

Задачі та моделі заміни обладнання

Теоретична частина. Відомо, що чим довше експлуатується обладнання (машини, механізми, агрегати, виробничі будівлі тощо), тим вищі затрати на його обслуговування і нижче його продуктивність. Коли термін експлуатації досягає певного рівня, виникає необхідність заміни старого обладнання на нове. Таким чином, задача заміни обладнання зводиться до визначення оптимального терміну його експлуатації. Критерієм оптимальності при цьому може бути максимізація прибутку від експлуатації обладнання, або мінімізація сумарних витрат на експлуатацію обладнання на протязі певного проміжку часу.

Розглянемо плановий період (складається із декілька років), на початку якого є обладнання фіксованого віку. У процесі експлуатації обладнання дає щорічний дохід, вимагає експлуатаційних затрат і має і залишкову вартість, причому всі перераховані характеристики залежать від віку обладнання. У будь-який рік досліджуваного планового періоду старе обладнання можна зберегти або списати, продати за залишковою вартістю і купити замість нього нове за відомою ціною, яка також може змінюватися з часом.

Таким чином, задача заміни обладнання полягає в наступному: для планового періоду необхідно визначити оптимальну стратегію збереження або заміни обладнання, яка б забезпечила максимум прибутку за весь плановий період. Для розв'язання цієї задачі застосуються методи динамічного програмування.

Динамічне програмування представляє собою математичний апарат, який дає змогу здійснювати планування багатокрокових керованих процесів, а також процесів, які розвиваються у часі. При цьому економічний процес розбивається на ряд послідовних етапів (кроків) і прийняття рішень на кожному етапі повинно враховувати попередні зміни та бути підпорядковане кінцевому результату. Динамічне програмування дає змогу прийняти ряд послідовних рішень, що забезпечує оптимальність розвитку процесу в цілому. Основою методу розв'язання задач динамічного програмування є **принцип оптимальності Р. Белмана**, який формулюється так: **оптимальний розв'язок багатокрокової задачі $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ має таку властивість, що яким би не був стан системи b_i в результаті деякої кількості кроків, необхідно вибирати управління $b_{(i+1)}$ на найближчому кроці так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.**

При побудові динамічної моделі задачі процес заміни обладнання розглянемо як k -кроковий і плановий період робиться на $k = T$ кроків.

В процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатокроковий процес здійснюється двічі: **перший раз** - від кінця до початку, в результаті чого знаходять **умовно-оптимальні плани**, **другий раз** - від початку до кінця, в результаті чого знаходять вже **оптимальні покрокові управління**, тобто оптимальне управління процесом у цілому.

Для формулювання моделі заміни обладнання введемо позначення:

T – тривалість планового періоду, років;

t – вік обладнання ($t = 0$ – вік нового обладнання);

$r(t)$ – вартість продукції, виготовленої за 1 рік на обладнанні віком t років;

$u(t)$ – щорічні експлуатаційні затрати на обслуговування обладнання віком t років;

$s(t)$ – залишкова вартість обладнання віком t років;

p – вартість нового обладнання;

$f_k(x)$ – функція умовно-оптимальних значень критерію оптимальності, яка показує максимальну величину прибутку, отриманого від експлуатації обладнання віком t років за останні k років планового періоду.

Вік обладнання розглядається у напрямі природного руху часу, тобто $t = 0$ відповідає віку використання нового обладнання. Часові кроки нумеруються в зворотньому порядку, тобто $k = 1$ означає, що розглядається останній рік планового періоду.

Розглянемо динамічну модель заміни нового обладнання ($t = 0$) при умові, що при списуванні залишкова вартість обладнання дорівнює нулю $s(t) = 0$.

Припустимо, що при $k = 1$ вік обладнання дорівнює t років. На початку T -го інтервалу маємо дві можливості: замінити обладнання або зберегти його. Якщо обладнання зберігається, то прибуток у період T дорівнює $r(t) - u(t)$; якщо обладнання замінюється, то прибуток дорівнює $r(0) - u(0) - p$. Оптимальною для періоду T буде така стратегія, яка забезпечує максимальний прибуток у цьому періоді.

Отже, рекурентне співвідношення для періоду T буде мати вигляд:

$r(t) - u(t)$ - збереження;

$$f_1(x) = \max \{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) \\ r(0) - u(0) - p \end{array} \} - \text{заміна.}$$

Для $k = 2$ розглядаємо прибуток за остання два роки $T-1$ та T планового періоду. Оскільки для всіх можливих стратегій заміни обладнання T -го інтервалу знайдені оптимальні дії, що забезпечують максимум прибутку $f_1(t+1)$, то умовно-оптимальною в останні два роки буде стратегія, яка дає максимум прибутку:

$r(t) - u(t) + f_1(t+1)$ - збереження;

$$f_2(x) = \max \{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_1(t+1) \\ r(0) - u(0) - p + f_1(1) \end{array} \} - \text{заміна.}$$

Аналогічні міркування можна навести і для $k=3$ і т.д.

Загальне рекурентне співвідношення для обчислення умовно-оптимального прибутку можна записати у вигляді

$r(t) - u(t) + f_k(t+1)$ - збереження;

$$f_k(x) = \max \{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_k(t+1) \\ r(0) - u(0) - p + f_{k+1}(1) \end{array} \} - \text{заміна.}$$

Для останнього кроку $k=T$ максимальний прибуток дорівнює

$f_m(t) = r(0) - u(0) - p + f_{k-1}(1)$ - збереження..

Якщо обладнання після списання реалізується, то рекурентне співвідношення має вигляд

$r(t) - u(t) + f_{k+1}(t+1)$ - збереження;

$$f_k(t) = \max \{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) + f_{k+1}(t+1) \\ r(0) - u(0) - p + f_{k+1}(1) + s(t) \end{array} \} - \text{заміна.}$$

В наведеному рівнянні у верхньому рядку функція $r(t) - u(t)$ представляє собою різницю між вартістю виробленої продукції та експлуатаційними витратами, а функція $f_{k+1}(t+1)$ характеризує сумарний прибуток від етапів, що залишаються (тобто від $k+1$ до k кроку), для обладнання віком $(t+1)$. В нижньому рядку функція

$s(t) - P$ представляє собою чисті затрати по заміні обладнання вік якого t років. Припускається, що період заміни старого обладнання і перехід на роботу на новому обладнанні входить в один і той же етап.

Приклад 1. До початку планового періоду на підприємстві встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від часу його роботи, а також витрати на експлуатацію та ремонт при різному часі його використання наведено в таблиці 1:

Таблиця 1

Характеристика обладнання	Час t , протягом якого використовується обладнання, роки				
	0	1	2	3	4
1. Річний обсяг виробництва продукції, тис грн., $r(t)$	30	30	24	21	19
2. Щорічні витрати на експлуатацію та ремонт обладнання, тис. грн., $u(t)$	11	12	12	13	13

Витрати, пов'язані з купівлею та встановленням нового обладнання постійні протягом планового періоду і дорівнюють $p = 14$ тис. грн.

Визначити план заміни обладнання протягом $T=5$ років, при якому загальний прибуток за плановий період був би максимальним.

Розв'язання. Визначимо умовно оптимальні стратегії для останнього п'ятого року планового періоду ($k=1$). Зважаючи, що на початку планового періоду було встановлено нове обладнання, то його вік до початку останнього етапу може бути $t = 1, 2, 3$ або 4 роки. Для кожного значення t розрахуємо умовно-оптимальні стратегії і відповідні значення величини прибутку $f_1(t)$:

Таблиця 2

	Збереження $r(t) - u(t)$	Заміна $r(0) - u(0) - p$	$f_1(t)$	Умовно-оптимальні стратегії
$f_1(t)$	30-12=18	30-11-14=5	18*	Збереження
$f_2(t)$	24-12=12	30-11-14=5	12	Збереження
$f_3(t)$	21-13=8	30-11-14=5	8	Збереження
$f_4(t)$	19-13=6	30-11-14=5	6	Збереження

Можливий вік обладнання на початку четвертого року планового періоду ($k=2$) дорівнює $t = 1, 2$ або 3 роки. Обчислимо умовно-оптимальні стратегії і відповідні значення величини прибутку:

Таблиця 3

	Збереження $r(t) - u(t) + f_1(t+1)$	Заміна $r(0) - u(0) - p + \max f_1(t)$	$f_2(t)$	Умовно-оптимальні стратегії
$f_1(t)$	30-12+12=30	30-11-14+18=23	30*	Збереження
$f_2(t)$	24-12+8=20	30-11-14+18=23	23	Заміна
$f_3(t)$	21-13+6=14	30-11-14+18=23	23	Заміна

Можливий вік обладнання на початку третього року планового періоду ($k=3$) дорівнює $t = 1$ або 2 роки. Обчислимо умовно-оптимальні стратегії і відповідні значення величини прибутку:

Таблиця 4

	Збереження $r(t) - u(t) + f_2(t+1)$	Заміна $r(0) - u(0) - p + \max f_2(t)$	$F_3(t)$	Умовно-оптимальні стратегії
$f_1(t)$	30-12+23=41	30-11-14+30=23	41*	Збереження
$f_2(t)$	24-12+23=35	30-11-14+30=23	35	Збереження

Для другого року планового періоду ($\kappa=4$) маємо:

Таблиця 5

	Збереження $r(t) - u(t) + f_3(t+1)$	Заміна $r(0) - u(0) - p + \max f_3(t)$	$F_4(t)$	Умовно-оптимальні стратегії
$f_1(t)$	30-12+35=53	30-11-14+41=46	53*	Збереження

Для останнього кроку $\kappa=5$ максимальний прибуток дорівнює

$$f_m(t) = r(0) - u(0) - p + \max f_4(t) = 30-11-14+53=58.$$

Висновки. Враховуючи, що на початку періоду було встановлено нове обладнання ($t=0$), і, користуючись таблицями 2 - 5, отримуємо таку оптимальну стратегію заміни обладнання:

Таблиця 6

Результат	1-рік	2-рік	3-рік	4-рік	5-рік
Оптимальна стратегія	Збереження	Збереження	Збереження	Заміна	Збереження

Обладнання необхідно замінити через 3 роки після його встановлення. Прибуток за плановий період дорівнює 58 тис.грн.

Задача для самостійного розв'язування

Задача 6. До початку планового періоду на підприємстві встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від часу його роботи, а також витрати на експлуатацію та ремонт при різному часі його використання наведено в таблиці:

Характеристика обладнання	Час t , протягом якого використовується обладнання, роки				
	0	1	2	3	4
Річний обсяг виробництва продукції, тис. грн., $r(t)$	30+0,1xK	30+0,1xP	24+0,1xK	21+0,1xP	19+0,1xK
Щорічні витрати на експлуатацію та ремонт обладнання, тис. грн. $u(t)$	11	12	12	13	13

Витрати, пов'язані з купівлею та встановленням нового обладнання постійні протягом планового періоду і дорівнюють $p = 15$ тис. грн.

Визначити план заміни обладнання протягом $T=5$ років, при якому загальний прибуток за плановий період був би максимальним.

Зміст виконання завдання

1. Запис умов задачі за індивідуальним варіантом.
2. Визначення умовно-оптимальних стратегій заміни обладнання.
3. Висновки за результатами розв'язку задачі.