Динамічне програмування

Сутність динамічного програмування. Принципи оптимальності

Усі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки функціонують і розвиваються не лише у просторі, а й у часі.

Народне господарство, його галузі, регіони чи окремі підприємства мають розробляти стратегічні і тактичні плани. Перші визначаються з допомогою динамічних моделей, розв'язки яких знаходять методами динамічного програмування. Зауважимо, що сума оптимальних планів на окремих відрізках планового періоду Т не завжди являє собою план, оптимальний на всьому такому періоді.

Розглянемо задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, які можуть бути використані двома способами. Відомо, що за першого способу отримаємо прибуток $g(x)$, а за другого — $h(y)$.

У такому разі однокрокову задачу можна подати у вигляді:

$$Z = g(x) + h(y) \to \max$$

за умов

$$x + y = b,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

Нехай

$Z = Z_1, \quad b = b_1, \quad x = x_1, \quad y = b_1 - x_1.$

Тоді дану задачу можна записати так:

$Z = g(x) + h(b_1 - x_1) \to \max.$

Розглянемо її як задачу оптимального використання капітальних вкладень за окремими інтервалами планового періоду T, маючи на меті розподілити залишок капітальних вкладень на кінець j-го інтервалу (j = 1, 2, …, n) двома зазначеними способами. При цьому критерій оптимізації не змінюється: максимізуємо обсяг прибутку за весь плановий період T.

Якщо на першому інтервалі використано b_1 капітальних вкладень, то на його кінець залишилося їх:

$$b_2 = cx_1 + d\left(b_1 - x_1\right),$$

де c, d — коефіцієнти пропорційності, що характеризують використання капітальних вкладень першим і другим способами: $\dfrac{x}{b_1 - x_1} = \dfrac{c}{d}$.

Задачу для другого інтервалу подамо так:

$$Z_2 = \left[g\left(x_2\right) + h\left(b_2 - x_2\right)\right] \to \max$$

за умов

$$0 \le x_2 \le b_2.$$

Звідси для будь-якого j-го інтервалу маємо:

$$Z_j = \left[g\left(x_j\right) + h\left(b_j - x_j\right)\right] \to \max$$

за умов

$$0 \le x_j \le b_j.$$

Загальна задача набирає вигляду:

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{j=1}^{n}\left[g\left(x_j\right) + h\left(b_j - x_j\right)\right] \to \max$$

за умов $0 \le x_j \le b_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right)$,

$$b_j = cx_{j-1} + d\left(b_{j-1} - x_{j-1}\right),\ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Таку задачу розв’язують спеціальними методами.

Методика розв’язування динамічних задач

Динамічний процес розбивається на сукупність послідовних етапів, або кроків. Кожний крок оптимізується окремо, а рішення (розв’язок), згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається з урахуванням його майбутніх наслідків і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. На останньому кроці приймається рішення (відшукується розв’язок), яке забезпечує максимальний ефект. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця: насамперед планується останній крок. Спираючись на відому інформацію про закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називають ***умовно оптимальним***, оскільки знаходять його за припущення, що попередній крок було здійснено згідно з однією з можливих гіпотез.

Нехай аналізується деякий керований процес, перебіг якого можна розбити на послідовні етапи (кроки), що задаються. Ефективність всього процесу Z є сумою ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} Z_j \quad \text{(адитивний критерій)}$$

або

$$Z=\prod_{j=1}^{n} Z_j \quad \text{(мультиплікативний критерій).}$$

З кожним кроком задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** X_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всієї операції в цілому.

У задачі динамічного програмування знаходять таке управління $X=\left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right)$ всією операцією, яке максимізує загальну її ефективність:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} Z_j \to \max.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається із сукупності оптимальних покрокових управлінь

$$X^*=\left(x_1^*,\, x_2^*,\, ...,\, x_n^*\right)$$

і забезпечує максимальну ефективність Z^*

$$Z^*=\max_{x\in X}\left\{Z\left(x\right)\right\}.$$

Усі класи задач динамічного програмування розв'язують, керуючись основним принципом: яким би не був стан системи S перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибрати так, щоб ефективність розглядуваного кроку плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

Отже, маємо алгоритм розв’язування задач динамічного програмування.

1. Специфікуємо стан заданої керованої системи та множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи обираємо, маючи на меті забезпечити зв’язок між послідовними етапами перебігу процесу і знайти допустимий розв’язок задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо. При цьому оптимальні рішення на наступних етапах приймаємо, нехтуючи впливом подальших рішень на прийняті раніше.

2. Розбиваємо динамічний процес (операцію) на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам планування або окремим об’єктам (підприємствам, видам продукції, устаткування і т. ін.), стосовно яких розробляються управлінські рішення.

3. Подаємо перелік управлінських рішень x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначаємо ефект, що його забезпечує управлінське рішення x_j на j-му кроці, якщо перед тим система була у стані S, як функцію ефективності:

$$Z=\left\{g\left(x\right)+h\left(b_1-x_1\right)\right\}\to\max.$$

5. Досліджуємо, як змінюється стан S системи під впливом управлінського x_j на j-му кроці, переходячи до нового стану:

$$S'=\phi_j\left(s,\ x_j\right).$$

6. Будуємо для розглядуваної задачі рекурентну залежність, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j\left(s\right)$, починаючи з j-го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}\left(s'\right)$:

$$Z_j\left(s\right)=\max_{X_j}\left\{f_j\left(s,\ x_j\right)+Z_{i+1}\left(s,\ x_j\right)\right\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на j-му кроці $\left(x_j\left(s\right)\right)$. Зауважимо, що за аргумент функції $Z_{j+1}\left(s\right)$ беремо не s, а змінений стан системи, тобто $s' = \phi_j\left(s,\ x_j\right)$.

7. Здійснюємо умовну оптимізацію останнього n-го кроку, розглядаючи множину станів s, що на один крок віддалені від кінцевого стану, і визначаємо умовний оптимальний ефект на n-му кроці:

$$Z_n\left(s\right) = \max_{X_n}\left\{ f_n\left(s,\ x_n\right)\right\}.$$

Далі знаходимо умовне оптимальне управлінське рішення $x_n(s)$, завдяки якому цей максимум досягається.

8. Виконуємо умовну оптимізацію (n – 1)-го, (n – 2)-го і т. д., тобто всіх попередніх кроків за рекурентними залежностями п. 6, і для кожного кроку знаходимо умовне оптимальне управління:

$$Z^* = Z_1\left(s_0\right).$$

9. Здійснюємо безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямі — від початкового стану s_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці $x_1^* = x_1\left(s\right)$ змінюємо стан системи згідно з п. 5. Далі для цього нового стану знаходимо оптимальне управління на другому кроці x_2^* і діємо так до останнього кроку.

Приклади розв'язування динамічних задач

Задача 1. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного з підприємств розроблено інвестиційні проекти, які відбивають прогнозовані сумарні витрати C та доходи D, пов'язані з реалізацією кожного проекту. Зміст цих проектів ілюструє таблиця:

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект передбачає відмовитися від розширення підприємства, а тому має нульові витрати і доходи. Розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язування. Спрощеним і найменш ефективним способом розв'язування таких задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про неприпустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу за алгоритмом (методом) ***зворотного прогону***. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженнями на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — те саме на кроках 2—4;

x_3 — те саме на кроках 3 і 4;

x_4 — те саме на кроці 4.

k_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяги інвестицій на i-му підприємстві $\left(k_i = 0, 1, 2, 3, 4\right)$.

k_i^* $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальні обсяги інвестицій на i-му підприємстві.

Рекурентне співвідношення для зворотного прогону від кроку 4-го до 1-го (від четвертого підприємства до першого) подається у вигляді:

$$f_i^*\left(x_5\right)=0,$$

$$f_i^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i - C_i\left(k_i\right)\right)\right\} \qquad \left(i=\overline{1,4}\right),$$

$C_j\left(k_i\right)\le X_i$,

де $f_i^*\left(x_i;k_i\right)$ — сумарна ефективність інвестицій з i-го кроку до останнього.

Тут $f^*\left(x_5\right)=0$, оскільки п’ятого підприємства не існує.

Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап 4.

$$f_4^*\left(x_j k_i\right)=\max_{k_i}\left\{D_i\left(k_i\right)+f_{i+1}^*\left(x_i - C_i\left(k_i\right)\right)\right\}.$$

Результати розрахунків подамо таблицею:

x_4	Дохід $f_4\left(x_4;k_4\right)=D_4\left(k_4\right)+f_5^*\left(x_5\right)$					Оптимальний розв’язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f_4^*(x_4)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

Етап 3.

$$f_3^*\left(x_3\right)=\max_{k_3}\left\{D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)\right\}$$

за умов

$$C_3\left(k_3\right)\le X_3,\ k_3=0, 1, 2, 3, 4.$$

Результати розрахунків відбиває таблиця:

x_3	Дохід $f_3\left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*\left(x_3\right)$	k_3^*
0	$0+f_4^*(0-0)=$ $=0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*(1-0)=$ $=0+2=2$				2	0
2	$0+f_4^*(2-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(2-2)=$ $=4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*(3-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(3-2)=$ $=4+2=6$	$9+f_4^*(3-3)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*(4-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(4-2)=$ $=4+8=12$	$9+f_4^*(4-3)=$ $=9+2=11$	$12+f_4^*(4-4)=$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконуються так. Нехай потрібно знайти $f_3^*\left(x_3=3\right)$. Обчислюємо

$$f_3\left(x_3;k_3\right)=D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right).$$

Отже,

$$f_3\left(x_3=3;k_3=1\right)=0+f_4^*\left(3-0\right)=0+f_4^*\left(3\right)=0+8=0,$$

$$f_3\left(x_3=3;k_3=2\right)=4+f_4^*\left(3-2\right)=4+2=6,$$

$$f_3\left(x_3=3;k_3=3\right)=9+f_4^*\left(3-3\right)=9+0=9.$$

Зауважимо, що $C_3\left(k_3=1\right)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)$ беремо з попередньої таблиці. Далі маємо:

$$f_3^*\left(x_3\right)=\max_{K_3=1,2,3}\left\{D_3\left(k_3\right)+f_4^*\left(x_3-C_3\left(k_3\right)\right)\right\}=\max\left\{0,6,9\right\}=9$$

Етап 2.

$$f_2^*(x_2) = \max_{k_2}\left\{D_2(k_2) + f_3^*\left(x_2 - C_2(k_2)\right)\right\}$$

за умов

$$C_2(k_2) \le x_2,\ k_2 = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Результати розрахунків подаємо таблицею:

x_2	Дохід $f_2(x_2;k_2) = D_2(k_2) + f_3^*(x_3 - C_2(k_2))$					Оптимальний розв'язок	
	$k_2=0$	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_2=3$	$k_2=4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1) = \max_{k_1}\left\{D_1(k_1) + f_2^*\left(x_1 - C_1(k_1)\right)\right\}$$

за умов

$$C_1(k_1) \le x_1,\ k_1 = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Виконуємо розрахунки лише для x_1 = 4, подаючи їх у вигляді таблиці:

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$k_1=4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3+f_2^*(4-1)=$ $=3+12=15$	$5+f_2^*(4-2)=$ $=5+6=11$	$7+f_2^*(4-3)=$ $=7+4=11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, який використовує 1 млн грн. інвестицій з ефективністю 3 млн грн. Отже, для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4 – 1 = 3 млн грн. інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов

$x_2 = 3$ максимальний ефект настає в разі реалізації для другого підприємства першого проекту ($k_2 = 1$), ефективність становить 4 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн грн. інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов $x_3 = 2$ маємо, що $k_3 = 0$. Отже, $x_4 = 2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4 = 2$, ефективність яких 8 млн грн. Остаточно маємо: ефективність 4 млн грн. інвестицій становить 3 + 4 + 8 = 15 (млн грн.).

Задача 2. Підприємство розробляє стратегію поповнення запасів деякої продукції для заданого періоду часу, який складається з N етапів (підперіодів). Для кожного з них відомий розмір попиту, причому він не є однаковим для всіх етапів. Щоб задовольнити попит, підприємство може придбати необхідну кількість продукції, замовивши її у виробника, або виготовити її самостійно. Передбачається, що запаси поповнюються миттєво, запізнення поставки та дефіцит неприпустимі. Залежно від ринкової кон’юнктури підприємству може бути вигідно створювати запаси продукції для задоволення попиту в майбутні періоди часу, що пов’язано, проте, з додатковими витратами на зберігання запасів.

Розробити програму управління запасами підприємства, тобто визначити обсяги замовлення й період його розміщення, щоб загальні витрати на постачання та зберігання продукції були мінімальними, а попит задовольнявся повністю й своєчасно.

Дані задачі вміщено в таблиці:

Період часу (квартал року)	Попит на продукцію, тис. од.	Витрати на розміщення замовлення, тис. грн.	Витрати на зберігання, тис. грн.
1	4	7	2
2	5	8	3
3	3	6	1
4	2	9	0

Відомо, що на початку планового періоду запас становить 2 тис. од., а під час купівлі продукції діє система оптових знижок. Витрати на придбання 1 тис. од. продукції становлять 15 тис. грн., а коли розмір замовлення перевищує 3 тис. од., витрати знижуються на 12% і становлять 12 тис. грн.

Нехай $N\left(i=\overline{1,N}\right)$ — кількість етапів планового періоду. Тоді для i-го етапу застосуємо такі позначення: x_i — запас продукції на початок етапу; y_i — обсяг замовленої продукції (розмір замовлення); h_i — витрати на зберігання 1 тис. од. продукції запасу; k_i — витрати на розміщення замовлення; β_i — попит на продукцію; $C_i y_i$ — витрати, що пов'язані із купівлею (виробництвом) продукції y_i.

Визначимо $f\ (x_i,\ y_i)$ як мінімальні витрати на етапах $i,\ i+1,\ ...,\ N$, якщо рівень запасів x_i.

Рекурентні залежності, що відповідають схемі зворотного прогону, набирають вигляду:

$$f_i^*\left(x_i\right)=\min_{y_i} f\left(x_i;y_i\right)=\min_{y_i}\left\{C_i y_i+k_i+h_i\left(x_i\right)+f_{i+1}\left(x_i+y_i-\beta_i\right)\right\}$$

за умов

$$\beta_i \le x_i+y_i \le \beta_i+...+\beta_N\,,\quad i=\overline{1,N}\,,\quad y_i \ge 0\,.$$

Для N-го етапу маємо:

$$f_N^*\left(x_N\right)=\min_{y_N}\left\{C_N y_N+k_N\right\}$$

за умов

$$x_N+y_N=\beta_N\,,\quad y_N \ge 0\,.$$

Розглянемо покроковий розрахунок оптимальної стратегії управління запасами.

Етап 4. Маємо $\beta_4=2$

$$f_4\ \left(x_4\right)=\min_{x_4,y_4}\left\{C_N y_N+k_N\right\}$$

за умов

$$x_4+y_4=2\,.$$

Можливі варіанти розв'язків ілюструє таблиця:

x_4	$f(x_4)$			Оптимальний розв’язок	
	$y_4 = 0$	$y_4 = 1$	$y_4 = 2$	$f_4^*(x_4)$	y_4^*
0			$9+2\cdot 15=39$	39	2
1		$9+1\cdot 15=24$		24	1
2	$0+0\cdot 15=0$	$9+1\cdot 15=24$		0	0

Етап 3. Маємо $\beta_3 = 3$.

$f_3^*(x_3) = \min\limits_{y_3}(x_i; y_i) = \min\limits_{y_i}\{k_3 + C_3 y_3 + h_3 \cdot x_3 + f_4^*(x_3 + y_3 - \beta_3)\}$ за умов $3 \le x_3 + y_3 = 3 + 2$.

Результати розрахунків подамо у вигляді таблиці:

x_3	Доходи $f_3(x_3;k_3) = D_3(k_3) + f_4^*(x_3 - C_3(k_3))$						Оптимальний розв'язок	
	$y_3 = 0$	$y_3 = 1$	$y_3 = 2$	$y_3 = 3$	$y_3 = 4$	$y_3 = 5$	$f_3^*(x_3)$	y_3^*
0				$6 + 3 \cdot 15 + {} +39 = 90$	$6 + 4 \cdot 12 + {} +24 = 78$	$6 + 5 \cdot 12 + {} +0 = 66$	66	5
1			$6 + 2 \cdot 15 + {} +1 \cdot 1 + 39 = 76$	$6 + 3 \cdot 15 + {} +1 \cdot 1 + 39 = 76$	$6 + 3 \cdot 12 + {} 1 \cdot 1 + 0 = 55$		55	4
2		$6 + 1 \cdot 15 + {} +2 \cdot 1 + 39 = 62$	$6 + 2 \cdot 15 + {} +2 \cdot 1 + 24 = 62$	$6 + 3 \cdot 15 + {} +2 \cdot 1 + 0 = 53$			53	3
3	$3 \cdot 1 + 39 = 42$	$6 + 1 \cdot 15 + {} +3 \cdot 1 + 24 = 48$					39	2
4	$4 \cdot 1 + 24 = 48$	$6 + 1 \cdot 15 + {} +4 \cdot 1 + 0 = 25$					25	1
5	$5 \cdot 1 + 0 = 5$						5	0

Розрахунки виконуємо так. Наприклад, обчислимо $f_3^*\left(x_3\right)$ і y_3^*. Оскільки за умовою $3 \le x_3 + y_3 \le 5$, то x_3 може набувати значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, а y_3 — відповідно значень 0, 1, 2, 3, 4, 5. Тепер знайдемо $f_3^*\left(x_3\right)$ і y_3^* для $x_3 = 2$ і $y_3 = 1, 2, 3$. Для $x_3 = 2$ і $y_3 = 1$ маємо:

$$f_3\left(x = 2; y_3 = 1\right) = k_3 + 1 \cdot C_3 + h_3 \cdot 2 + f_4^*\left(0\right) = \\ = 6 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + 39 = 62.$$

Аналогічно:

$$f_3\left(x = 2; y_3 = 2\right) = 6 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + f_4\left(1\right) = \\ = 6 + 30 + 2 + 24 = 62,$$

$$f_3\left(x = 2; y_3 = 3\right) = 6 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 1 + f_4\left(2\right) = \\ = 6 + 45 + 2 + 0 = 53.$$

Далі обчислюємо:

$$f^*\left(x = 2\right) = \min_{y_N} \left\{ \begin{matrix} f_3\left(x = 2; y = 1\right) \\ f_3\left(x = 2; y = 2\right) \\ f_3\left(x = 2; y = 3\right) \end{matrix} \right\} = \min\left(62,\ 62,\ 53\right) = 53.$$

Отже, $f^*\left(x = 2\right) = 53$ при $y^* = 3$.

Так само виконуємо розрахунки для x = 1, 2, 3, 4, 5, а результати вміщуємо у відповідну таблицю.

Етап 2. У таблицю записуємо лише остаточні результати:

Маємо $\beta_3 = 5$.

$$f_2^*\left(x_2\right) = \min_{y_2}\left\{k_2 + C_2 y_2 + h_2 x_2 + f_3^*\left(x_2 + y_2 - \beta_2\right)\right\}$$

за умов

$$5 \le x_2 + y_2 \le 5 + 3 + 2 = 10.$$

Етап 1. Діємо так, як і на етапі 2, складаючи таблицю результатів:

x_2	$f(x_2)$											Оптимальні розв’язки	
	$y_2=0$	$y_2=1$	$y_2=2$	$y_2=3$	$y_2=4$	$y_2=5$	$y_2=6$	$y_2=7$	$y_2=8$	$y_2=9$	$y_2=10$	$f_2^*(x_2)$	y_2^*
$x_2=0$						134	135	145	143	141	133	133	10
$x_2=1$					125	126	136	134	132	124		124	9
$x_2=2$				125	117	127	125	123	115			115	8
$x_2=3$			113	117	118	116	114	106				106	7
$x_2=4$		101	105	118	107	105	97					97	6
$x_2=5$	81	93	106	107	96	88						81	0
$x_2=6$	73	94	95	96	79							73	0
$x_2=7$	74	83	74	79								74	0 або 2
$x_2=8$	63	72	67									63	0
$x_2=9$	52	55										52	0
$x_2=10$	35											35	0

x_1	$f_1(x_1)$											Оптимальні розв'язки	
	$y_1 = 2$	$y_1 = 3$	$y_1 = 4$	$y_1 = 5$	$y_1 = 6$	$y_1 = 7$	$y_1 = 8$	$y_1 = 9$	$y_1 = 10$	$y_1 = 11$	$y_1 = 12$	$f_1^*(x_1)$	y_2^*
2	174	180	174	177	180	176	180	193	194	195	180	174	2 або 4

Маємо β1 = 4.

$$f_1^*(x_1) = \min_{y_1} \left\{ k_1 + C_1 y_1 + h_1 x_1 + f_2^*(x_1 + y_1 - \beta_1) \right\}$$

за умов

$$4 \le x_1 + y_1 \le 4 + 5 + 3 + 2 = 14 .$$

Отже, дістали два оптимальні плани управління запасами підприємства, яким відповідають мінімальні сумарні витрати на постачання та зберігання продукції.

Інформацію про перший оптимальний план містить таблиця:

Етап	Запас	Розмір замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1 = 2$	$y_1^* = 2$	$\beta_1 = 4$	$x_2 = 2 + 2 - 4 = 0$	$7 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 2 = 41$
2	$x_2 = 0$	$y_2^* = 10$	$\beta_2 = 5$	$x_3 = 0 + 10 - 5 = 5$	$8 + 10 \cdot 12 + 0 = 128$
3	$x_3 = 5$	$y_3^* = 0$	$\beta_3 = 3$	$x_4 = 5 + 0 - 3 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$
4	$x_4 = 2$	$y_4^* = 0$	$\beta_4 = 2$	$x_5 = 2 + 0 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
Разом					174

Інформація про другий оптимальний план:

Етап	Запас	Розмір замовлення	Попит	Залишок продукції на кінець етапу	Витрати на придбання продукції та її зберігання
1	$x_1 = 2$	$y_1^* = 4$	$\beta_1 = 4$	$x_2 = 2 + 4 - 4 = 2$	$7 + 4 \cdot 15 + 2 \cdot 2 = 59$
2	$x_2 = 2$	$y_2^* = 8$	$\beta_2 = 5$	$x_3 = 2 + 8 - 5 = 5$	$8 + 8 \cdot 12 + 2 \cdot 3 = 110$
3	$x_3 = 5$	$y_3^* = 5$	$\beta_3 = 3$	$x_4 = 5 + 0 - 3 = 2$	$5 \cdot 1 = 5$
4	$x_4 = 2$	$y_4^* = 2$	$\beta_4 = 2$	$x_5 = 2 + 0 - 2 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$
Разом					174

Порівнюючи ці два плани, бачимо, що відрізняються вони першими двома етапами і дають можливість маневрувати фінансовими ресурсами підприємства, що водночас вирішує ще низку проблем.