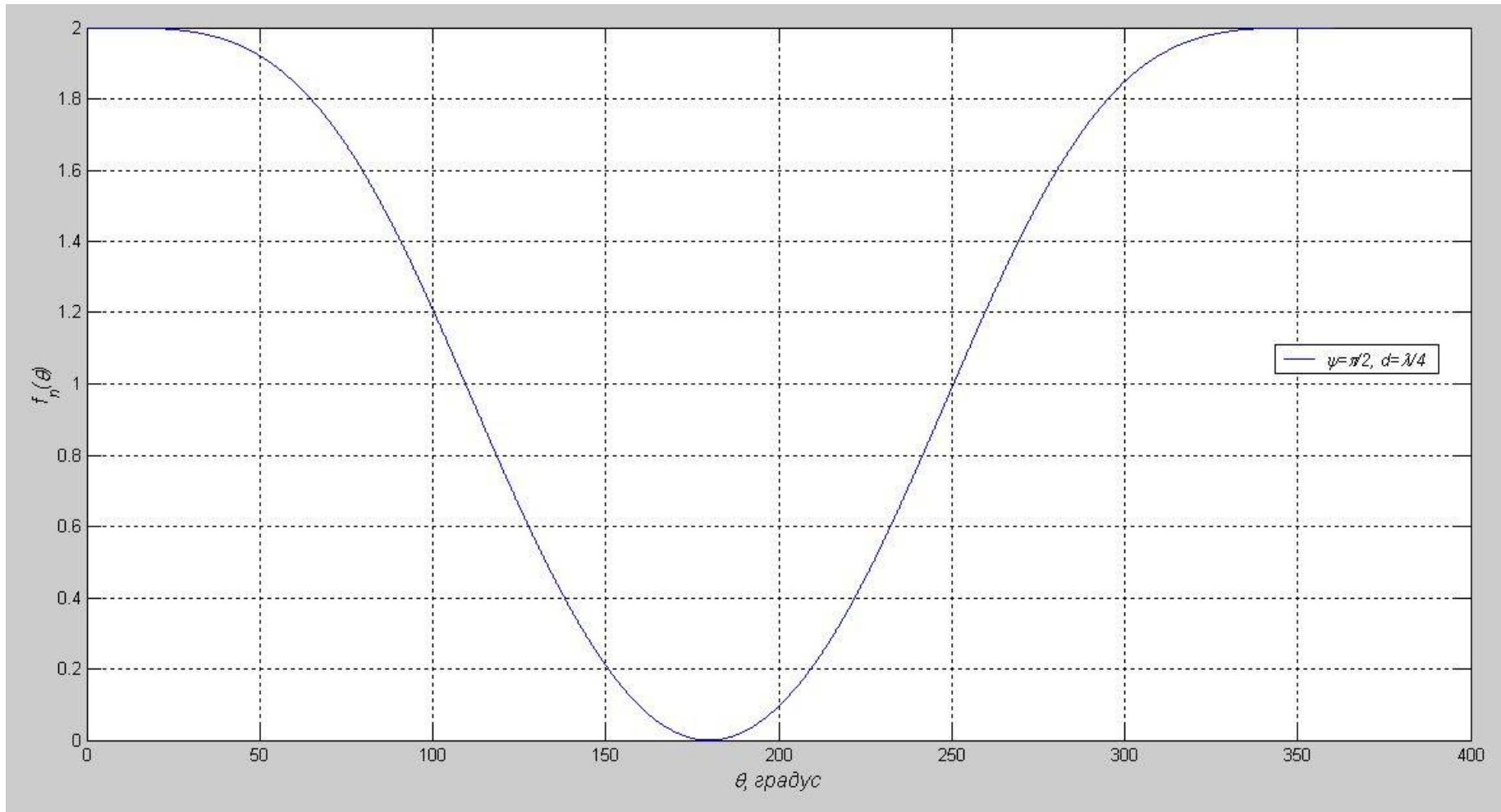


Два ізотропних випромінювача



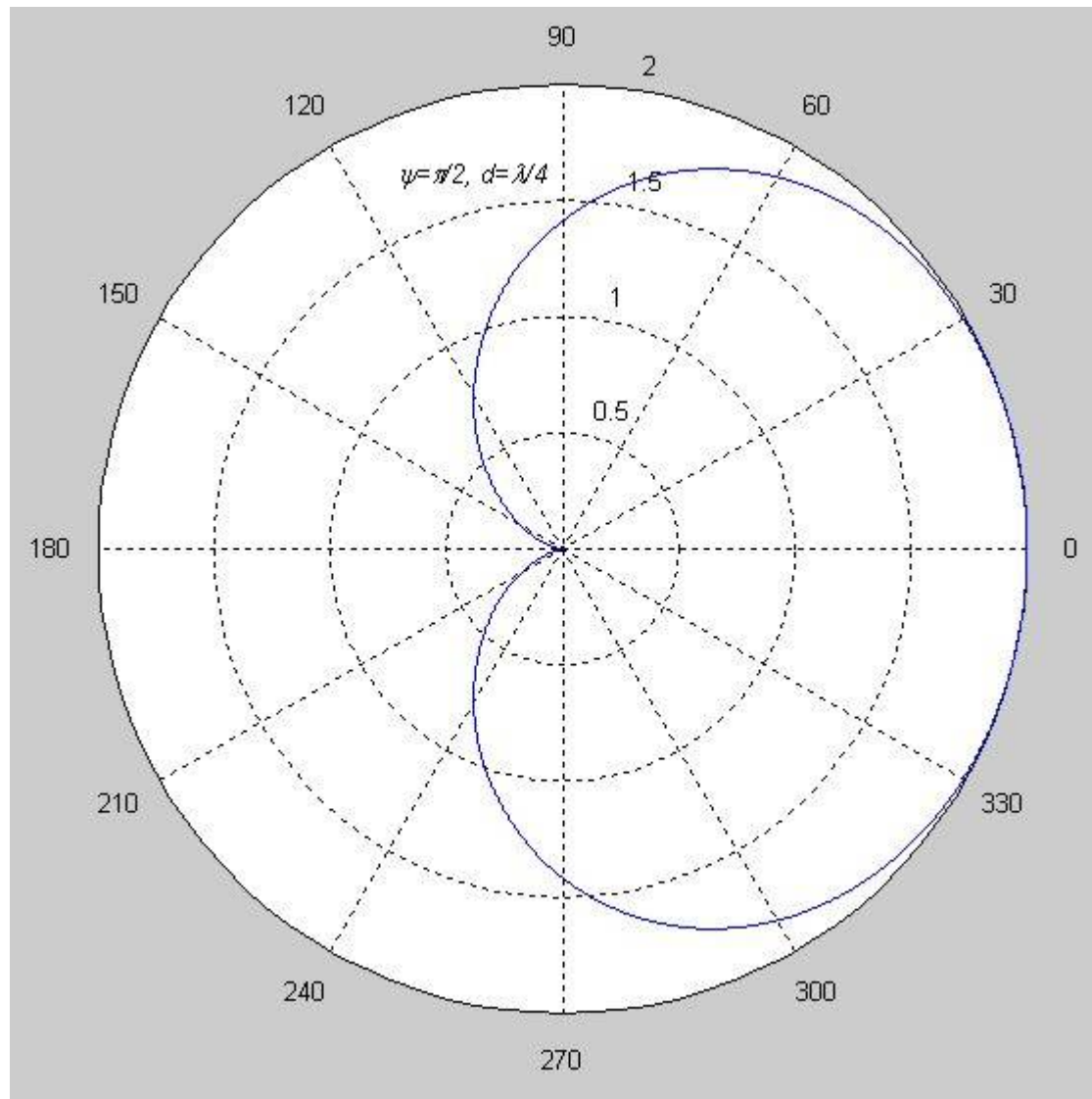
Два ізотропних випромінювача

Два ізотропних випромінювача



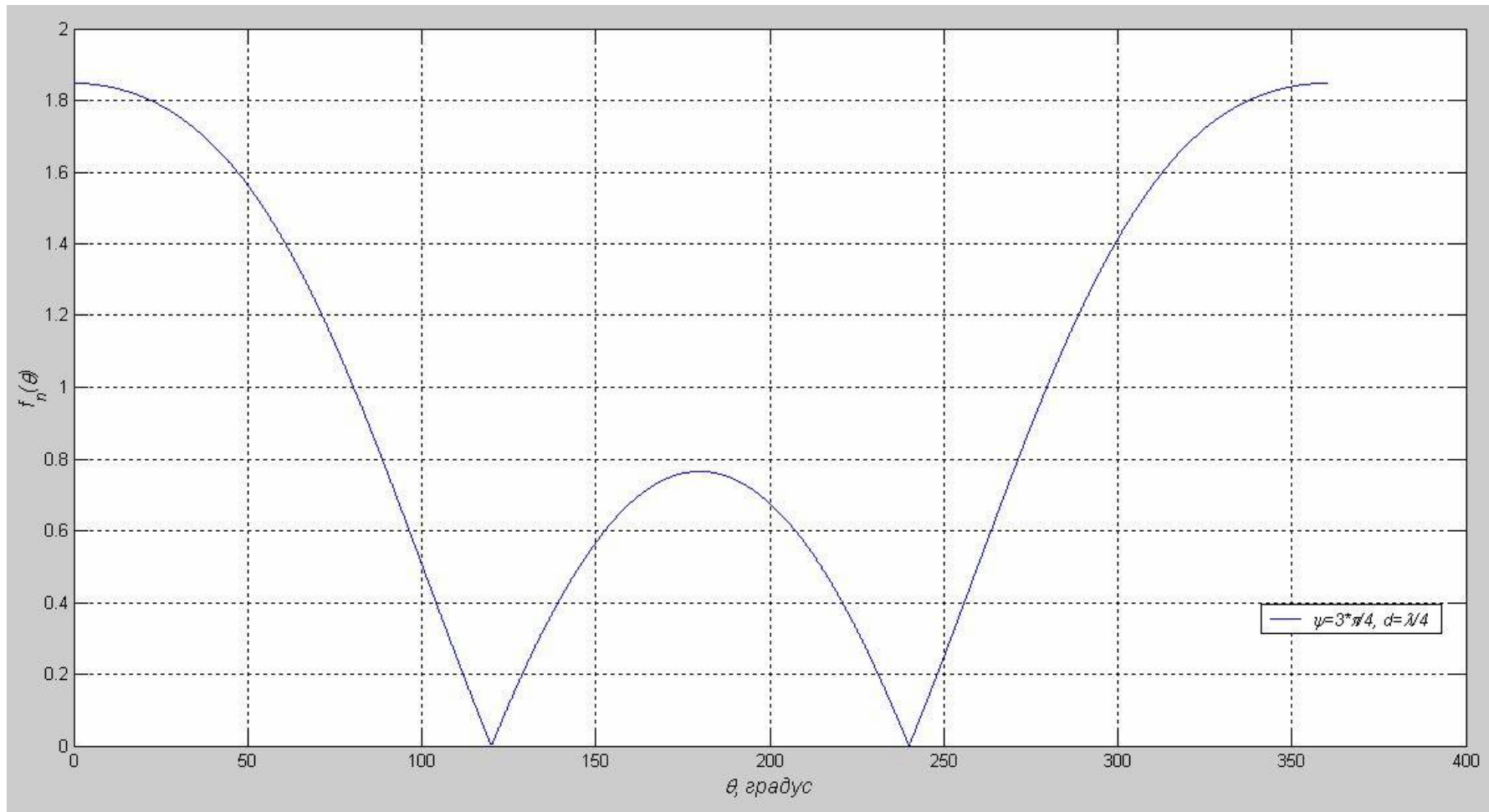
$$d = \lambda/4, \psi = \pi/2.$$

Два ізотропних випромінювача



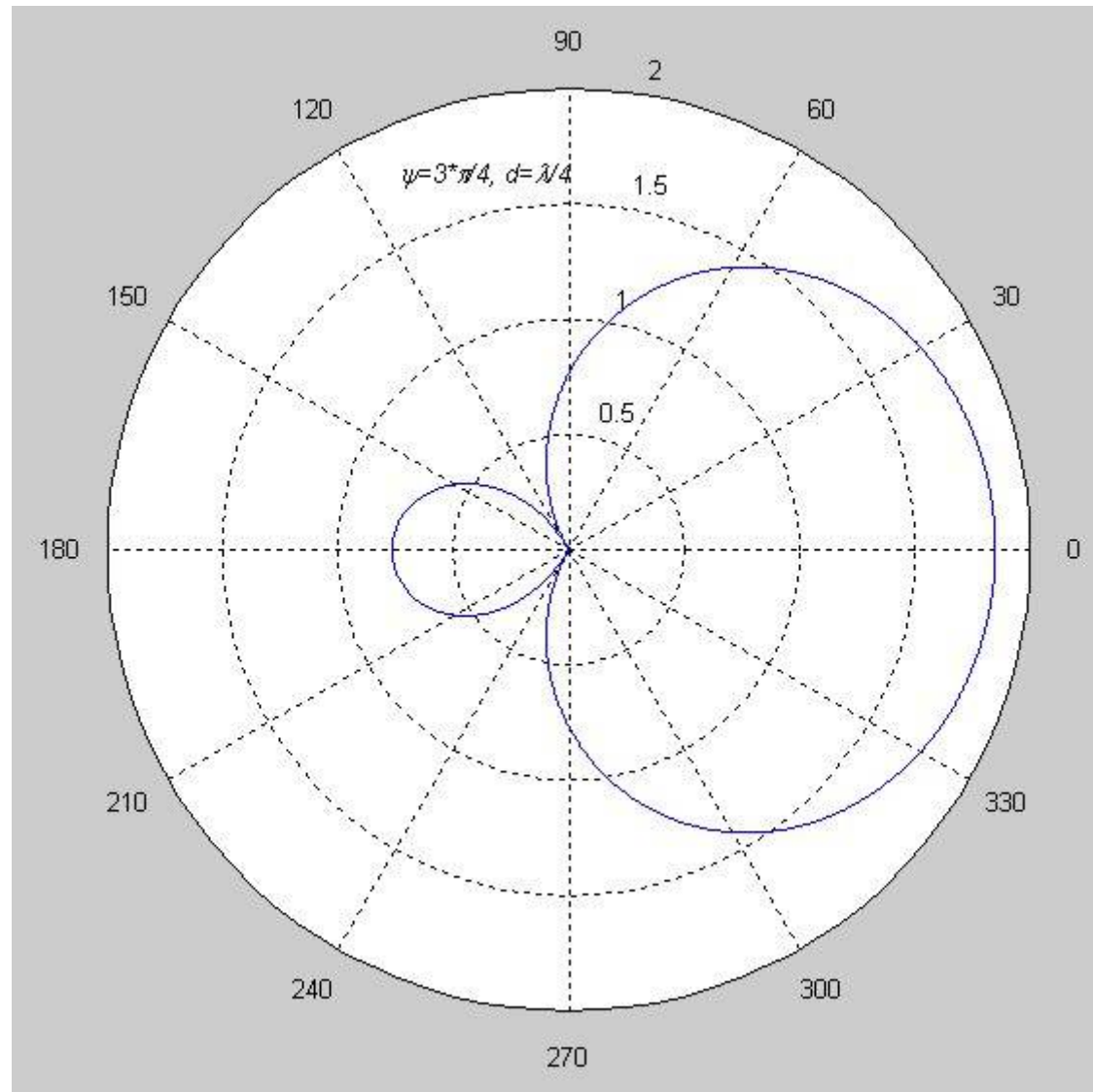
$$d = \lambda/4, \psi = \pi/2.$$

Два ізотропних випромінювача



$$d = \lambda/4, \psi = 3\pi/4$$

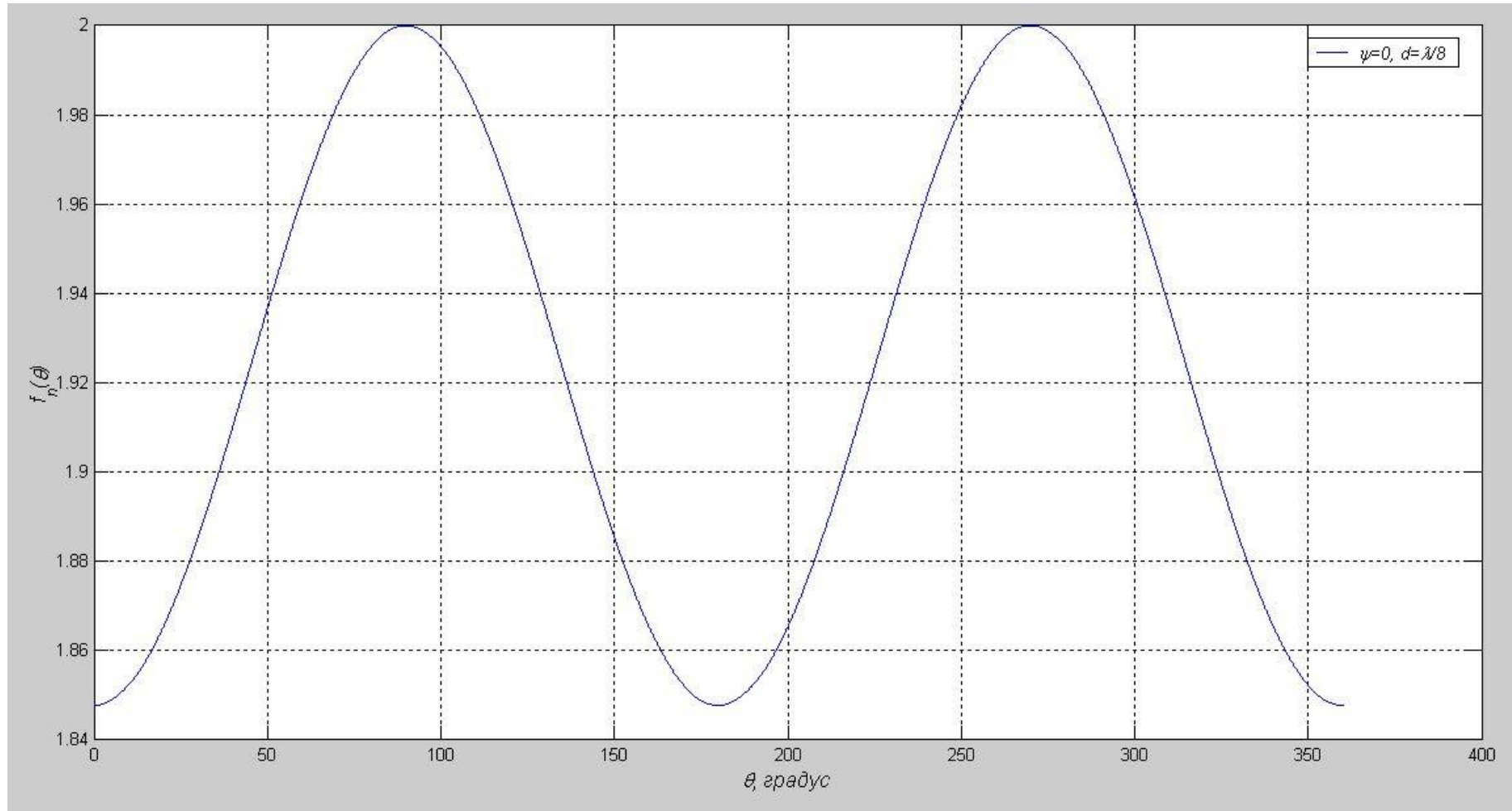
Два ізотропних випромінювача



$$d = \lambda/4, \psi = 3\pi/4$$

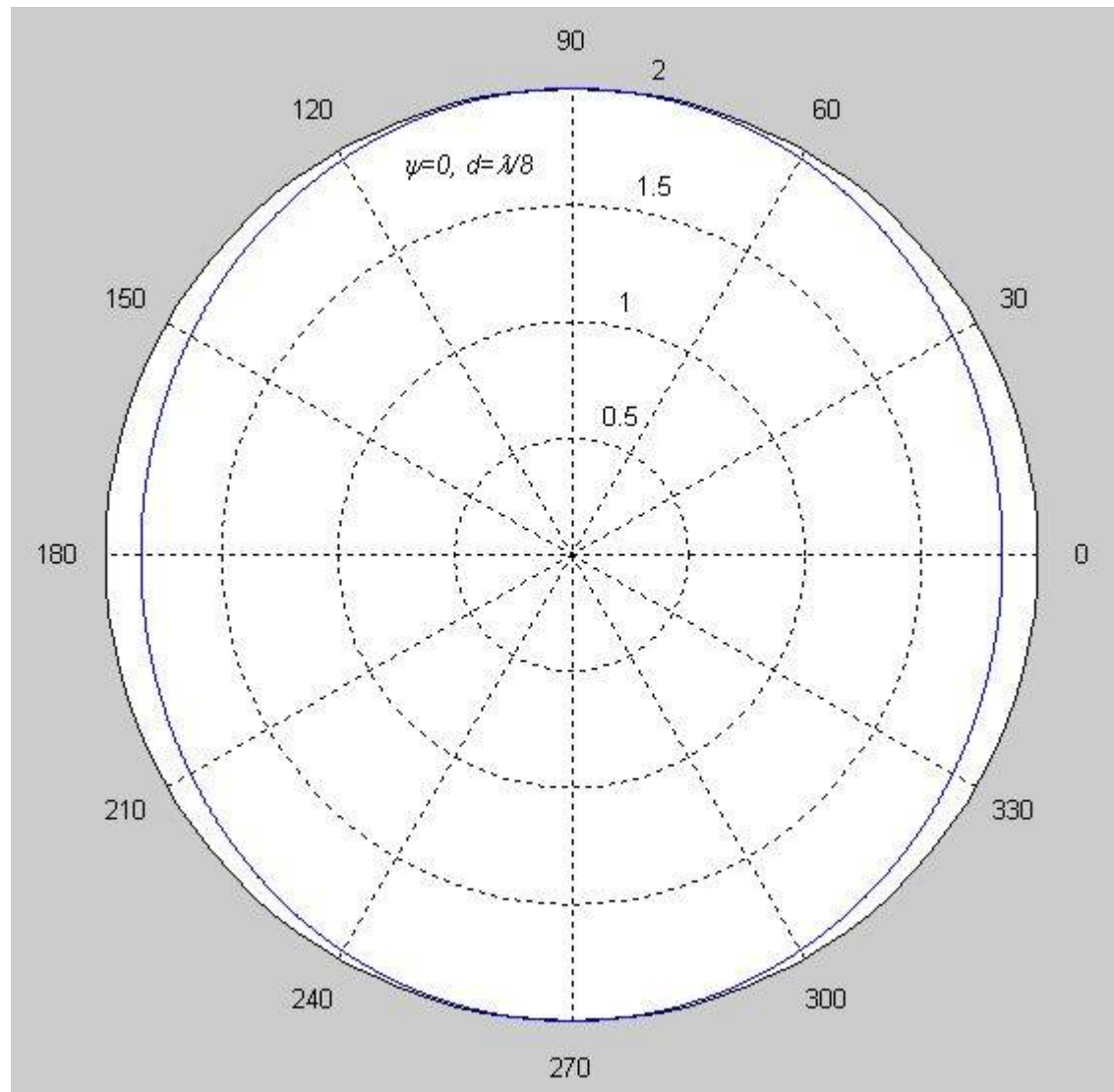
Два ізотропних випромінювача

Два ізотропних випромінювача



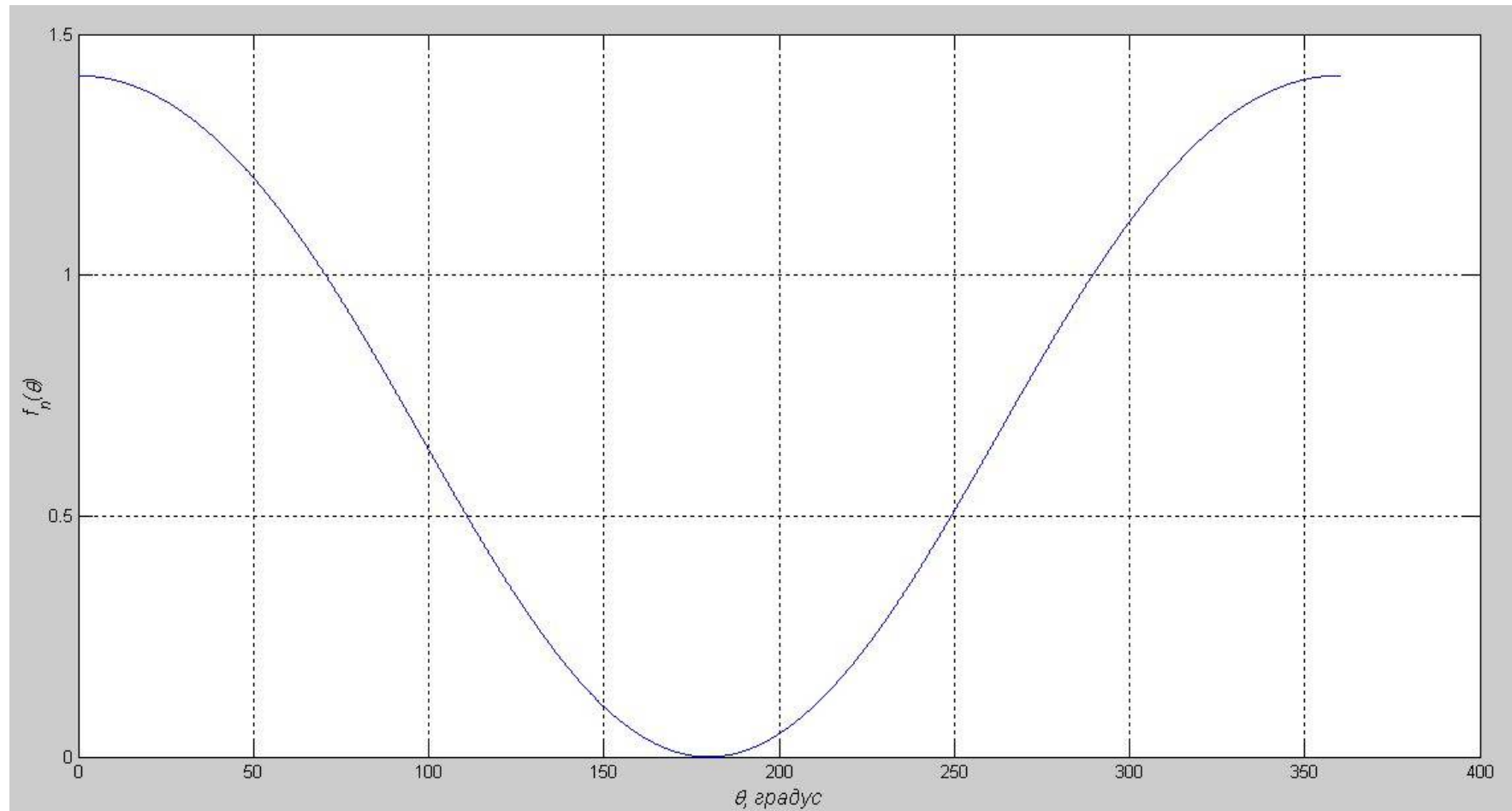
$$d = \lambda/8, \psi = 0$$

Два ізотропних випромінювача



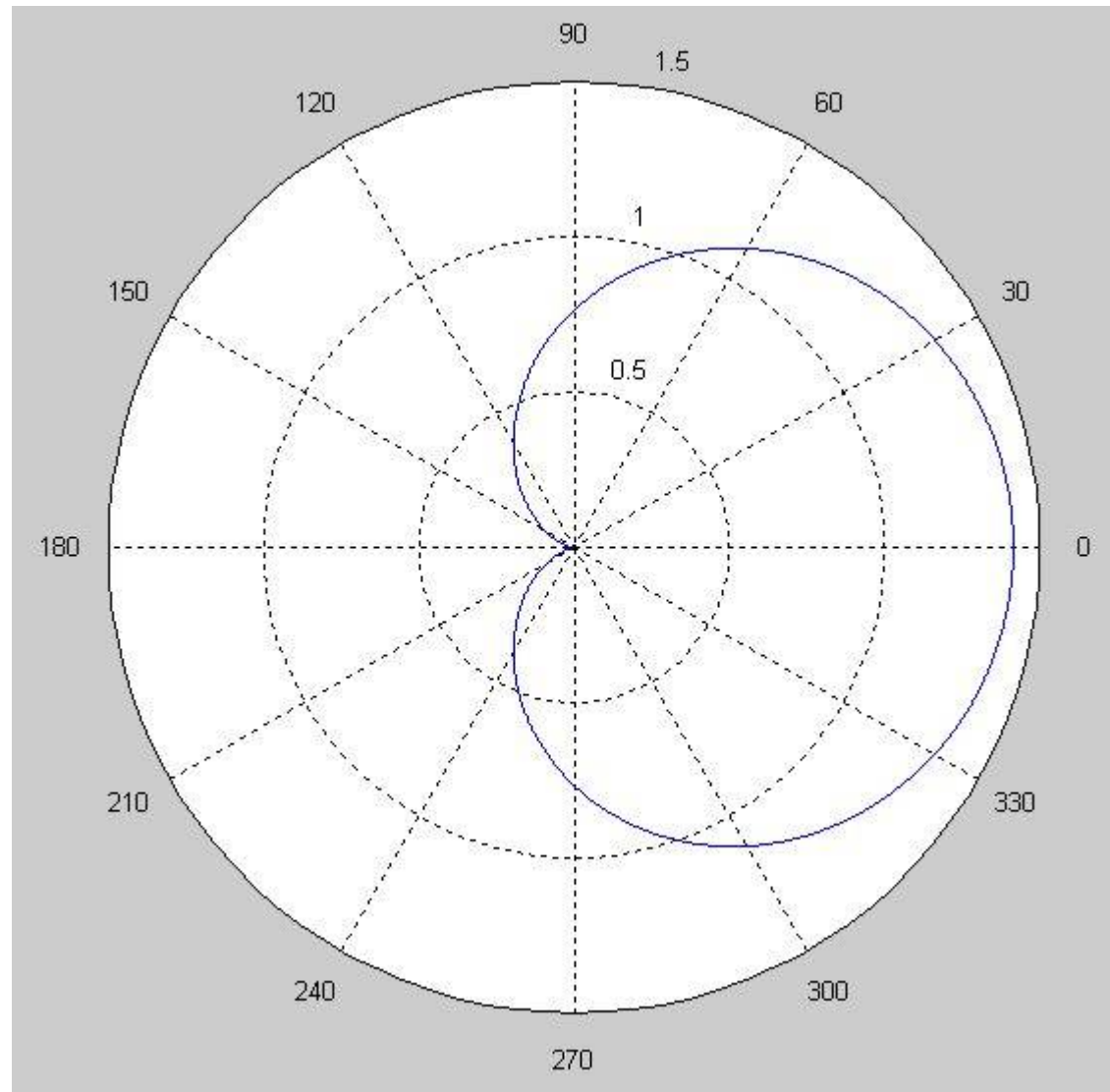
$$d = \lambda/8, \psi = 0$$

Два ізотропних випромінювача



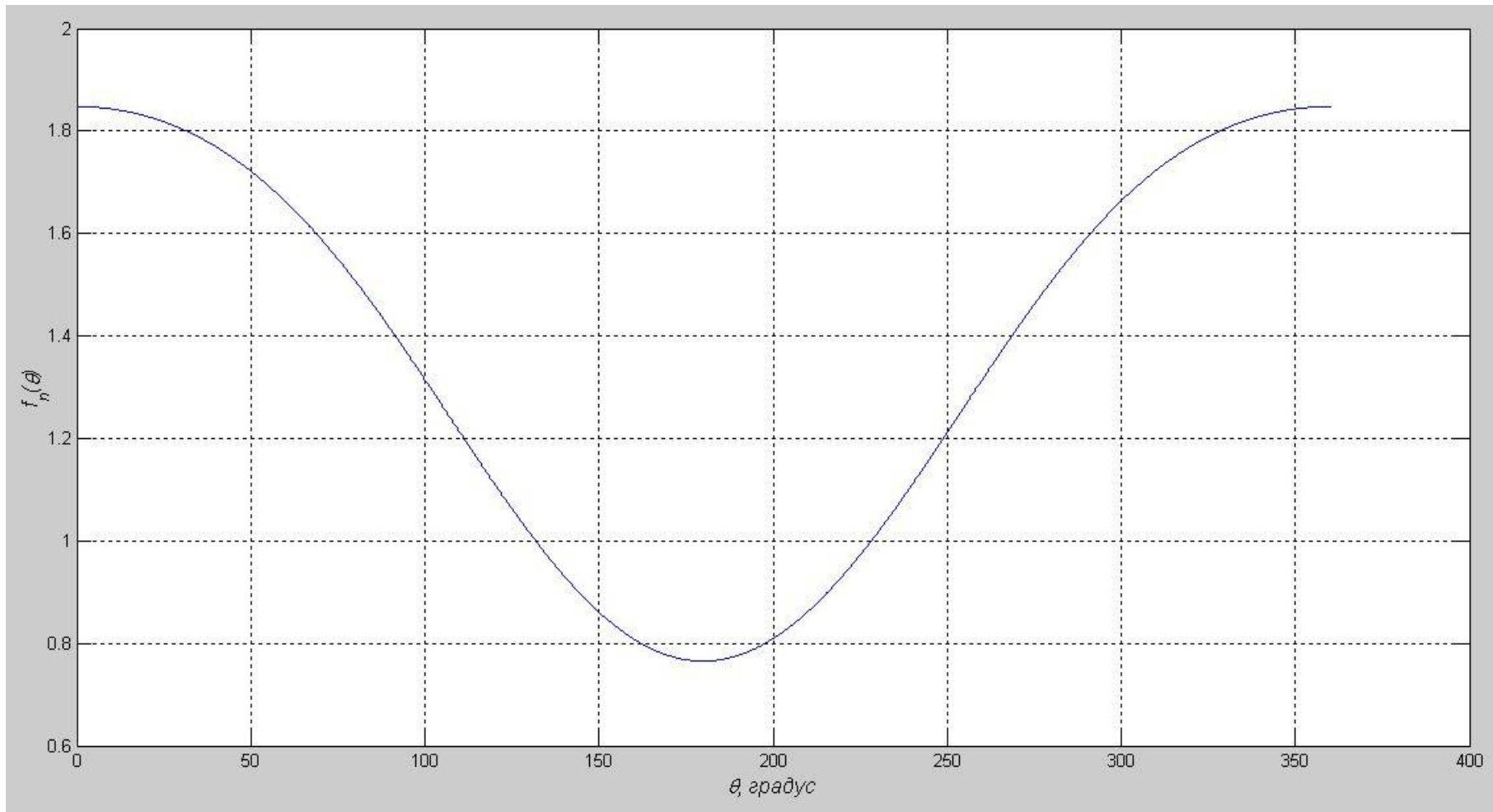
$$d = \lambda/8, \quad \psi = 3\pi/4$$

Два ізотропних випромінювача



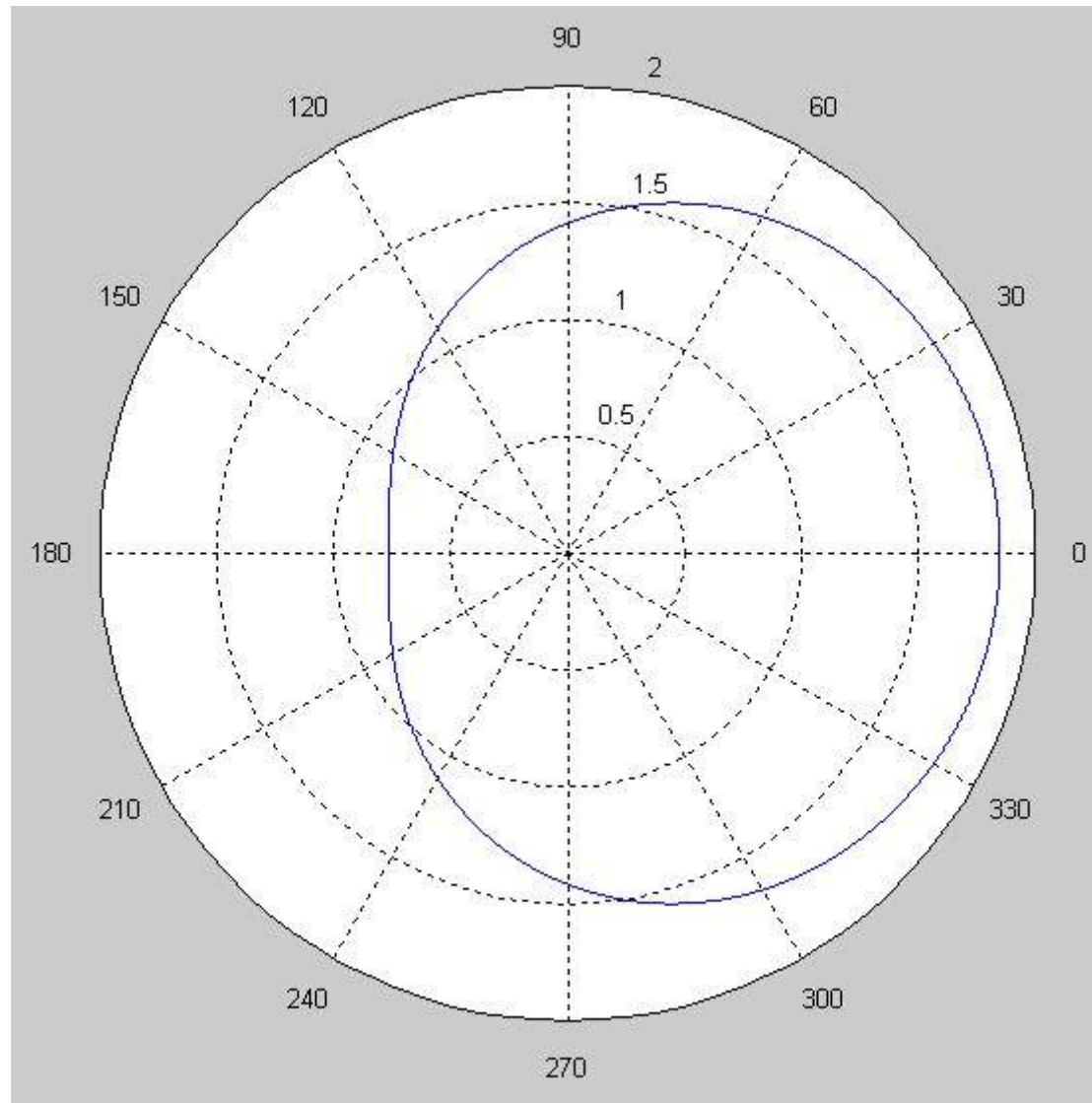
$$d = \lambda/8, \quad \psi = 3\pi/4$$

Два ізотропних випромінювача



$$d = \lambda/8, \quad \psi = \pi/2$$

Два ізотропних випромінювача



$$d = \lambda/8, \quad \psi = \pi/2$$