ПОТІК МІНІМАЛЬНОЇ ВАРТОСТІ

План викладу матеріалу:

1. Загальні положення.
2. Відшукання потоку мінімальної вартості.
3. Зв'язок задачі про потік мінімальної вартості з іншими задачами ДО.

Ключові терміни розділу

- *Потік мінімальної вартості*
- *Вартість потоку дугою*
- *Максимальний потік мінімальної вартості*
- *Розподільна мережа*
- *Сумарна вартість потоку*
- *Модифікація визначення залишкової мережі*

1. Загальні положення

Задача максимізації потоку може мати декілька рішень. Ця обставина дає право поставити запитання, чи можна ввести *додаткові* критерії з метою вибору одного з цих рішень? Можливо, з тих чи інших причин перевагу необхідно надати рішенню, яке використовує найменше число дуг, чи рішенню, що передбачає побудову найкоротших шляхів тощо.

Ці задачі складніші, ніж стандартна задача про максимальний потік, і відомі у літературі як задачі про *потік мінімальної вартості* (*mincost flow problem*).

Як і у випадку задачі про максимальний потік, існують різні еквівалентні способи постановки задачі про потік мінімальної вартості (*моделі*). Найчастіше у літературі описують модель *максимального потоку з мінімальною вартістю* (*mincost-maxflow model*) і модель *розподільної мережі* (*distribution network*).

Модель *максимального потоку з мінімальною вартістю* базується на *st*-мережі, в якій кожній дузі (i, j) з пропускною здатністю b_{ij} відповідає невід'ємна *вартість дуги* c_{ij} проходження *одиниці потоку* цією дугою.

Вартість потоку дугою (i, j) дорівнює добуткові $c_{ij} \cdot x_{ij}$, де x_{ij} – величина потоку цією дугою. *Сумарна вартість потоку* (чи просто *вартість потоку*) дорівнює сумі вартостей потоку кожною дугою. Необхідно знайти такий *максимальний потік*, вартість якого є *найменшою* порівняно з вартостями інших максимальних потоків.

Модель *розподільної мережі* використовують, здебільшого, під час розгляду систем, що здійснюють розподіл товарів. Вершини орграфа, що відповідають складам, мають додатні ваги (*запаси* товарів). Вершини, що відповідають роздрібним торговим точкам, мають від'ємні ваги (*потреби* товарів). Пропускні здатності дуг відповідають кількості та вантажопідйомності автомобілів, що курсують на відповідних маршрутах. Природною інтерпретацією вартості дуги може слугувати вартість перевезення одиниці товару відповідним маршрутом.

Нагадаємо, що потік є допустимим, якщо різниця між величиною потоку, що надходить у кожну вершину, і величиною потоку, що з неї витікає, дорівнює вазі цієї вершини. Задача полягає у тому, щоб у *розподільній мережі* відшукати *допустимий потік мінімальної вартості*.

Очевидно, що задача про максимальний потік мінімальної вартості і задача про допустимий потік мінімальної вартості у розподільній мережі *еквівалентні*. Це безпосередньо випливає із задачі 4 параграфа 6 (вартості дуг, які виходять з фіктивної вершини s чи входять у фіктивну вершину t, вважають рівними нулю). Як наслідок цієї еквівалентності термін *задача про потік мінімальної вартості* вживають для позначення обох задач.

2. Відшукання потоку мінімальної вартості

Для відшукання потоку мінімальної вартості передусім розширюють визначення *залишкових мереж* з тим, щоб відобразити вартості дуг, а саме: зворотним дугам приписують відповідні від'ємні вартості, а вартості прямих дуг не змінюють.

Теорема 1. Максимальний потік має мінімальну вартість тоді і тільки тоді, коли його залишкова мережа не містить орієнтованого циклу сумарної від'ємної вартості.

➢ *Необхідність* (від супротивного). Дано максимальний потік мінімальної вартості. Припустимо, що залишкова мережа цього потоку містить цикл сумарної від'ємної вартості c, а Δ – величина мінімальної пропускної здатності дуг цього циклу.

Змінимо потік, додаючи Δ до величини потоку в дугах, які відповідають дугам циклу з додатною вартістю в залишковій мережі (прямі дуги), і віднімаючи Δ від величини потоку в дугах, які відповідають дугам циклу з від'ємною вартістю в залишковій мережі (зворотні дуги). Ці зміни не роблять впливу на різницю між величиною потоку, що надходить у кожну вершину, і величиною потоку, що з неї витікає. Однак ці зміни спричинюють *зменшення вартості потоку* на величину $c \cdot \Delta$, оскільки $c \cdot \Delta < 0$. Отримали *суперечність* (за припущенням маємо потік мінімальної вартості).

Достатність (від супротивного). Нехай існує максимальний потік *без циклів сумарної від'ємної вартості*, вартість F якого не є мінімальною. Розглянемо будь-який максимальний потік з мінімальною вартістю M. Для перетворення F у M необхідно *зменшувати* вартість потоку за рахунок зміни величини потоку дуг деякого орієнтованого циклу. Однак цього не можна зробити, оскільки немає циклів сумарної від'ємної вартості (протиріччя з умовою $F > M$). ∢

Теорема 1 дає змогу сформулювати простий узагальнений алгоритм відшукання потоку мінімальної вартості (*алгоритм викреслювання циклів*):

Крок 0. Знайти максимальний потік.

Крок 1. У залишковій мережі знайти довільний орієнтований цикл сумарної від'ємної вартості. Якщо такого циклу не існує, то перейти на крок 3.

Крок 2. Змінити потік, додаючи Δ до величини потоку в дугах, які відповідають дугам циклу з додатною вартістю в залишковій мережі (прямі дуги), і віднімаючи Δ від величини потоку в дугах, які відповідають дугам циклу з від'ємною вартістю в залишковій мережі (зворотні дуги). Перейти на крок 1.

Крок 3. Користуючись останньою залишковою мережею, побудувати орграф, що містить максимальний потік мінімальної вартості. Завершити алгоритм.

Узагальнений алгоритм викреслювання циклів допускає декілька різних реалізацій, оскільки методи відшукання початкового максимального потоку і відшукання циклів сумарної від'ємної вартості не описано.

Приклад 1. Знайти потік мінімальної вартості в орграфі на рис. 1, використовуючи узагальнений алгоритм викреслювання циклів. Вартості дуг зображено в округлих дужках.

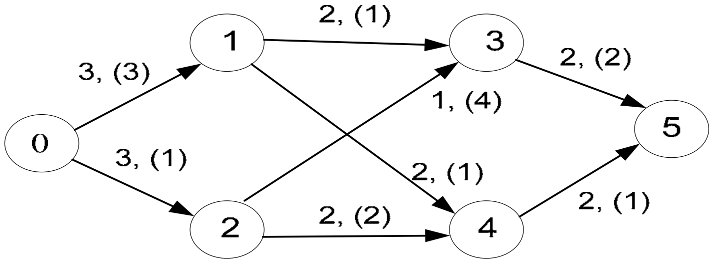

Рис. 1. Орграф задачі про потік мінімальної вартості

➢ Знайдемо максимальний потік в орграфі, використовуючи залишкові мережі. Завершальну залишкову мережу максимального потоку сумарної величини 4 та вартості 22 зображено на рис. 2, а відповідний орграф з максимальним потоком – на рис. 3.

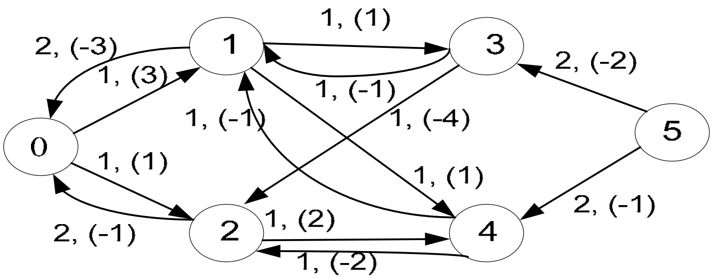

Рис. 2. Залишкова мережа максимального потоку вартості 22

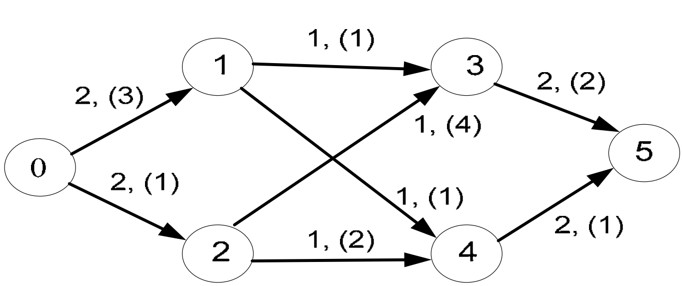

Рис. 3. Орграф з максимальним потоком вартості 22

У залишковій мережі на рис. .2 існують такі орієнтовані цикли сумарної від'ємної вартості:

$$4 \xrightarrow[1,(-1)]{} 1 \xrightarrow[2,(-3)]{} 0 \xrightarrow[1,(1)]{} 2 \xrightarrow[1,(2)]{} 4;$$

$$3 \xrightarrow[1,(-4)]{} 2 \xrightarrow[2,(-1)]{} 0 \xrightarrow[1,(3)]{} 1 \xrightarrow[1,(1)]{} 3;$$

$$3 \xrightarrow[1,\,(-4)]{} 2 \xrightarrow[1,\,(2)]{} 4 \xrightarrow[1,\,(-1)]{} 1 \xrightarrow[1,\,(1)]{} 3.$$

Обираємо цикл $4 \xrightarrow[1,(-1)]{} 1 \xrightarrow[2,(-3)]{} 0 \xrightarrow[1,(1)]{} 2 \xrightarrow[1,(2)]{} 4$, дуги якого мають мінімальну пропускну здатність $\Delta = 1$. Змінимо потік на рис. 3, додаючи $\Delta = 1$ до величини потоку в дугах (0, 2) і (2, 4), і віднімаючи $\Delta = 1$ від величини потоку в дугах (0, 1) і (1, 4).

Орграф максимального потоку сумарної величини 4 та вартості 21 зображено на рис. 4, а відповідну залишкову мережу – на рис. 5.

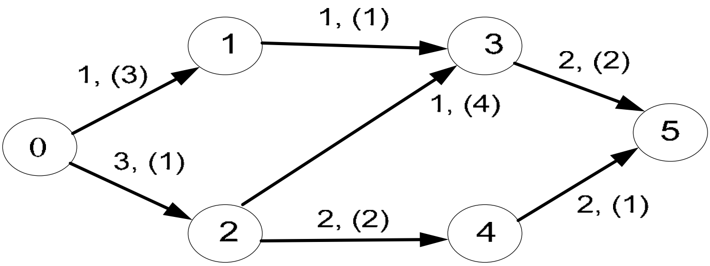

Рис. 4. Орграф з максимальним потоком вартості 21

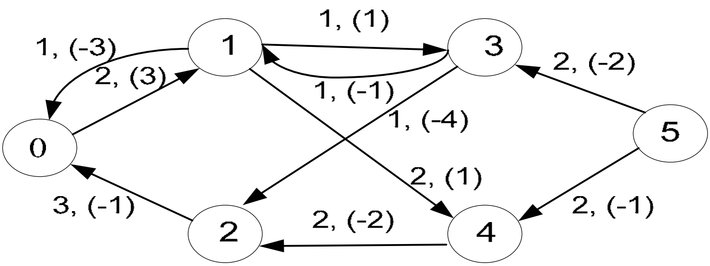

Рис. 5. Залишкова мережа максимального потоку вартості 21

У залишковій мережі на рис. 5 існує орієнтований цикл сумарної від’ємної вартості $3 \xrightarrow[1,(-4)]{} 2 \xrightarrow[3,(-1)]{} 0 \xrightarrow[2,(3)]{} 1 \xrightarrow[1,(1)]{} 3$, дуги якого мають мінімальну пропускну здатність $\Delta = 1$. Змінимо потік на рис. 4, додаючи $\Delta = 1$ до величини потоку в дугах (0, 1) і (1, 3), і віднімаючи $\Delta = 1$ від величини потоку в дугах (0, 2) і (2, 3).

Орграф максимального потоку сумарної величини 4 і вартості 20 зображено на рис. 6, а відповідну залишкову мережу – на рис. 7.

У залишковій мережі на рис. 7 орієнтованого циклу сумарної від’ємної вартості не існує. Отож, орграф на рис. 6 зображає *максимальний потік* сумарної величини 4 і *мінімальної вартості* 20.

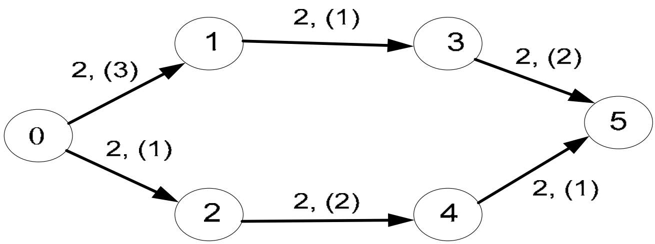

Рис. 6. Орграф з максимальним потоком вартості 20

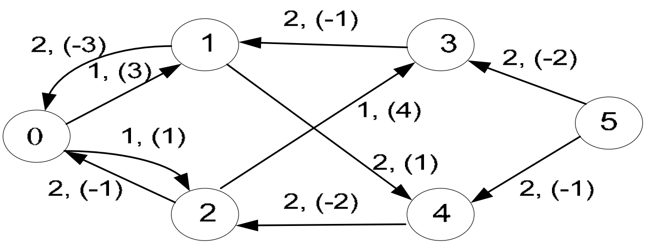

Рис. 7. Залишкова мережа максимального потоку вартості 20 ≺

Під час розв’язування прикладу ми для більшої наочності водночас використовували орграфи та відповідні залишкові мережі. Однак можна так переформулювати алгоритм *викреслювання циклів*, щоб використовувати тільки залишкові мережі (самостійно).

3. Зведення узагальненої транспортної задачі до задачі про потік мінімальної вартості

У четвертому розділі першої частини цього підручника ми розглядали постановку та розв’язання стандартної *транспортної задачі* (ТЗ). В *узагальненій ТЗ*, окрім пунктів постачання однорідних товарів (джерел) і пунктів споживання цих товарів (стоків), ще наявні *перевалочні пункти* (проміжні вершини), в яких товари перевантажують з одних транспортних засобів на інші.

Зазвичай вважають, що на перевалочних пунктах не може відбуватися накопичення товарів (скільки товарів за одиницю часу надійшло, стільки товарів за одиницю часу буде відправлено). Якщо ж перевалочний пункт має склади, то на ньому може відбуватися накопичення товарів (у цьому випадку його умовно зачислюють до пунктів споживання).

У стандартній ТЗ перевезення товарів здійснюється між будь-якими пунктами постачання та будь-якими пунктами споживання. На відміну від стандартної ТЗ, в узагальненій ТЗ перевезення товарів може також відбуватися між окремими пунктами постачання чи між окремими пунктами споживання.

Окрім цього, в узагальненій ТЗ між окремими пунктами постачання, перевалочними пунктами і пунктами споживання може не існувати сполучення (доріг), а на пропускні здатності наявних доріг накладають обмеження (тобто пропускні здатності доріг відповідають кількості та вантажопідйомності транспортних засобів, що курсують цими дорогами).

Узагальнену ТЗ називають *закритою*, якщо сумарна величина попиту товарів B усіма пунктами споживання дорівнює сумарній величині пропозиції товарів B усіх пунктів постачання. Якщо умова закритості не виконується, то вводять фіктивний пункт постачання/споживання (див. розділ 4 частини 1 цього підручника).

У *закритій* узагальненій ТЗ необхідно знайти такий спосіб перевезення товарів сумарної величини B від пунктів постачання до пунктів споживання з *можливим* використанням перевалочних пунктів, який *мінімізує загальну вартість* перевезення товарів транспортною мережею; щодо цього необхідно враховувати обмеження на пропускні здатності дуг і на величини попиту і пропозиції вершин.

Обмеження, які накладають на пропускні здатності доріг, можуть вплинути на існування допустимих розв'язків узагальненої ТЗ. На відміну від стандартної ТЗ, *умова закритості* узагальненої ТЗ ще *не гарантує* існування хоча б одного допустимого розв'язку.

У такому випадку логічно знайти *максимально можливу* сумарну величину товарів, які можна перевезти від пунктів постачання до пунктів споживання з *можливим* використанням перевалочних пунктів, яка *мінімізує загальну вартість* перевезення цих товарів транспортною мережею.

Аналізуючи вищесказане, можна зробити висновок, що модель узагальненої ТЗ більше відповідає умовам реальних транспортних мереж, ніж модель стандартної ТЗ. Однак розв'язати узагальнену ТЗ набагато важче, ніж стандартну ТЗ.

Для розв'язування узагальненої ТЗ розроблено спеціальний симплексний метод у мережі [13, 16, 17]. Однак найчастіше узагальнену ТЗ зводять до задачі про потік мінімальної вартості.

Очевидно, що узагальненій ТЗ відповідає *модель спеціальної розподільної мережі* (рис. 6.8), в якій вершини орграфа, що відповідають джерелам, мають додатні ваги (*запаси* товарів), а вершини, що відповідають стокам – від'ємні ваги (*потреби* товарів). Ваги проміжних вершин дорівнюють нулю (скільки товарів за одиницю часу надійшло, стільки за одиницю часу й буде відправлено). Вартістю дуги слугує вартість перевезення одиниці товару відповідним маршрутом. Позначка дуги: **пропускна_здатність, (вартість_дуги)**.

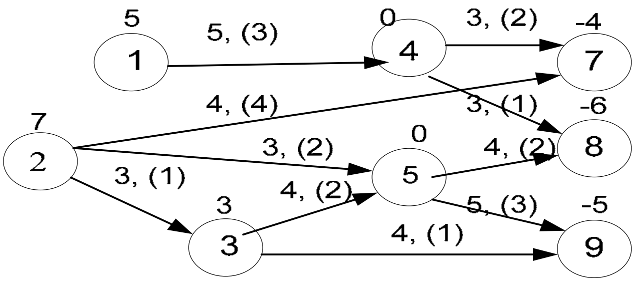

Рис. 8. Узагальнена ТЗ (модель спеціальної розподільної мережі)

Орграф відповідної задачі про потік мінімальної вартості зображено на рис. .9.

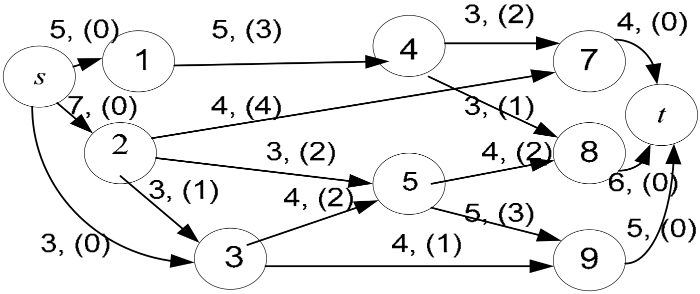

Рис. .9. Орграф задачі про потік мінімальної вартості (для узагальненої ТЗ на рис. 8)

Інколи пропускна здатність дуги має обмеження з обох боків (тобто $l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$). Нижню межу пропускної здатності дуги l_{ij} можна видалити з обмежень підстановкою $x'_{ij} = x_{ij} - l_{ij}$. Для нового потоку x'_{ij} верхньою межею пропускної здатності дуги (i, j) буде величина $b_{ij} = u_{ij} - l_{ij}$, а нижньою – число 0 (тобто $0 \le x'_{ij} \le b_{ij}$). У цьому випадку вагу вершини i зменшують на величину l_{ij}, а вагу вершини j збільшують на величину l_{ij}.

Приклад 2. Компанія забезпечує зерном із трьох зерносховищ три птахофабрики. Пропозиція зерносховищ – 100, 200 і 50 тисяч тонн зерна, а попит птахофабрик – 150, 80 і 120 тисяч тонн, відповідно. Компанія може транспортувати зерно залізничним транспортом, за винятком трьох маршрутів, де використовують автомобільний транспорт. На рис. 6.10 проілюстровано можливі маршрути між зерносховищами і птахофабриками.

Дуги (1, 4), (3, 4) і (4, 6) відповідають автомобільним маршрутам, які мають верхні та нижні границі пропускних здатностей. Інші дуги відповідають залізничному транспорту, пропускні здатності якого практично не обмежені. Вартість транспортування однієї тонни зерна в умовних грошових одиницях подано поблизу кожної дуги в округлих дужках. У мережі на рис. 10 необхідно видалити з обмежень на пропускні здатності дуг нижні межі.

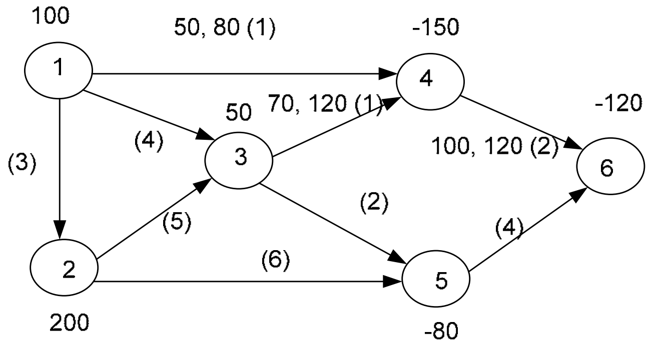

Рис. 10. Транспортна мережа задачі про зерносховища і птахофабрики

➢ На рис. 11 проілюстровано мережу після вилучення нижніх меж пропускних здатностей дуг.

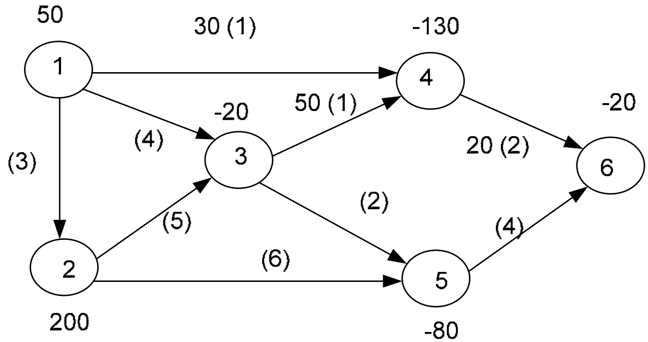

Рис. 11. Мережа без нижніх меж ⮜

❓ Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу про потік мінімальної вартості.
2. Опишіть модель розподільної мережі.
3. Сформулюйте узагальнену транспортну задачу.

🕮 Завдання для самостійної роботи

Завдання 6.1. Розв’яжіть задачу про потік мінімальної вартості (рис. 9).

Завдання 6.2. Розв’яжіть задачу про потік мінімальної вартості (рис. 11).