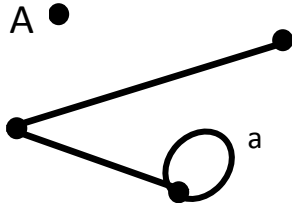


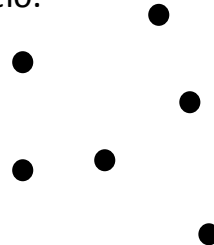
Основні поняття теорії графів

Графом називається сукупність точок (вершин) і ліній (ребер), що їх з'єднують.

Якщо ребро з'єднує дві вершини, то кажуть, що воно *інцидентне* цим вершинам, а вершини, які з'єднані таким ребром, називаються *суміжними*. Якщо кінці ребра належать одній вершині, то таке ребро називається *петлею*. На малюнку 1 ребро а є петлею.



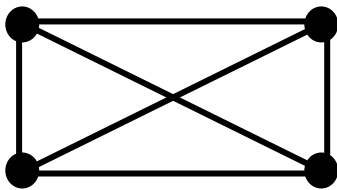
Мал.1



Мал.2

Вершини, які не належать кінцям жодного з ребер у графі, називаються *ізолюваними*. Прикладом ізолюваної вершини на малюнку 1 є вершина А. Граф, який складається лише з ізолюваних вершин, називається *нуль-графом* (мал.2)

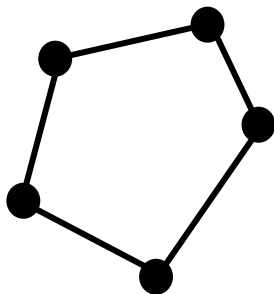
Граф, у якому будь-яка пара вершин з'єднана ребрами, називається *повним* (мал.3)



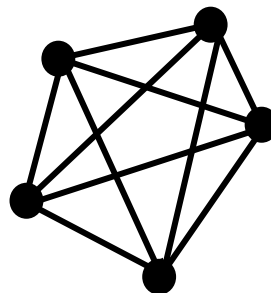
Мал.3

Степенем вершини називають число ребер, яким належить ця вершина.

Граф називають *зв'язним*, якщо будь-яка пара його вершин зв'язна. Повний граф завжди є зв'язним, але не всякий зв'язний граф є повним. Прикладом може бути будь-який багатокутник: він зв'язний, але не повний (мал. 4). Але якщо у цьому багатокутнику провести всі діагоналі, то отримаємо повний зв'язний граф (мал. 5).

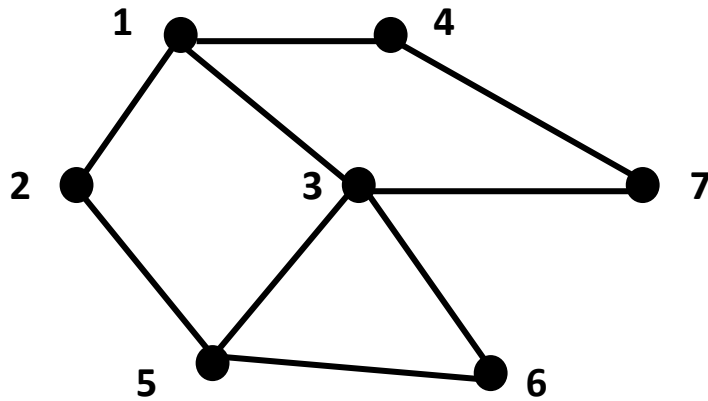


Мал.4



Мал.5

Циклом називається шлях, в якому збігаються початкова і кінцева вершини. На малюнку зображено граф, який для кожної вершини має по кілька циклів. Наприклад, для вершини 1 існує 6 циклів: (1-2, 2-5, 5-3, 3-1), (1-3, 3-7, 7-4, 4-1), (1-3, 3-5, 5-6, 6-3, 3-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-7, 7-4, 4-1), (1-3, 3-5, 5-6, 6-3, 3-7, 7-4, 4-1).



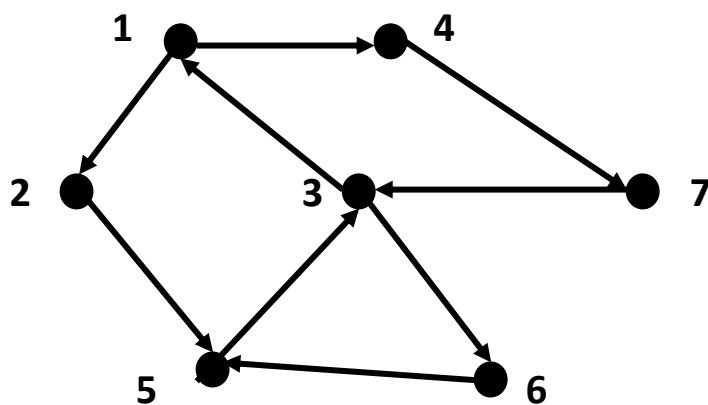
Мал.6

Якщо цикл через кожну вершину проходить лише один раз, то такий цикл називається **простим**. Як видно з малюнка 6, для вершини 1 існує чотири простих цикли: (1-2, 2-5, 5-3, 3-1), (1-3, 3-7, 7-4, 4-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-1), (1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-7, 7-4, 4-1).

Довжиною шляху (циклу) називається кількість ребер цього шляху (циклу). На малюнку 6 для кожного вказаного циклу вершини 1 неважко порахувати довжину: 4, 4, 5, 5, 7, 7.

Граф, який не має жодного циклу, називається деревом.

Граф, у якому для всіх ребер вказано напрям, називається орієнтованим, або орграфом (мал. 7).

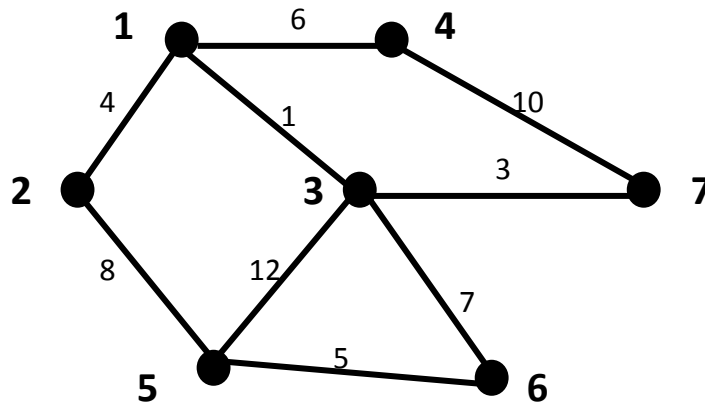


Мал.7

Для орієнтованих графів специфічним є визначення степенів вершин. Для кожної з них окремо визначається **вхідний степінь**, що дорівнює кількості ребер, які входять у вершину, і **вихідний степінь**, що визначається

кількістю ребер, які виходять з неї. Сума вхідного і вихідного степенів вершини орієнтованого графа називається степенем цієї вершини.

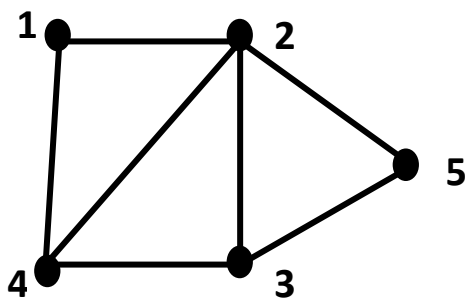
Якщо у графі вказана ще й «вага» кожного ребра, то такий граф називається **зваженим**. Існують неорієнтовані зважені графи та орієнтовані зважені графи (мал. 8).



Мал.8

Способи представлення графів

Існує два найпоширеніші способи представлення графів. Для прикладу розглянемо граф, зображений на малюнку 9.



Мал.9

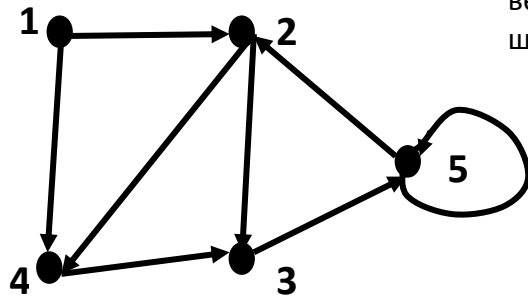
№ вершини	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	1
4	1	1	1	0	0
5	0	1	1	0	0

Мал.10

Перший спосіб передбачає задання матриці суміжності, яка для графа з n вершинами представляється двовимірним масивом $n \times n$.

Якщо матриця суміжності представляє неорієнтований незважений граф (мал. 9), то за наявності суміжності вершин i і j відповідні елементи матриці дорівнюють 1, тобто $a[i,j]=a[j,i]=1$, а у разі відсутності ребра між вершинами i та j – 0, тобто $a[i,j]=a[j,i]=0$ (мал. 10)

Особливістю незваженого орграфа, у якому присутні ребра-петлі, є те, що для відповідних вершин діагональні елементи матриці суміжності не дорівнюють 0 (мал. 11 та 12). Аналогічно буде ситуація і для неорієнтованих графів.

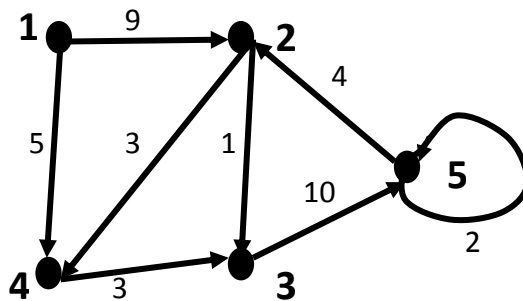


Мал.11

№ вершини	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0
5	0	1	0	0	1

Мал.12

Розглянемо тепер випадок зваженого графа. Елементи матриці суміжності $a[i,j]$, що відповідає такому графу, збігатимуться зі значеннями «ваги» ребер між вершинами i та j (мал. 13 та 14).



Мал.13

№ вершини	1	2	3	4	5
1	0	9	0	5	0
2	0	0	1	3	0
3	0	0	0	0	10
4	0	0	3	0	0
5	0	4	0	0	2

Мал.14

Другим способом представлення графа є **списки суміжних вершин**. У цьому разі для кожної вершини записується список суміжних вершин, який у довільному порядку містить усі суміжні з нею вершини.

Графу, зображеному на малюнку 9 відповідає список суміжних вершин:

- 1→2→4
- 2→1→5→3→4
- 3→2→4→5
- 4→1→3→2
- 5→3→2

Графу, зображеному на малюнку 11 відповідає список суміжних вершин:

- 1→2→4
- 2→3→4
- 3→5

$4 \rightarrow 3$

$5 \rightarrow 2 \rightarrow 5$

Графу, зображеному на малюнку 13 відповідає список суміжних вершин:

$1 \rightarrow 2_9 \rightarrow 4_5$

$2 \rightarrow 3_1 \rightarrow 4_3$

$3 \rightarrow 5_{10}$

$4 \rightarrow 3_3$

$5 \rightarrow 2_4 \rightarrow 5_2$