ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В ОРГРАФІ

План викладу матеріалу:

1. Загальні положення.
2. Задача заміни устаткування.
3. Задача оптимального розподілу коштів.
4. Задача оптимального розподілу обмеженого ресурсу.

Ключові терміни розділу

- *Стани системи*
- *Оптимальне керування*
- *Поетапна оптимізація*
- *Множина локальних керувань*
- *Принцип оптимальності Беллмана*
- *Адитивна цільова функція*

1. Загальні положення

Розглянемо динамічну систему, що з часом змінює свої стани $s_0, s_1, ..., s_n$, тобто в системі відбувається деякий процес, що починається зі стану s_0. Хоча б один зі станів $s_1, ..., s_n$ є *кінцевим* (позначимо його s_t) – при переході системи у такий стан процес, що в ній відбувається, завершується. Якщо кожен стан s_j ($j = \overline{1, n}$) описується набором значень r параметрів $p_1, p_2, ..., p_r$, то систему називають *r-параметричною*. Початковий стан s_0 є особливим станом, отож його опис, зазвичай, відрізняється від решти станів.

Будь-який стан s_j ($j = \overline{1, n}$) зв'язаний з *множиною локальних керувань* $\varphi(s_j)$, кожне з яких здатне переводити систему зі стану s_j у деякий інший стан s_k, причому обов'язково $k > j$ (розглядаються системи без зворотних зв'язків). Керування з $\varphi(s_j)$, що переводить систему зі стану s_j у стан s_k, позначимо u_{jk}. Кожному керуванню u_{jk} відповідають прибутки/витрати a_{jk}, зв'язані з його реалізацією.

Задача пошуку оптимального керування зазначеної системи полягає в тому, щоб знайти таку послідовність локальних керувань з початкового стану s_0 до одного з кінцевих станів s_t, за якої сумарна величина прибутків/витрат була б максимальною/мінімальною (таку послідовність локальних керувань називають *оптимальним керуванням* зі стану s_0).

Сформулюємо задачу пошуку оптимального керування динамічною системою в термінах графів. Нехай $G = (V, E)$ – орієнтований орграф з множиною вершин $V = \{s_0, s_1, ..., s_n\}$, в якому пара $\{s_j, s_k\}$ є дугою, якщо в $\varphi(s_j)$ існує керування u_{jk} $(k > j)$. Вага дуги (s_j, s_k) дорівнює a_{jk} (зазвичай, $a_{jk}>0$). Очевидно, що G – ациклічний орграф.

Задача пошуку *оптимального керування* еквівалентна задачі пошуку в ациклічному орграфі G шляху максимальної/мінімальної довжини, що з'єднує вершину s_0 з однією із кінцевих вершин s_t. Цей шлях назвемо *оптимальним шляхом* з вершини s_0.

Процедура розв'язування задачі оптимального керування методом динамічного програмування базується на принципі оптимальності Беллмана:

> розглядаючи стан s_j, необхідно обрати таке локальне керування $u_{jk} \in \varphi(s_j)$, що у сукупності з оптимальним керуванням зі стану s_k утворить *оптимальне керування* зі стану s_j.

Іншими словами:

> яким би не був стан динамічної системи в результаті реалізації будь-якого числа кроків, керування на найближчому кроці необхідно обирати таким, щоб воно разом з оптимальним керуванням на всіх наступних кроках привело до максимально можливого виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи і даний.

Будь-яку багатокрокову задачу ухвалення рішення можна інтерпретувати як процес зміни *стану динамічної системи* з дискретним часом. Поняття *стану* відіграє важливу роль у дискретному динамічному програмуванні і може мати різноманітну інтерпретацію.

Суть методу динамічного програмування щодо багатокрокових задач ухвалення рішень з *адитивною цільовою функцією* полягає в *поетапній оптимізації* (оптимальне рішення ухвалюється на кожному кроці). Прийняття рішення на кожному кроці, за винятком останнього, здійснюється з урахуванням усіх його можливих наслідків у майбутньому (на майбутніх кроках).

Прийняття рішення на *останньому* кроці має особливе значення, адже вибір рішення можна здійснювати "незважаючи на майбутнє". Отож у методі динамічного програмування спочатку планують останній крок, виходячи з максимально можливої ефективності рішення.

Розглянемо застосування методу динамічного програмування в орграфі для розв'язування класичних задач *заміни устаткування*, *розподілу коштів* між підприємствами, *розподілу обмеженого ресурсу* (завантаження транспортного засобу чи задача про рюкзак).

2. Задача заміни устаткування

Задача заміни устаткування полягає у визначенні оптимальних термінів заміни старого устаткування новим. Унаслідок старіння устаткування зростають виробничі витрати, витрати на ремонт і обслуговування, знижуються продуктивність і ліквідна вартість. Критерієм оптимальності слугують сумарні витрати на обслуговування устаткування протягом планового періоду. Розглянемо цю задачу в спрощеній постановці. Дано:

- первісна вартість устаткування *cost*;
- ліквідна вартість устаткування *likv*(*j*), вік якого *j* років;
- затрати *zatr*(*j*) на обслуговування протягом року устаткування, що до початку річного періоду вже експлуатувалося *j* років.

Наприкінці експлуатаційного періоду наявне устаткування необхідно продати. Визначити оптимальну стратегію заміни устаткування за період *n* років, яка мінімізує сумарні витрати на обслуговування устаткування.

➢ Поточний стан цієї системи визначається двома параметрами *k* та *j*, де *k* – кількість років, які минули від початку першого придбання устаткування, *j* – вік устаткування, що експлуатується на даний момент. Стан системи зручно позначати через s_{kj}. *Множина локальних керувань* будь-якого стану складається з керувань:

- "*заміна*" – продаж старого устаткування і купівля нового;
- "*збереження*" – продовження експлуатації устаткування протягом наступного року.

Отже, "*заміна*" переводить систему зі стану s_{kj}.у стан $s_{k+1,1}$, а "*збереження*" – зі стану s_{kj} у стан $s_{k+1,\,j+1}$.

Витрати на обслуговування устаткування після вибору керування у стані s_{kj} визначаються такою формулою:

$$a_{kj} = \begin{cases} cost + zatr(0) - likv(j), \text{якщо "заміна";} \\ \quad zatr(j), \quad \text{якщо "збереження".} \end{cases} \qquad (\ \ 1)$$

Додамо фіктивний стан s_t, у який переходить система після закінчення експлуатаційного періоду в результаті продажу наявного устаткування (перехід у стан s_t може відбутися зі станів s_{n1}, s_{n2}, …, s_{nn}). Розглянемо задачу за таких даних: $n = 4$, $cost = 2000$,

j	0	1	2	3	4
$likv(j)$	–	900	750	500	200
$zatr(j)$	100	800	1200	1600	–

Орграф задачі заміни устаткування зображено на рис. 4.1. У вершинах орграфа вказані поруч індекси k та j стану s_{kj} (t – індекс кінцевого стану). Орграф є ациклічним.

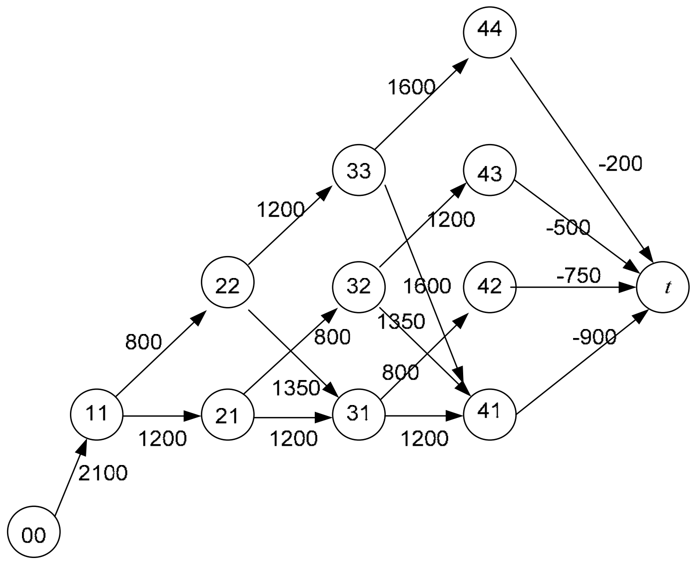

Рис. 1. Орграф задачі заміни устаткування

Дуги, що з’єднують стани s_{kj} та $s_{k+1,\ j+1}$, відповідають керуванню “*збереження*”. Дуги, що з’єднують стани s_{kj} та $s_{k+1,1}$, відповідають керуванню “*заміна*”. Ваги дуг відповідних керувань обчислюють згідно з (1) і є витратами на обслуговування устаткування після вибору керування у стані s_{kj} (ваги зазначені поблизу дуг).

Продаж устаткування на останньому році експлуатації (k = 4) означає чистий прибуток, отож у задачі мінімізації витрат цей прибуток треба зображати від’ємним числом.

Шлях мінімальної довжини, що з’єднує вершини s_{00} і s_t, визначатиме оптимальну стратегію заміни устаткування даної системи. Для визначення цього шляху використаємо *принцип динамічного програмування*, яке на мові теорії графів означатиме використання алгоритму визначення найкоротшого шляху в ациклічному орграфі при переміщенні від *витоку* (s_t) до *джерела* (s_{00}). Для реалізації такого варіанта алгоритму необхідно поміняти напрям усіх дуг орграфа (умовно).

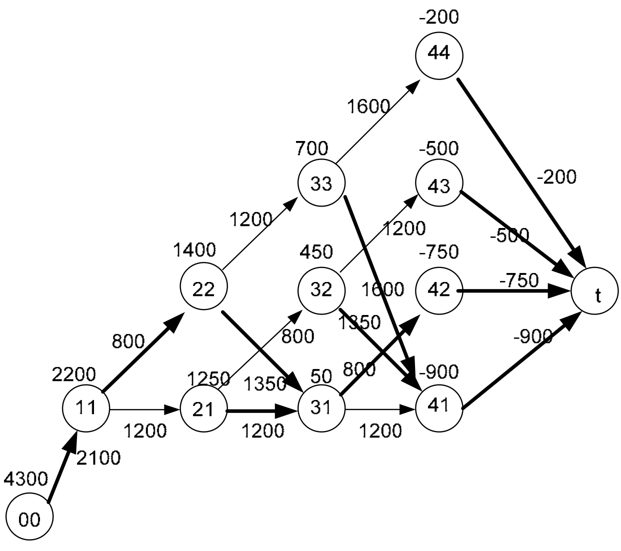

Рис. 2. Розв’язок задачі заміни устаткування

Отже, оптимальний шлях простягається через вершини s_{00}, s_{11}, s_{22}, s_{31}, s_{42} і визначає стратегію заміни обладнання на чотири роки: “*купівля*”, “*збереження*” (після першого року), “*заміна*” (після другого року), “*збереження*” (після третього року), “*продаж*” (після четвертого року, згідно з вимогами). Мінімальні витрати на обслуговування устаткування протягом чотирьох років становитимуть 4300 одиниць грошей. ≺

3. Задача оптимального розподілу коштів

Групі з m підприємств виділено додаткові кошти на реконструкцію і модернізацію виробництва. Відома матриця A, у якій на позиції (i, j) розташована величина $a_{ij} \geq 0$, яка дорівнює приросту випуску продукції на i–му ($i = \overline{1, m}$) підприємстві за умови виділення йому додаткових коштів у розмірі j ($j = \overline{0, n}$) грошових одиниць. Необхідно так розподілити між підприємствами загальну суму коштів у n грошових одиниць, щоб сумарний приріст випуску продукції був максимальним.

➢ Поточний стан такої системи визначається двома параметрами i та j, які означають, що i підприємствам уже надано суму j грошових одиниць. Стан системи зручно позначати через s_{ij}. Множина $\varphi(s_{ij})$ складається з локальних керувань “виділити k грошових одиниць $(i + 1)$-му підприємству”, $k = 0,1, \ldots, n–j$. За такого локального керування система зі стану s_{ij} переходить у стан $s_{i+1, j+k}$.

Розглянемо цю задачу за таких вихідних даних:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 18 \\ 2 & 12 & 35 \\ 3 & 14 & 29 \end{pmatrix}, \ m = 3, \ n = 2.$$

Орграф задачі зображено на рис. 4.3. У вершинах орграфа вказано поруч індекси i та j стану s_{ij}. Орграф є ациклічним. Прибуток від отриманих коштів зображають на відповідних дугах. Шлях максимальної довжини, що з’єднує вершини s_t і s_{00}, визначатиме оптимальну стратегію розподілу коштів між підприємствами. Довжину *найдовшого шляху* з відповідної вершини до витоку зображено над відповідною вершиною. Дуги, які демонструють найдовший шлях, зображено потовщено.

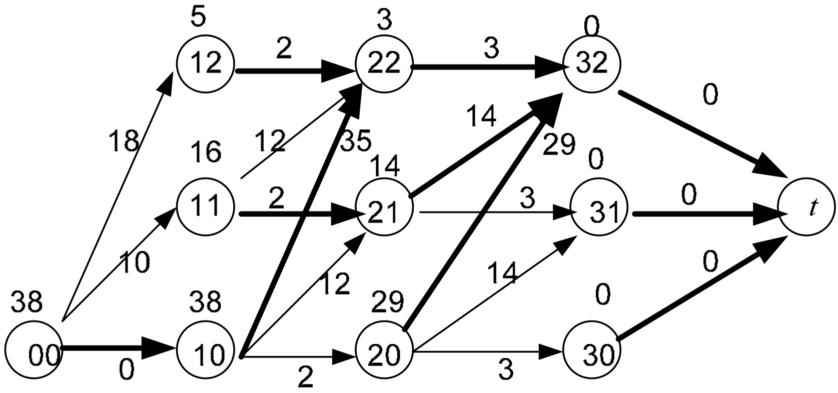

Рис. .3. Орграф задачі розподілу коштів

Отже, оптимальний шлях простягається через вершини s_{00}, s_{10}, s_{22}, s_{32} і визначає оптимальну стратегію "надати усі кошти (2 гр. од.) 2-му підприємству". Максимальний приріст випуску продукції у цьому випадку становитиме 38 одиниць. ∢

4. Задача оптимального розподілу обмеженого ресурсу

Підприємство для виробництва продуктів m найменувань використовує деякий ресурс, запаси якого обмежені величиною n (відоме натуральне число). Для виробництва одиниці продукту i-го найменування необхідно витратити q_i одиниць ресурсу (відоме натуральне число, $q_i \le n$), а прибуток від цього становить c_i умовних грошових одиниць. Визначення кількості виробництва x_i ($i = \overline{1, m}$) продуктів i-го найменування, які забезпечують максимальний сумарний дохід, приводить до такої задачі:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} c_i x_i \to \max; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} q_i x_i \le n, \quad x_i \in N \cup \{0\}, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \qquad (.2)$$

➢ Поставлена задача є статичною задачею ухвалення рішень. Однак, якщо з певних причин виробництво різних продуктів необхідно здійснювати послідовно (спочатку 1-й продукт, потім 2-й і т.д.), то отримуємо багатокрокову задачу ухвалення рішень (4.2), яку і розглядатимемо далі.

Нехай y_i – *сумарна* кількість використаного ресурсу при виробництві продуктів з найменуваннями від i до m, а $f_i(y_i)$ – *максимальний прибуток*, який при цьому можна отримати. Згідно з принципом динамічного програмування отримуємо (квадратні дужки [...] позначають цілу частину частки):

$$f_i(y_i) = \max_{x_i = 0,1,\ldots,\left[n/q_i \right]} \left\{ c_i x_i + f_{i+1}(y_{i+1}) \right\},\ i = \overline{1, m},\ \text{де } f_{m+1}(y_{m+1}) = 0. \quad (4.3)$$

Задача розподілу обмеженого ресурсу еквівалентна класичній задачі про рюкзак (або задачі про завантаження):

- туристу треба визначити найнеобхідніші (найцінніші речі), які доведеться розмістити у наплічнику обмеженого об'єму;
- завантажується транспортний засіб (автомобіль, судно, літак тощо), що має обмеження на об'єм чи вантажопідйомність.

Нехай автомобіль вантажопідйомністю n завантажується предметами m найменувань. Для i-го найменування ($i = \overline{1,m}$) відомі величини: c_i – прибуток від завантаження одного предмета і q_i – вага одного предмета. Знайти кількості x_i ($i = \overline{1,m}$) завантаження предметів i-го найменування, які забезпечать максимальний сумарний дохід. Відповідно до зроблених припущень отримуємо рівняння (3).

➢ Поточний стан зазначеної системи визначають два параметри i та j, які означають, що предмети з i найменувань ($i = \overline{1,m}$) уже завантажені з сумарною вагою j одиниць. Стан системи позначатимемо через s_{ij}. Множина $\varphi(s_{ij})$ складається з локальних керувань "завантажити x_{i+1} предметів $(i + 1)$-го найменування", $x_{i+1} = 0,1,\ldots,\left[n/q_{i+1} \right]$.

За такого локального керування система зі стану s_{ij} переходить у стан $s_{i+1,\,j+x_{i+1}\cdot q_{i+1}}$.

Розглянемо цю задачу за таких вихідних даних (n =4):

Предмет (i)	1	2	3
Вага одного предмета (q_i)	2	3	1
Прибуток від завантаження одного предмета (c_i)	28	45	12

Орграф задачі зображено на рис. 4. У вершинах орграфа позначено поруч індекси i та j стану s_{ij}. Орграф є ациклічним (за властивостями динамічної системи). Максимальне значення кількості завантаження першого предмета дорівнює [4/2] = 2 (тобто $x_1 = 0,\ 1, 2$). Аналогічно $x_2 = 0,\ 1$; $x_3 = 0,\ 1, 2,\ 3,\ 4$. Прибуток від завантаження відповідної кількості предмета вказують на дугах.

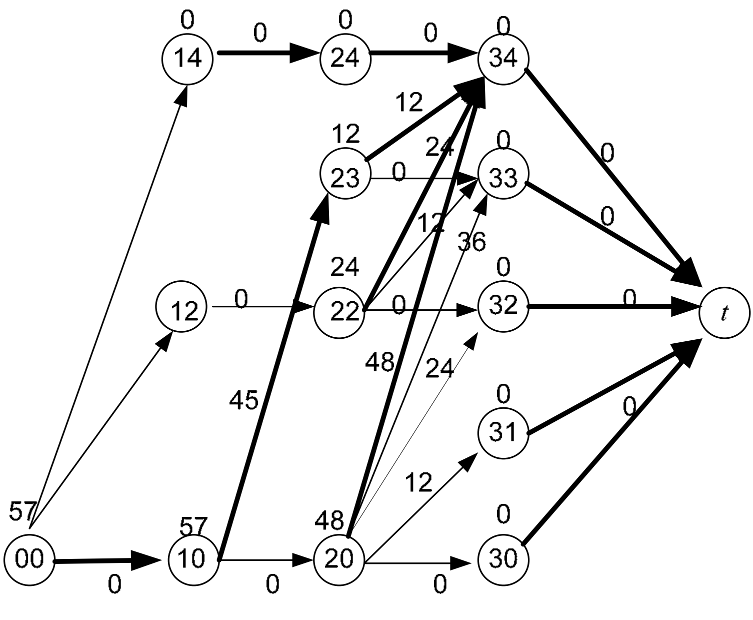

Рис. 4. Орграф задачі завантаження автомобіля

Шлях максимальної довжини, що з'єднує вершини s_t і s_{00} визначатиме оптимальну стратегію завантаження автомобіля. Довжину *найдовшого шляху* від витоку до певної вершини зображають над цією вершиною. Дуги, які складають найдовший шлях, зображені потовщеною лінією.

Оптимальний шлях перетинає вершини s_{00}, s_{10}, s_{23}, s_{34} і визначає оптимальну стратегію "завантажити по одному предмету 2-го і 3-го найменування". Прибуток становитиме 57 гр. од. ⮘

Зі збільшенням величини n у задачах динамічного програмування орграф стає перевантаженим різними позначеннями, отож його візуальний розв'язок є проблематичним. Реалізувати ці задачі без використання комп'ютера (за допомогою обчислень у таблиці) можна завдяки рекурентним рівнянням. Розглянемо рівняння (3). Виразимо y_{i+1} як функцію від y_i для гарантії того, що права частина (3) є функцією лише від y_i.

Оскільки y_{i+1} – *сумарна* кількість використаного ресурсу при виробництві продуктів з найменуваннями від i+1 до m, то $y_i - y_{i+1}$ – є кількістю використаного ресурсу при виробництві продукту з найменуванням i, тобто $y_i - y_{i+1} = q_i x_i$ (або $y_{i+1} = y_i - q_i x_i$). Тоді

$$\mathrm{f}_i(y_i) = \max_{\substack{x_i = 0,1,\dots,\left[b/q_i \right] \\ y_i = 0,1,\dots,n}} \left\{ c_i x_i + \mathrm{f}_{i+1}(y_i - q_i x_i) \right\},\ i = \overline{1,m};\ \mathrm{f}_{m+1}(x_{m+1}) = 0. \quad (4.4)$$

➢ Розв'яжемо задачу про оптимальне завантаження автомобіля за допомогою табличних обчислень (табл. 1 – 3) згідно з формулою (4).

Таблиця 1. Третій етап обчислень

y_3	$12 \cdot x_3$					Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 0$	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$f_3(x_3)$	x_3^*
0	0	–	–	–	–	0	0
1	0	12	–	–	–	12	1
2	0	12	24	–	–	24	2
3	0	12	24	36	–	36	3
4	0	12	24	36	48	48	4

Таблиця 2. Другий етап обчислень

y_2	$45\cdot x_2 + f_3(y_2–3\cdot x_2)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_2 = 0$	$x_2 = 1$	$f_2(x_2)$	x_2^*
0	0 + 0 = 0	–	0	0
1	0 + 12 = 12	–	12	0
2	0 + 24 = 24	–	24	0
3	0 + 36 = 36	45 + 0 = 45	45	1
4	0 + 48 = 48	45 + 12 = 57	57	1

Таблиця 3. Перший етап обчислень

y_1	$28\cdot x_1 + f_2(y_1–2\cdot x_1)$			Оптимальний розв'язок	
	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$f_1(x_1)$	x_1^*
0	0 + 0 = 0	–	–	0	0
1	0 + 12 = 12	–	–	12	0
2	0 + 24 = 24	28 + 0 = 28	–	28	1
3	0 + 45 = 45	28 + 12 = 40	–	45	0
4	0 + 57 = 57	28 + 24 = 52	56 + 0 = 56	57	0

Вибір оптимального розв'язку. На першому етапі $x_1^* = 0$, $y_1 = 4$. З формули $y_2 = y_1–2\cdot x_1$ отримуємо $y_2 = 4$. На другому етапі $x_2^* = 1$. З формули $y_3 = y_2–3\cdot x_2$ отримуємо $y_3 = 1$. На третьому етапі $x_3^* = 1$.

У таблиці для першого етапу необхідно отримати розв'язок лише для $y_1 = 4$. Однак таблиця налічує обчислення і для $y_1 = 0$, 1. 2, 3, які дають змогу проаналізувати чутливості розв'язків. Наприклад, якщо вантажопідйомність $n = 3$, то оптимальний розв'язок можна знайти, починаючи з $y_1 = 3$. ≺

? Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте задачу пошуку оптимального керування у динамічній системі.
2. Сформулюйте задачу заміни устаткування. Опишіть можливі стани та локальні керування відповідної динамічної системи.
3. Сформулюйте задачу розподілу коштів між підприємствами. Опишіть можливі стани та локальні керування відповідної динамічної системи.