МАКСИМАЛЬНИЙ ПОТІК

План викладу матеріалу:

1. Базові поняття теорії потоків.
2. Теорема Форда-Фалкерсона.
3. Збільшувальні шляхи.
4. Метод Форда-Фалкерсона пошуку максимального потоку.
5. Залишкові мережі.
6. Зв'язок задачі максимізації потоку з іншими задачами ДО.

🗝 Ключові терміни розділу

- *Пропускна здатність дуг*
- *Визначення st-мережі*
- *Збільшувальний шлях*
- *Сумарна величина потоку*
- *Переріз*
- *Залишкова мережа*

1. Базові поняття теорії потоків

Графи та орграфи – математичні абстракції, які мають важливе значення, оскільки дають змогу розв'язувати велику кількість практичних задач. У цьому параграфі розширимо графові моделі розв'язування задач з таким розрахунком, щоб охопити *динамічні ситуації*, які ототожнюються з переміщенням матеріалів чи товарів різними маршрутами, протіканням речовин трубами (вода, нафта, газ тощо), передачею даних в інформаційних мережах тощо.

Розглянемо таку ідеалізовану фізичну систему. У деяких пунктах (*джерелах*) виробляють (чи видобувають) однорідну речовину, яку через систему взаємозв'язаних труб різного діаметра та різної довжини доставляють до інших пунктів (*стоків*), де її використовують. Отож трубами протікає *потік речовини* (або просто *потік*).

Напрям протікання потоку у кожній трубі – строго зафіксований і не може змінюватися. Для кожної труби відома величина *пропускної здатності*, яка визначає *максимальну* кількість одиниць потоку (тонни, літри, барелі тощо), які можна перемістити цією трубою за одиницю часу.

На початку і/або наприкінці кожної труби встановлено вентиль, який керує потоком. Це керування полягає у визначенні *величини потоку* даною трубою (тобто фактичної кількості одиниць потоку, які переміщуються цією трубою за одиницю часу).

Величину потоку і пропускну здатність труб вимірюють в одних і тих самих одиницях (наприклад, тоннах за годину, літрах за секунду, штуках за добу тощо). Очевидно, що величина потоку довільної труби не може перевищувати її пропускної здатності.

У проміжних пунктах, де труби перетинаються, відсутні резервуари для зберігання речовини, отож тут потоки перебувають у рівновазі: за одиницю часу стільки одиниць потоку з пункту вибуває, скільки до нього за цей же час прибуває (закон *збереження потоку*).

У загальному випадку трубами можна також перекачувати речовину від проміжних пунктів до джерел, від стоків до проміжних пунктів. Трубами можуть бути з'єднані джерела, отож між ними можливий обмін речовиною (те ж стосується стоків).

Якщо сумарна пропускна здатність вхідних труб *кожного* проміжного пункту дорівнює сумарній пропускній здатності вихідних труб цього пункту, то ми цілковито заповнюємо речовиною усі труби (задача оптимізації відсутня).

У протилежному випадку цілковито заповненими будуть уже не всі труби, однак речовина тече трубами, керована настроюванням вентилів так, що забезпечується закон *збереження потоку*.

З рівноваги потоку на перетинах труб інтуїтивно слідує необхідність рівноваги потоку загалом (скільки одиниць потоку з усіх джерел за одиницю часу витече, стільки усі стоки за цей же час мають використати). Вважають, що джерела/стоки можуть надіслати/використати довільну кількість речовини.

Далі буде строго доведено, що сумарна величина потоку усіма трубами, які забезпечують витікання речовини з усіх джерел, дорівнюватиме сумарній величині потоку усіма трубами, які забезпечують надходження речовини в усі стоки.

Згідно із зазначеними фактами ми зацікавлені в одержанні відповіді на таке питання: які настроювання вентилів забезпечать *максимальну величину потоку* з усіх джерел в усі стоки?

Ми можемо прямо моделювати цю ситуацію за допомогою навантаженого орграфа $G = (V, E)$. Вершини орграфа v_1, v_2, …, v_n відповідають джерелам, стокам і проміжним пунктам. Дуги орграфа відповідають трубам (речовина може переміщатися тільки в одному напрямі у кожній трубі). Вага дуги відповідає пропускній здатності відповідної труби.

Для спрощення дугу (v_k, v_i) позначимо (k, i). Вага дуги (k, i) визначає її *пропускну здатність* b_{ki} – максимальну кількість одиниць потоку, які можна перемістити цією дугою за одиницю часу ($b_{ki} \geq 0$).

Кількість одиниць потоку, який *фактично* переміщують дугою (k, i) за одиницю часу, називають *величиною потоку* x_{ki} цієї дуги. Очевидно, що $0 \leq x_{ki} \leq b_{ki}$. Якщо $x_{ki} = b_{ki}$, то дуга (k, i) –*насичена* потоком.

Для кожної вершини $v \in V$ можна визначити *інтенсивність* потоку (або дивергенцію потоку – *з фізики*)

$$d(v) = \sum_{i:\,(v,i)\in E} x_{vi} - \sum_{i:\,(i,v)\in E} x_{iv}, \qquad (1)$$

яка дорівнює різниці між сумарною величиною потоків усіма дугами, які виходять з вершини v, і сумарною величиною потоків усіма дугами, які закінчуються у вершині v.

Величина $d(v)$ може бути *додатною* (з вершини v більше одиниць потоку вибуває, ніж прибуває у неї), *від'ємною* (у вершину v більше одиниць потоку прибуває, ніж вибуває з неї, тобто відбувається *накопичення* потоку у вершині v) і *рівною нулю* (скільки одиниць потоку прибуває у цю вершину, стільки з неї і вибуває).

Вершину з додатною інтенсивністю називають *вершиною-джерелом* (або просто *джерелом*) і позначають літерою s. Вершину з від'ємною інтенсивністю називають *вершиною-стоком* (або просто *стоком*) і позначають літерою t. У загальному випадку орграф може мати *декілька* джерел і/або стоків. Вершину з нульовою інтенсивністю називають *проміжною*.

Спростимо спочатку нашу модель. Вважатимемо, що $d(v_1) > 0$, $d(v_n) < 0$, $d(v_l) = 0 \left(l = \overline{2,\, n-1}\right)$. Тоді в орграфі: $v_1 = s$ – єдине джерело, $v_n = t$ – єдиний стік, а $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ – проміжні вершини.

Навантажений орграф з додатними вагами, що має єдине джерело s і єдиний стік t, називають *st-мережею*. Дугу (k, i) цієї мережі у напрямі від s до t називають *прямою* дугою; а у напрямі від t до s – *зворотною* дугою. Величину

$$F = d(s) = \sum_{i:\,(s,i)\in E} x_{si} - \sum_{i:\,(i,s)\in E} x_{is} \qquad (\ 2)$$

називають *сумарною величиною потоку* в st-мережі. Задача *максимізації потоку* в st-мережі полягає у визначенні *максимуму* величини F.

Головна причина розгляду st-мережі полягає у тому, що вона дає змогу розв'язати безліч інших задач методом зведення.

2. Теорема Форда-Фалкерсона

Розіб'ємо множину вершин V на дві підмножини S і T, які не перетинаються ($S \subset V$, $T \subset V$, $S \cup T = V$, $S \cap T = \varnothing$), так, щоб $s \in S$ і $t \in T$. Позначимо через (S, T) – усі дуги, що з'єднують S і T, а через (T, S) – усі дуги, що з'єднують T і S.

Множину дуг $(S,T) \cup (T,S)$ називають *перерізом*, індукованим множиною S. Переріз визначає множину дуг, за умови видалення яких з орграфа *цілковито* припиняється потік від джерела до стоку та навпаки. *Пропускною здатністю* такого перерізу називають величину

$$b(S,T) = \sum_{(k,i)\in(S,T)} b_{ki}\,. \qquad (\ 3)$$

Згідно з (5.2) величина F вимірюється у джерелі s. За теоремою 5.1 величину F можна виміряти у довільному перерізі.

Теорема 1. Для довільної підмножини вершин $S \subset V$, яка містить джерело s і не містить стоку t, справджується співвідношення

$$F = \sum_{(k,i)\in(S,T)} x_{ki} - \sum_{(i,k)\in(T,S)} x_{ik}\,. \qquad (\ 4)$$

- Для будь-якої проміжної вершини $v \in S$, згідно з (1), справедливий вираз:

$$0 = \sum_{i:\,(v,i)\in E} x_{vi} - \sum_{i:\,(i,v)\in E} x_{iv}\,. \qquad (\ 5)$$

Додаючи почленно рівність (.2) і рівності (.5) для *усіх* проміжних вершин $v \in S$, отримуємо співвідношення (5.4). Дійсно, для довільної дуги $(r, z) \in E$ можливі такі варіанти:

– $r \in S$, $z \in S$ – величина x_{rz} у сумі $\sum\limits_{i:\,(r,i)\in E} x_{ri}$ буде доданком зі знаком "+", а у сумі $\sum\limits_{i:\,(i,z)\in E} x_{iz}$ – доданком зі знаком "–" (тобто внаслідок сумування величина x_{rz} знищується);
– $r \in S$, $z \in T$ (дуга належить множині (S, T)) – величина x_{rz} буде доданком тільки у сумі $\sum\limits_{(k,i)\in(S,T)} x_{ki}$;
– $r \in T$, $z \in S$ (дуга належить множині (T, S)) – величина x_{rz} буде доданком тільки у сумі $\sum\limits_{(i,k)\in(T,S)} x_{ik}$.

Усі розглянуті випадки узгоджуються з рівністю (4). $\prec$

Наслідок з теореми 1. $F = -d(t) = -\left(\sum\limits_{k:\,(t,k)\in E} x_{tk} - \sum\limits_{k:\,(k,t)\in E} x_{kt} \right)$.

➢ Нехай $T = \{t\}$, тоді $S = V/\{t\}$. Згідно з (5.4) маємо таке:

$$F = \sum_{(k,i)\in(S,T)} x_{ki} - \sum_{(i,k)\in(T,S)} x_{ik} = \sum_{k:\,(k,t)\in E} x_{kt} - \sum_{k:\,(t,k)\in E} x_{tk} =$$

$$= -\left(\sum_{k:\,(t,k)\in E} x_{tk} - \sum_{k:\,(k,t)\in E} x_{kt} \right). \qquad \prec$$

Наслідок 5.1 відображає інтуїтивно зрозумілий факт: стікає така кількість одиниць потоку, яка виходить з джерела.

Одним з фундаментальних фактів теорії потоків в орграфах є класична теорема *про максимальний потік і мінімальний переріз* у *st*-мережі (або теорема *Форда-Фалкерсона*). *Мінімальним перерізом* серед усіх перерізів $(S,T)\cup(T,S)$, індукованих множиною S, є переріз з найменшою пропускною здатністю $b^* = \min\limits_{(S,T)}\bigl(b(S,T)\bigr)$.

Теорема 2. *Теорема Форда-Фалкерсона*. Сумарна величина F довільного потоку від s до t не перевищує пропускної здатності мінімального перерізу ($F \le b^*$), причому існує потік, для якого $F = b^*$.

➢ Згідно з (5.3) і (5.4) маємо таке:

$$F = \sum_{(k,i)\in(S,T)} x_{ki} - \sum_{(i,k)\in(T,S)} x_{ik} \le \sum_{(k,i)\in(S,T)} x_{ki} \le \sum_{(k,i)\in(S,T)} b_{ki} = b(S,T).$$

Отже, сумарна величина F довільного потоку від s до t не перевищує пропускної здатності *довільного* перерізу st-мережі (у тім числі й перерізу з *найменшою* пропускною здатністю: $F \le b^*$).

Якщо вдасться відшукати такий потік, що $F = b(S,T)$, то він і буде *максимальним*, а (S,T) буде *мінімальним* перерізом. Доведення факту існування такого потоку слідує з теореми 3 та аналізу алгоритму, представленого у параграфі 4. ⮜

3. Збільшувальні шляхи

Усі алгоритми розв’язування задачі максимізації потоку використовують проміжний алгоритм відшукання *збільшувального шляху*, який містить збільшувальні і/або зменшувальні дуги.

- *Збільшувальна* (або *аугментальна*) дуга – це дуга, величина потоку якої менша за її пропускну здатність (величину наявного потоку цією дугою можна *збільшити*). Множину/тип збільшувальних дуг позначають літерою I (з англійської мови: *increase*). Тоді:

$$(k,i)\in I, \text{ якщо } 0 \le x_{ki} < b_{ki}.$$

- *Зменшувальна* дуга – це дуга, величина потоку якої є додатною (величину наявного потоку цією дугою можна *зменшити*). Множину/тип зменшувальних дуг позначають літерою R (з англійської мови: *release*). Тоді:

$$(k,i)\in R, \text{ якщо } 0 < x_{ki} \le b_{ki}.$$

- Дуги, які одночасно належать як множині I, так і множині R, називають *проміжними*:

$$\big((k,i)\in I\big)\wedge\big((k,i)\in R\big), \text{ якщо } 0 < x_{ki} < b_{ki}.$$

Величину $b_{ki} - x_{ki}$ називають *резервом збільшення* потоку дугою $(k,i) \in I$, а x_{ki} – *резервом зменшення* потоку дугою $(k,i) \in R$.

Розглянемо тепер, якими засобами можна переслати додаткову кількість одиниць потоку з джерела *s* у витік *t*:

1. За допомогою шляху з *s* у *t*, що складається лише зі збільшувальних дуг. На рис. 1 нижче кожної дуги стоїть число, яке є *резервом збільшення* потоку дугою.

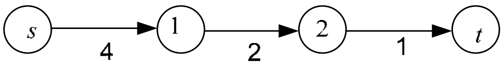

Рис. 1. Шлях, що містить тільки збільшувальні дуги

Цим шляхом можна збільшити потік на величину, що дорівнює $\min\{4,2,1\} = 1$. Інтенсивність проміжних вершин 1 і 2 у цьому випадку не зміниться.

2. За допомогою шляху з *t* у *s,* що складається лише зі зменшувальних дуг. На рис. 2 нижче кожної дуги стоїть число, яке є *резервом зменшення* потоку дугою.

Тут треба міркувати так. Можна зменшити потік кожною дугою шляху, що спричинило б зменшення зворотного потоку з *t* до *s* і, отже, збільшення чистого потоку з *s* до *t.* Максимальне зменшення потоку з *t* до *s* і, отже, збільшення потоку з *s* до *t* визначається величиною $\min\{4,\ 2,\ 3\} = 2.$ Інтенсивність проміжних вершин 1 і 2 у цьому випадку не зміниться.

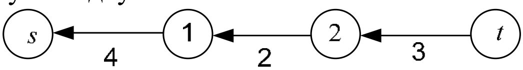

Рис. 2. Шлях, що містить тільки зменшувальні дуги

3. Комбінація першого і другого способу, яка полягає у побудові *збільшувального* шляху.

Збільшувальним (або *аугментальним*) шляхом в *st*-мережі називають простий шлях від *s* до *t без урахування орієнтації* дуг, в якому прямі дуги мають тип *I*, а зворотні – тип *R.*

Вздовж аугментального шляху можна “переслати” додатковий потік від *s* до *t* величини Δ, що дорівнює *мінімальному* з резервів збільшення/зменшення, відповідно, прямих і зворотних дуг.

На рис. 3 зображено орграф, що має збільшувальний шлях (s, 1), (1, 2), (3, 2), (3, t). Величина потоку в цьому орграфі дорівнює 9. Позначка дуги: *величина_потоку_дуги*, [*пропускна_здатність_дуги*].

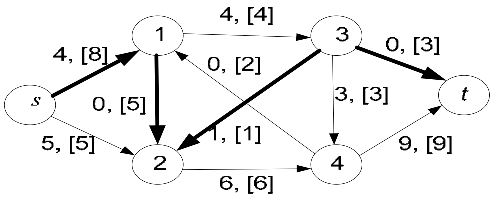

Рис. 3. Орграф, що містить збільшувальний шлях

Для збільшувального шляху на рис. 3 значення $\Delta = 1$. Збільшуючи потік прямими дугами на 1 і зменшуючи його на зворотній дузі (3, 2) на 1, отримаємо новий потік величини 10 (рис. 4). Інтенсивність проміжних вершин 1, 2 і 3 у цьому випадку не зміниться.

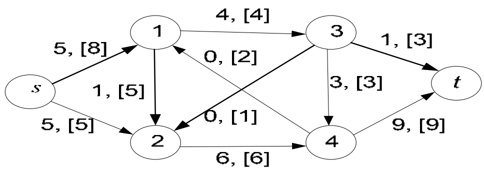

Рис. 4. Орграф, що містить потік величини 10

Теорема 3. Такі твердження в st-мережі є еквівалентними:

(I) потік від s до t максимальний;

(II) не існує збільшувального шляху;

(III) $F = b(S,T)$ для деякої множини $S \subset V$, такої, що $s \in S$ і $t \in T$.

➢ (I) $\Rightarrow$ (II). Доведення очевидне, оскільки існування такого шляху дало б змогу збільшити величину потоку, а це суперечить (I).

(II) $\Rightarrow$ (III). Зачислимо до множини S ($s \in S$) такі проміжні вершини:

$$\begin{aligned} &\text{якщо } \big((k,i) - \text{пряма дуга}\big) \wedge \big(v_k \in S\big) \wedge \big(x_{ki} < b_{ki}\big), \text{ то } v_i \in S, \\ &\text{якщо } \big((k,i) - \text{зворотна дуга}\big) \wedge \big(v_i \in S\big) \wedge \big(x_{ik} > 0\big), \text{ то } v_k \in S. \end{aligned} \qquad (\ \ 6)$$

Решта вершин належатимуть підмножині *T*.

Очевидно, що переріз побудовано, оскільки $t \in T$. Якщо б це було не так (тобто $t \in S$), тоді, згідно з (6), існував би збільшувальний шлях, а це суперечить (II).

Якщо $(k,\, i) \in (S,T)$, то $x_{ki} = b_{ki}$; інакше вершина v_i належатиме до *S*, згідно з (6). Аналогічно, якщо $(i,\, k) \in (T,S)$, то $x_{ik} = 0$. Отож

$$F = \sum_{(k,i) \in (S,T)} x_{ki} - \sum_{(i,k) \in (T,S)} x_{ik} = \sum_{(k,i) \in (S,T)} b_{ki} - 0 = \sum_{(k,i) \in (S,T)} b_{ki} = b(S,T).$$

(III) $\Rightarrow$ (I), що випливає з теореми (2).$\prec$

.4. Метод Форда-Фалкерсона пошуку максимального потоку

Розглянемо *метод* Форда-Фалкерсона визначення максимального потоку, який базується на теоремах 2 і .3. Ідеться про *метод*, оскільки існує декілька алгоритмів, які його реалізують.

Метод Форда-Фалкерсона визначення максимального потоку

Крок 0. Для кожної дуги орграфа $(k,i) \in E$ встановлюють $x_{ki} = 0$.

Крок 1. Визначають збільшувальний шлях в орграфі.

Крок 2. Якщо збільшувального шляху не існує, то потік *оптимальний* (*завершення* роботи). У протилежному випадку визначають *резерви збільшення*/*зменшення* потоків дугами, які утворюють збільшувальний шлях.

Крок 3. Обчислюють значення Δ, яке дорівнює *мінімальному* з резервів збільшення/зменшення потоків дугами.

Крок 4. *Збільшують* потік прямими дугами збільшувального шляху на значення Δ.

Крок 5. *Зменшують* потік зворотними дугами збільшувального шляху на значення Δ.

Крок 6. Переходять на перший крок.

Алгоритми *визначення максимального потоку* відрізняються один від одного, здебільшого, способами відшукання збільшувального шляху (тобто реалізацією першого кроку методу Форда-Фалкерсона). Розглянемо спочатку найпростіший алгоритм відшукання збільшувального шляху, який базується на позначенні дуг і вершин орграфа [18]:

1. Визначити тип кожної дуги орграфа. Позначити вершину *s*.
2. Позначати дуги і вершини відповідно до *правил позначки* доти, доки не позначено вершину *t*, або доки позначення нових вершин стане неможливим.

   Правила позначки:

   – якщо вершина *x* – позначена, вершина *y* – не позначена, дуга (*x*, *y*) – не позначена і має тип *I*, то позначають дугу (*x*, *y*) та її кінець – вершину *y*;

   – якщо вершина *x* – позначена, вершина *y* – не позначена, дуга (*y*, *x*) – не позначена і має тип *R*, то позначають дугу (*y*, *x*) та її початок – вершину *y*;

   – інших випадків позначення немає.

Теорема 4. Якщо під час виконання алгоритму пошуку збільшувального шляху вершина *t* – позначена, то в орграфа такий шлях існує. Якщо вершину *t* позначити не вдалося, то збільшувального шляху в орграфа немає. Алгоритм завершує роботу за скінченну кількість кроків.

➢ За правилами дугу можна позначити тільки тоді, коли одну зі суміжних вершин позначено, а іншу – ні. Отже, під час виконання алгоритму не можна позначити дугу, в якої обидві вершини уже позначені, отож позначені вершини та дуги не утворюють циклів.

Внаслідок процесу позначення утворюється *дерево* з початком у джерелі *s*. Якщо при цьому позначено вершину *t*, то за теоремою 1. існує *єдиний простий шлях*, що з'єднує *s* і *t*. Цей шлях є *збільшувальним*, оскільки правила позначки гарантують, що прямі дуги цього ланцюга мають тип *I*, а зворотні – тип *R*.

Доведемо, якщо вершину *t* позначити не вдалося, то збільшувального шляху в орграфа немає (*від супротивного*). Нехай існує збільшувальний шлях (за означенням – це простий шлях від *s* до t без урахування орієнтації дуг). Правило позначки дає змогу досягти довільної дуги цього шляху і, зокрема, дуги, суміжної з вершиною t. Отож вершину t буде позначено (отримали *протиріччя*).

Алгоритм завершує роботу за скінченну кількість кроків, оскільки у ньому лише по одному разу позначаються вершини та дуги, кількість яких є скінченною. ≺

Для орграфа на рис. 4 не вдається відшукати новий збільшувальний шлях, оскільки тільки три дуги (s, 1), (1, 2), (3, t) є збільшувальними.

Приклад 1. Визначити максимальний потік в орграфі (рис. 5).

➢ Для визначення максимального потоку скористаємося методом Форда-Фалкерсона, який базується на позначенні дуг і вершин орграфа під час визначення збільшувального шляху. На рис. 5 для усіх дуг орграфа $(k,i)\in E$ встановлено $x_{ki} = 0$ (тобто перед виконанням першого кроку всі дуги орграфа мають тип I). Обрані для позначення дуги зберігатимемо у стеку.

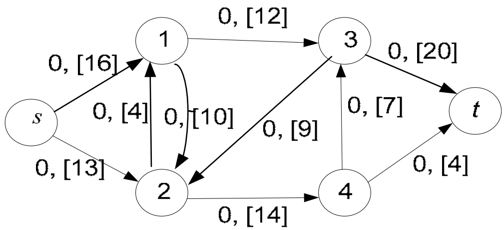

Рис. 5. Орграф прикладу 1

Позначення вершин і дуг	Стек
s	(s, 1), (s, 2)
s, (s, 1), 1	(1, 3), (1, 2), (s, 2)
s, (s, 1), 1, (1, 3), 3	(3, t), (1, 2), (s, 2)
s, (s, 1), 1, (1, 3), 3, (3, t), t	(1, 2), (s, 2)

Збільшувальний шлях: (s, 1), (1, 3), (3, t). Вздовж цього шляху посилаємо додатковий потік, що дорівнює min{16, 12, 20} = 12. Отримуємо орграф зі сумарною величиною потоку 12 (рис. 6), усі дуги якого мають тип I, за винятком дуги (1, 3) типу R.

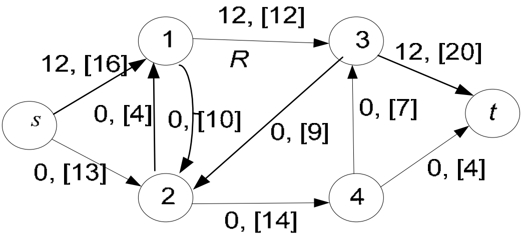

Рис. 6. Орграф із сумарною величиною потоку 12

Позначення вершин і дуг	Стек
s	(*s*, 2), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2	(2, 4), (2, 1), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2, (2, 4), 4	(4, *t*), (4, 3), (2, 1), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2, (2, 4), 4, (4, *t*), *t*	(4, 3), (2, 1), (*s*, 1)

Збільшувальний шлях: (*s*, 2), (2, 4), (4, *t*). Вздовж цього шляху посилаємо додатковий потік, що дорівнює min{13, 14, 4} = 4. Отримуємо орграф зі сумарною величиною потоку 16 (рис. 7), усі дуги якого мають тип *I*, за винятком дуг (1, 3) і (4, *t*) типу *R*.

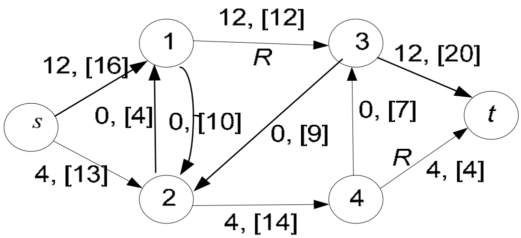

Рис. 7. Орграф із сумарною величиною потоку 16

Позначення вершин і дуг	Стек
s	(*s*, 2), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2	(2, 4), (2, 1), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2, (2, 4), 4	(4, 3), (2, 1), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2, (2, 4), 4, (4, 3), 3	(3, *t*), (3, 2), (2, 1), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2, (2, 4), 4, (4, 3), 3, (3, *t*), *t*	(3, 2), (2, 1), (*s*, 1)

Збільшувальний шлях: (*s*, 2), (2, 4), (4, 3), (3, *t*). Вздовж цього шляху посилаємо потік, що дорівнює min{9, 10, 7, 8} = 7. Отримуємо орграф зі сумарною величиною потоку 23 (рис. .8), усі дуги якого мають тип *I*, за винятком дуг (1, 3), (4, *t*) і (4, 3) типу *R*.

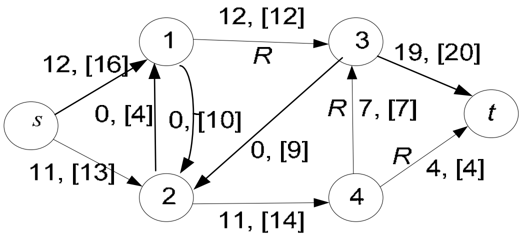

Рис. .8. Орграф із сумарною величиною потоку 23

Позначення вершин і дуг	Стек
s	(*s*, 2), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2	(2, 4), (2, 1), (*s*, 1)
s, (*s*, 2), 2, (2, 4), 4	(2, 1), (*s*, 1)
s	(*s*, 1)
s, (*s*, 1), 1	(1, 2)
s, (*s*, 1), 1, (1, 2), 2	(2, 4)
s, (*s*, 1), 1, (1, 2), 2, (2, 4), 4	

Вершина *t* – непозначена (потік на рис. 8 *максимальний*). ≺

5. Залишкові мережі

Залишковою мережею (*residual network*) для певної *st*-мережі *G* = (*V*, *E*) називають орграф *G** = (*V**, *E**), для якого *V** = *V*, а дуги *E** визначають так:

$$(\forall\ (k, i) \in E\colon (x_{ki} = 0) \wedge (b_{ki} > 0)) \Rightarrow (\exists\ (k, i) \in E^*\colon b^*_{ki} = b_{ki}),$$

$$(\forall\ (k, i) \in E\colon x_{ki} = b_{ki}) \Rightarrow (\exists\ (i, k) \in E^*\colon b^*_{ik} = b_{ik} + x_{ki}), \qquad (\ 7)$$

$$(\forall\ (k, i) \in E\colon 0 < x_{ki} < b_{ki}) \Rightarrow ((\exists\ (i, k) \in E^*\colon b^*_{ik} = b_{ik} + x_{ki}) \wedge$$

$$\wedge\ (\exists\ (k, i) \in E^*\colon b^*_{ki} = b_{ki} - x_{ki})).$$

Дугу (i, k) (чи дугу (k, i)) ∈ *E** називають залишковою дугою. Ця дуга може і не бути дугою множини *E* у заданій *st*-мережі (загалом, $|E^*| \le 2|E|$).

Для кожної дуги $(k, i) \in E$ ми створюємо, згідно з (7), одну дугу чи дві залишкові дуги у кожному напрямі:

– у напрямі потоку з вагою, яка дорівнює невикористаній пропускній здатності дуги $(k, i) \in E$;
– назустріч потоку з вагою, яка дорівнює сумі величини потоку дугою $(k, i) \in E$ і пропускної здатності дуги $(i, k) \in E$.

У жодному з цих випадків, згідно з (7), ми *не долучаємо* до залишкової мережі дуг, вага яких дорівнює нулю.

Якщо для кожної дуги орграфа $(k,i) \in E$ спочатку встановити $x_{ki} = 0$, то залишкова мережа, згідно з (7), збігатиметься із заданою *st*-мережею (вага залишкової дуги дорівнюватиме пропускній здатності відповідної дуги *st*-мережі). Наприклад, для *st*-мережі на рис. 5.5 відповідну залишкову мережу зображено на рис.   9.

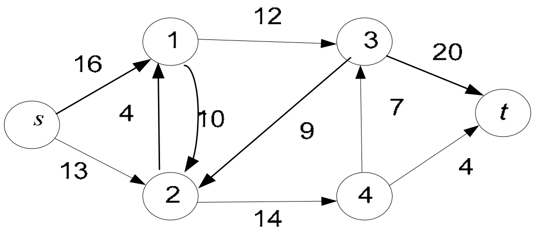

Рис.   9. Залишкова мережа (відповідає *st*-мережі на рис.   .5)

Відшукання збільшувального шляху в *st*-мережі еквівалентно відшуканню орієнтованого шляху від джерела *s* до стоку *t* у відповідній залишковій мережі. Для відшукання орієнтованого шляху можна використати будь-який відомий алгоритм пошуку на графі.

Після відшукання орієнтованого шляху в залишковій мережі від джерела *s* до стоку *t* частини (Δ) пропускних здатностей дуг цього шляху "забираються" потоком, що проходить через них.

Нехай між вершинами *i* та *j* існують дуги (i, j) і (j, i) з пропускними здатностями, відповідно, b_{ij} та b_{ji}. Якщо частина пропускної здатності дуги (i, j) "забирається" потоком (тобто $b_{ij} - \Delta$), то, згідно із законом збереження потоку, для дуги (j, i) має виконатися відповідне збільшення пропускної здатності (тобто $b_{ji} + \Delta$). Якщо між вершинами i та j існує тільки одна з дуг (i, j) або (j, i), то для неї відповідна компенсація потоку відбувається на фіктивній дузі.

Увага! У залишковій мережі відображають тільки пропускні здатності дуг (невикористані та компенсаційні). Отож для вершин залишкової мережі не виконується закон збереження потоку, оскільки тут він просто не відображається.

Збільшення величини потоку вздовж орієнтованого шляху в залишковій мережі від джерела s до стоку t спричинює зміни у залишковій мережі: хоча б одна дуга змінює напрям або зникає.

Алгоритм визначення максимального потоку за допомогою залишкових мереж:

Крок 0. $B^*= B$, де B – матриця пропускних здатностей дуг st-мережі.

Крок 1. Знайти орієнтований шлях p від s до t у залишковій мережі, визначеній матрицею B^*. Якщо такого шляху не існує, то перейти на крок 3.

Крок 2. Нехай b_{ij}^{-} (b_{ji}^{+}) – пропускні здатності дуг шляху p, відповідно у напрямі $s \rightarrow t$ ($t \rightarrow s$) і $\Delta = \min\{b_{ij}^{-}\} > 0$. У матриці B^* відняти Δ від усіх b_{ij}^{-} і додати Δ до всіх b_{ji}^{+}. Перейти на 1.

Крок 3. Знайти максимальний потік в st-мережі згідно з правилом:

$$x_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - b_{ij}^{*}, & \text{якщо } b_{ij} > b_{ij}^{*}; \\ 0, & \text{якщо } b_{ij} \le b_{ij}^{*}. \end{cases}$$

Крок 4. Завершити алгоритм.

Під час відшукання орієнтованого шляху безпосередньо у матриці B^* розпочинають пошук з першого рядка (рядка s) та обирають наступну вершину серед тих, які з’єднано з s дугами додатних ваг.

Далі розглядають рядок, що відповідає обраній вершині, і обирають наступну вершину, з’єднану з попередньою вершиною дугою додатної ваги. Процес продовжують доти, доки не буде досягнуто вершини t, або встановлено, що досягнути t неможливо.

Приклад 2. Знайти максимальний потік в орграфі (рис. .5), використовуючи залишкові мережі.

➢ Матрицю пропускних здатностей дуг орграфа наведено у таблиці .1, а відповідну залишкову мережу зображено на рис. .9.

Таблиця .1. Початкова матриця B^*

	s	1	2	3	4	t
s	0	16–	13	0	0	0
1	0+	0	10	12–	0	0
2	0	4	0	0	14	0
3	0	0+	9	0	0	20–
4	0	0	0	7	0	4
t	0	0	0	0+	0	0

Орієнтований шлях ($\Delta = 12$):

$$s \xrightarrow[16]{} 1 \xrightarrow[12]{} 3 \xrightarrow[20]{} t\,.$$

Матрицю B^* після виконання кроку 2^1 наведено у таблиці 2, а відповідну залишкову мережу зображено на рис. 10.

Таблиця 2. Матриця B^* (крок 2^1)

	s	1	2	3	4	t
s	0	4	13–	0	0	0
1	12	0	10	0	0	0
2	0+	4	0	0	14–	0
3	0	12	9	0	0	8
4	0	0	0+	7	0	4–
t	0	0	0	12	0+	0

Орієнтований шлях ($\Delta = 4$):

$$s \xrightarrow[13]{} 2 \xrightarrow[14]{} 4 \xrightarrow[4]{} t\,.$$

Матрицю B^* після виконання кроку 2^2 наведено у таблиці 3, а відповідну залишкову мережу зображено на рис. 11.

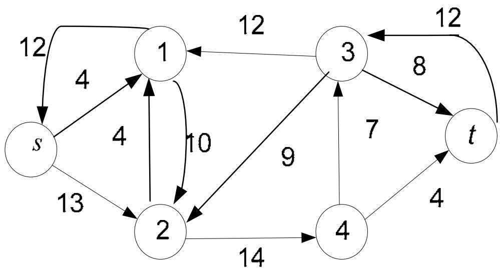

Рис. 10. Залишкова мережа (після виконання кроку 2^1)

Таблиця 3. Матриця B^* (крок 2^2)

	s	1	2	3	4	*t*
s	0	4	9–	0	0	0
1	12	0	10	0	0	0
2	4+	4	0	0	10–	0
3	0	12	9	0	0+	8–
4	0	0	4+	7–	0	0
t	0	0	0	12+	4	0

Орієнтований шлях ($\Delta = 7$):

$$s \xrightarrow[9]{} 2 \xrightarrow[10]{} 4 \xrightarrow[7]{} 3 \xrightarrow[8]{} t.$$

Матрицю B^* після виконання кроку 2^3 наведено у таблиці 4, а відповідну залишкову мережу зображено на рис. 12.

Таблиця 4. Матриця B^* (крок 2^3)

	s	1	2	3	4	*t*
s	0	4	2	0	0	0
1	12	0	10	0	0	0
2	11	4	0	0	3	0
3	0	12	9	0	7	1
4	0	0	11	0	0	0
t	0	0	0	19	4	0

Якщо проаналізувати залишкову мережу на рис. 12, то від джерела *s* можна добратися тільки до вершини 4. Отже, орієнтованого шляху від *s* до *t* у залишковій мережі не існує. Переходимо на крок 3.

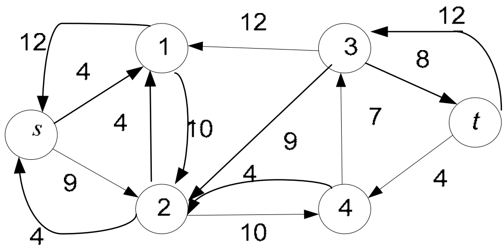

Рис. 11. Залишкова мережа (після виконання кроку 2^2)

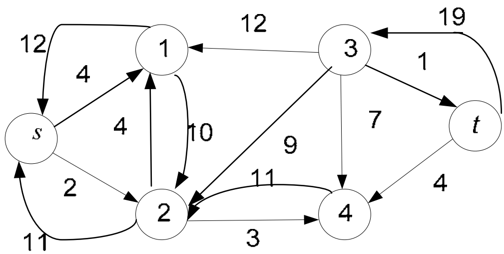

Рис. 12. Залишкова мережа (після виконання кроку 2^3)

Результати виконання кроку 3 наведено у таблиці 5 (максимальний потік у *st*-мережі, зображеній на рис. 5).

Таблиця 5. Максимальний потік

	s	1	2	3	4	*t*
s	0	12	11	0	0	0
1	0	0	0	12	0	0
2	0	0	0	0	11	0
3	0	0	0	0	0	19
4	0	0	0	7	0	4
t	0	0	0	0	0	0

Максимальний потік у *st*-мережі, що відповідає таблиці 5, зображено на рис. 13 (відтворені тільки ті дуги, якими реально протікає потік).

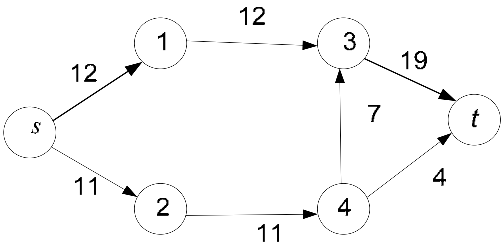

Рис. 13. Максимальний потік в *st*-мережі (рис. 5) ◄

Ми розглянули два алгоритми реалізації методу Форда-Фалкерсона відшукання максимального потоку (за допомогою позначок та залишкових мереж). Існують й інші алгоритми відшукання максимального потоку [5, 8]. Однак, дослідження того, який алгоритм найкращий, є надзвичайно складною задачею і виходить за рамки нашого підручника.

У наступному пункті розглянемо деякі задачі, розв'язок яких зводиться до розв'язку задачі відшукання максимального потоку в *st*-мережі.

Зв'язок задачі максимізації потоку з іншими задачами ДО

Домовимося надалі *st-мережу*, яку визначено у параграфі 1, називати *стандартною st*-мережею. Це нам необхідно, щоб відрізняти її від *st*-мереж, що мають додаткові обмеження чи специфічні властивості.

1. Потік з декількома джерелами і стоками. Дано орієнтований орграф $G=(V,E)$. Множина V складається з множини джерел $s=\{v_1,...,v_l\}$, множини проміжних вершин $N=\{v_{l+1},...,v_m\}$ і множини стоків $t=\{v_{m+1},...,v_n\}$.

Розширимо орграф G до орграфа $G'=(V',E')$, додавши дві фіктивні вершини v_0 і v_{n+1} (v_0 – джерело; v_{n+1} – стік) і фіктивні дуги (v_0,v_j), $j=\overline{1,l}$ і (v_i,v_{n+1}), $i=\overline{m+1,n}$. Пропускні здатності фіктивних дуг: $b_{0j}=\sum\limits_{i:\,(j,i)\in E} b_{ji}$ ($j=\overline{1,l}$) і $b_{i,n+1}=\sum\limits_{j:\,(j,i)\in E} b_{ji}$ ($i=\overline{m+1,n}$).

Величину потоку у вихідному орграфі G і в розширеному орграфі G' визначають пропускні здатності дуг орграфа G. Отже, задача про максимальний потік з множини джерел $s=\{v_1,...,v_l\}$ у множину витоків $t=\{v_{m+1},...,v_n\}$ орграфа G *еквівалентна* задачі про максимальний потік у стандартній *st*-мережі. Приклад зведення на рис. 14 (фіктивні дуги – пунктирні).

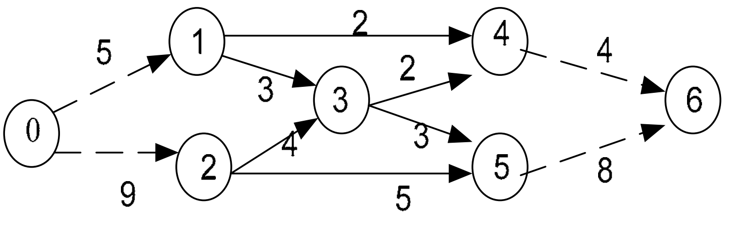

Рис. 14. Орграф з двома джерелами і двома витоками

2. Потік з обмеженнями на пропускні здатності вершин. Нехай задано деяку *st*-мережу з додатковими обмеженнями, за яких потік через кожну вершину не повинен перевищувати деякої фіксованої пропускної здатності (різної для різних вершин). Необхідно обчислити максимальний потік, що задовольняє цим додатковим обмеженням. Ця задача *еквівалентна* задачі про максимальний потік у стандартній *st*-мережі.

Дійсно, можна побудувати стандартну *st*-мережу, в якій для кожної вихідної вершини *u* долучають фіктивну вершину *u**, а пропускну здатність фіктивної дуги (*u*, *u**) встановлюють рівною пропускній здатності вершини *u*. Приклад *st*-мережі з обмеженнями на пропускні здатності вершин на рис. 15 (пропускну здатність вершини зазначено над нею). Зведення цієї мережі до стандартної *st*-мережі на рис. 16 (фіктивні дуги – пунктирні).

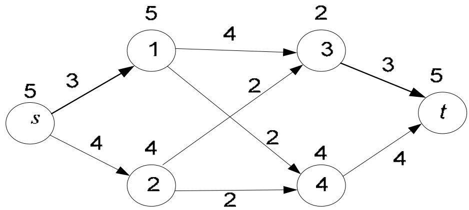

Рис. 15. Мережа з обмеженнями на пропускні здатності вершин

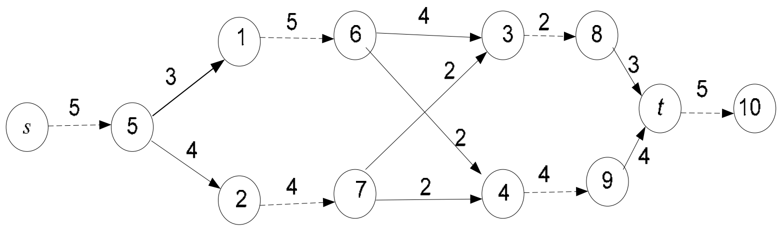

Рис. 16. Зведення мережі (рис. 15) до стандартної *st*-мережі

3. Задача про максимальний потік для неорієнтованих st-мереж. Ця задача більше, ніж стандартна задача, відповідає обраній моделі трубопроводу для транспортування рідин: вона допускає випадок, коли рідина може протікати через труби в обох напрямах.

Задача про максимальний потік для неорієнтованих *st*-мереж *зводиться* до задачі про максимальний потік для стандартних (орієнтованих) *st*-мереж.

Дійсно, можна побудувати стандартну *st*-мережу з тими ж вершинами, де кожному ребру вихідної мережі відповідатимуть дві дуги з пропускними здатностями, які дорівнюватимуть пропускній здатності цього ребра.

Довільний потік в орієнтованій мережі безпосередньо відповідатиме потоку такої ж величини, що протікає в неорієнтованій мережі. Міркуємо так.

Нехай в орієнтованій мережі через дугу (u, v) протікає потік величиною r, а через ребро (v, u) протікає потік величиною z. Якщо $r > z$, то можна пропустити потік величиною $r - z$ ребром [u, v] неорієнтованої мережі у напрямі вершини v; у протилежному випадку це буде потік величиною $z - r$ ребром [u, v] у напрямі вершини u.

4. Задача про допустимі потоки. Дано орієнтований орграф $G = (V, E)$, дуги якого мають додатні ваги (*пропускні здатності*). Нехай кожна вершина орграфа також має вагу, яку можна розглядати як *запас* за *додатного* значення цієї ваги, чи як *потребу* – за *від'ємного* значення. Сума ваг вершин орграфа дорівнює *нулю*. Приклад такого орграфа наведено на рис. 17.

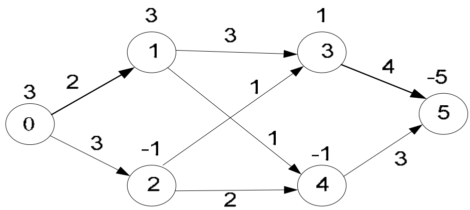

Рис. 17. Орграф задачі про допустимі потоки

Вершини з запасом відповідають складам у задачі про розподіл запасів, вершини з потребами – роздрібним торговим точкам, а дуги – дорогам на маршрутах вантажних машин.

Потік називають *допустимим*, якщо різниця між величиною потоку, що надходить у кожну вершину, і величиною потоку, що з неї витікає, дорівнює вазі цієї вершини. Постає *задача відшукання* допустимих потоків для заданого орграфа.

Задача про допустимі потоки відповідає на таке питання: чи можна відшукати такий спосіб доставки товарів, за якого повсюдно забезпечується відповідність запасів і потреб. Можливий допустимий потік в орграфі (рис. 17) зображено на рис. 18.

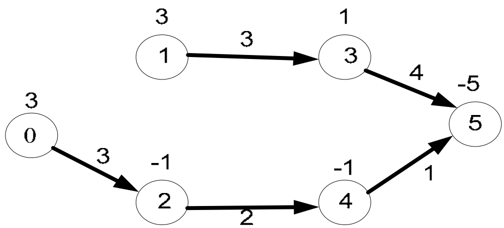

Рис. 18. Допустимий потік в орграфі (рис. 17)

Задача про допустимий потік *зводиться* до задачі про максимальний потік в *st*-мережі. Для цього необхідно долучити до орграфа фіктивну вершину-джерело *s*, з якої виходитимуть дуги у кожну вершину із запасом (вага дуги дорівнюватиме запасу відповідної вершини), і фіктивну вершину-стік *t*, в яку веде дуга з кожної вершини з потребами (вага дуги дорівнюватиме абсолютній величині потреби відповідної вершини). На рис. 19 проілюстровано приклад такого зведення для орграфа на рис. 17.

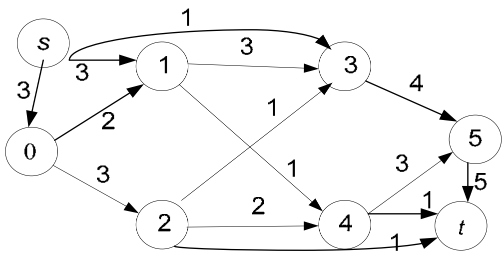

Рис. 19. Зведення до *st*-мережі орграфа на рис. 17

У початковому орграфі міститься допустимий потік тоді і тільки тоді, коли усі дуги, що виходять із джерела, і всі дуги, що ведуть у стік, заповнені так, що в *st*-мережі утворюється максимальний потік.

5. Задача про максимальний потік як задача лінійного програмування (ЛП). Задачу *максимізації* потоку в *st-мережі* (v_0– джерело, v_n – стік) як задачу ЛП формулюють так: знайти значення x_{ij}

для усіх $(i, j) \in E$, які *максимізують* величину $f = \sum_{j=1}^{n} x_{0j} = \sum_{i=0}^{n-1} x_{in}$ за обмежень: $0 \le x_{ij} \le b_{ij}$, $i, j = \overline{0, n}, i \ne j$; $\sum_{i=0}^{n-1} x_{ik} - \sum_{j=1}^{n} x_{kj} = 0$, $k = \overline{1, n-1}$.

? Запитання для самоперевірки

1. Що таке джерело і стік потоку?
2. Що таке пропускна здатність дуги?
3. Що таке величина потоку дугою?
4. Сформулюйте означення сумарної величини потоку.
5. Що таке інтенсивність потоку у вершині орграфа?
6. Сформулюйте закон збереження потоку.
7. Що таке переріз?
8. Сформулюйте означення пропускної здатності перерізу.
9. Як вимірюють сумарну величину потоку для довільного перерізу.
10. Що таке збільшувальна/зменшувальна дуга?
11. Що таке збільшувальний (аугментальний) шлях?
12. Сформулюйте і доведіть теорему Форда-Фалкерсона.
13. Опишіть алгоритм пошуку аугментального шляху.
14. Опишіть метод Форда-Фалкерсона пошуку максимального потоку.
15. Що таке залишкова мережа?
16. Опишіть алгоритм визначення максимального потоку за допомогою залишкових мереж.
17. Опишіть зведення задачі про максимальний потік з декількома джерелами і стоками до задачі про максимальний потік в st-мережі.
18. Опишіть зведення задачі про максимальний потік з обмеженнями на пропускні здатності вершин до задачі про максимальний потік в st-мережі.
19. Опишіть зведення задачі про максимальний потік для неорієнтованих st-мереж до задачі про максимальний потік в st-мережі.
20. Опишіть зведення задачі про допустимі потоки до задачі про максимальний потік у st-мережі.
21. Опишіть зведення задачі про максимальний потік до задачі лінійного програмування.

🕮 Завдання для самостійної роботи

Завдання 5.1. Туристичному бюро необхідно у певний день організувати переліт туристів з міста s у місто t. Прямих рейсів із s в t немає. Однак можна скористатись проміжними містами a, b, c, d. Схема можливих перельотів: $e_1=(s, a)$, $e_2=(s, c)$, $e_3=(a, b)$, $e_4=(c, d)$, $e_5=(d, a)$, $e_6=(b, c)$, $e_7=(b, t)$, $e_8=(d, t)$. Для кожного маршруту e_i задано вагу $c(e_i)$ – число вільних місць (рейси, на які вільних місць немає, не зазначено). Необхідно вибрати таку стратегію бронювання квитків, за якої вдається організувати переліт максимальної кількості туристів. Варіанти завдань:

1. $c(e_1)=15,\ c(e_2)=4,\ c(e_3)=12,\ c(e_4)=8,\ c(e_5)=5, c(e_6)=3,$
   $c(e_7)=7,\ c(e_8)=10$.
2. $c(e_1)=30,\ c(e_2)=8,\ c(e_3)=12,\ c(e_4)=20,\ c(e_5)=10,\ c(e_6)=8,$
   $c(e_7)=14,\ c(e_8)=20.$
3. $c(e_1)=20,\ c(e_2)=6,\ c(e_3)=8,\ c(e_4)=15,\ c(e_5)=7,\ c(e_6)=4,$
   $c(e_7)=11,\ c(e_8)=15$.
4. $c(e_1)=21,\ c(e_2)=7,\ c(e_3)=9,\ c(e_4)=16,\ c(e_5)=9,\ c(e_6)=6,$
   $c(e_7)=13,\ c(e_8)=17$.
5. $c(e_1)=22,\ c(e_2)=8,\ c(e_3)=10,\ c(e_4)=17,\ c(e_5)=10,\ c(e_6)=7,$
   $c(e_7)=14,\ c(e_8)=18$.

Завдання 5.2. Відшукати максимальний потік і величину потоку кожною дугою для орграфа на рис. 5.19.

Завдання 5.3. Відшукати максимальний потік і величину потоку кожною дугою для орграфа на рис. 5.20.

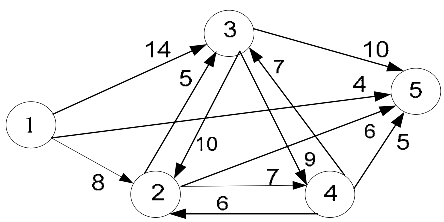

Рис. 5.20. Орграф завдання 5.3