СУТНІСТЬ МЕТОДІВ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Постановка задачі динамічного програмування та її геометрична інтерпретація

У розглянутих вище задачах лінійного та нелінійного програмування ми знаходили їх розв'язок в один етап або за один крок. Такі задачі мають назву – ***одноетапні (однокрокові)***. На відміну від цих задач у задачах динамічного програмування процес відшукання розв'язку розбивається на кроки (етапи), що відповідають, як правило, часовим періодам планування, а самі задачі називають ***багатокроковими***.

Динамічне програмування – *це математичний апарат, який дозволяє здійснити оптимальне планування багатокрокових керованих процесів і процесів, що залежать від часу*. Економічний процес називається ***керованим***, якщо можна вплинути на хід його розвитку. ***Управлінням*** називається сукупність рішень, що приймаються на кожному етапі і впливають на хід процес. В економічних процесах управління полягає розподілі і перерозподілі засобів на кожному етапі.

Якщо моделі лінійного програмування можна використовувати в економіці для прийняття великомасштабних планових рішень у складних ситуаціях, то моделі динамічного програмування застосовують при розв'язуванні задач значно меншого масштабу. Наприклад, при розробці правил управління запасами, при розробці принципів календарного планування виробництва, при розподілі дефіцитних капітальних вкладень між підприємствами, при складанні календарних планів поточного і капітального ремонту обладнання і його заміни і т.д.

У реально функціонуючих економічних системах щодня доводиться приймати мікроекономічні рішення. Моделі динамічного програмування цінні тим, що дозволяють за допомогою стандартного підходу з використанням мінімальної присутності суб'єкта приймати такі рішення. І якщо кожне взяте окремо таке рішення маловажливе, то в сукупності ці рішення можуть мати великий вплив на прибуток.

Загальна постановка задачі динамічного програмування.

Нехай розглядається деякий керований процес. У результаті управління система (об'єкт управління) S протягом деякого часу переходить із початкового стану s_0 до нового стану $\hat{s}$. Із процесом зміни системи пов'язаний деякий числовий критерій – ефективність. Необхідно організувати процес так, щоб ефективність набула оптимального значення.

Дамо геометричну інтерпретацію цієї задачі. Припустимо. що керований процес можна розбити на n кроків, на кожному кроці якого здійснюється своє управління. Управління, що переводить систему S з початкового стану в кінцевий, є сукупністю n покрокових управлінь.

Позначимо через x_k управління на k-тому кроці, $k=\overline{1,n}$. Іншими словами, це вибір траєкторії системи S, що переходить із стану до стану s_k. Сукупність станів, в які може переходити система, називається ***областю можливих станів***.

Нехай $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – управління за допомогою якого система S переходить із стану s_0 до стану $\hat{s}$. Позначивши через s_k – стан системи, яка отримується , після k-го кроку, одержуємо послідовність станів $s_0, s_1, ..., s_{k-1}, s_k, ..., s_n = \hat{s}$.

Геометрична інтерпретація задачі динамічного програмування полягає у виборі такої траєкторії системи S, що належить області можливих станів системи, і з'єднує початковий s_0 і кінцевий $\hat{s}$ стани системи, на якій значення критерію ефективності є найбільшим.

У задачі динамічного програмування знаходять таке управління $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ всією операцією, яка максимізує її загальну ефективність:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j \to \max,$$

де Z_j – ефективність на j – му кроці, $j = \overline{1,n}$.

Оптимальним розв'язком цієї задачі буде управління X^*, що складається із сукупності покрокових управлінь $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ і забезпечує максимальну ефективність Z^*

$$Z^* = \max_{x \in X} \{Z(x)\}.$$

Принцип оптимальності Беллмана та алгоритм розв'язування задач динамічного програмування

Динамічне програмування – це поетапне планування багатокрокового процесу, на кожному етапі якого оптимізується лише один крок. Рішення, згідно з яким система переходить із поточного стану до нового, вибирається із врахуванням його майбутніх наслідків, і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі. На останньому n-тому етапі приймається рішення, яке не залежить від майбутніх наслідків, і забезпечує найбільший ефект. З огляду на сказане, оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця, тобто спочатку планується n-ний крок. Використовуючи відому інформацію щодо закінчення передостаннього кроку, на підставі різних гіпотез щодо його закінчення, вибирають управління на останньому кроці. Таке управління називається ***умовно оптимальним***, оскільки знаходять його за умови, що попередній крок було здійснено згідно з однією з можливих гіпотез.

На відміну від лінійного програмування, в якому симплексний метод є універсальним методом розв'язування задач, у динамічному програмуванні такого методу не існує. Усі класи задач динамічного програмування розв'язуються методом рекурентних співвідношень, які складаються на основі принципу оптимальності, розробленого американським математиком Р. Беллманом у 1953 р.

Принцип оптимальності: ***яким би не був стан системи S перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибирати так, щоб ефективність кроку, що розглядається, плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною***. Використання цього принципу гарантує, що управління вибране на будь якому кроці не локально оптимальне, а оптимальне з точки зору процесу в цілому.

Алгоритм розв'язування задач динамічного програмування:

1. Динамічний процес розбиваємо на кроки, що відповідають, як правило, часовим періодам планування, стосовно яких розробляються управлінські рішення.
2. Визначаємо параметри станів s_k і змінні управління x_k на кожному кроці.
3. Записуємо рівняння станів.
4. Вводимо цільові функції k-того кроку і сумарну цільову функцію.
5. Вводимо до розгляду умовні максимуми (мінімуми) $Z_k^*(s_{k-1})$ і умовно оптимальне управління на k-му кроці: $X_k^*(s_{k-1})$, $k = n, n-1, ..., 2, 1$.
6. Записуємо основні для обчислювальної схеми динамічного програмування рекурентні співвідношення для $Z_n^*(s_{n-1})$ і $Z_k^*(s_{k-1})$, $k = n, n-1, ..., 2, 1$.
7. Здійснюємо умовну оптимізацію і отримуємо дві послідовності функцій: $\{Z_k^*(s_{k-1})\}$ і $\{X_k^*(s_{k-1})\}$.
8. Після виконання умовної оптимізації одержуємо оптимальний розв'язок для конкретного початкового стану s_0:

   а) $Z_{\max} = Z_1^*(s_0)$ і

   б) з ланцюжка $s_0 \Rightarrow X_1^* \to s_1 \Rightarrow X_2^* \to s_2 \Rightarrow ... \Rightarrow X_{n-1}^* \to s_{n-1} \Rightarrow X_n^* \to s_n$ оптимальне управління $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$.

Знаходження розв'язку задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів

Нехай маємо деяку кількість ресурсу x (коштів, капітальних вкладень і т.д.) і n об'єктів вкладень (підприємства, об'єкти, роботи і т.д.), по кожному з яких відомий очікуваний прибуток від вкладення певної суми коштів.

Необхідно розподілити капітальні вкладення між n об'єктами так, щоб отримати максимальну ефективність (загальний прибуток) від вибраного способу розподілу.

Введемо позначення:

x_i − кількість коштів, які виділяються i-му підприємству $i = \overline{1, n}$.

$g_i(x_i)$ − величина прибутку від використання ресурсу x_i, отриманого i-м підприємством.

Математична модель задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів запишеться так:

$$R(x_1, x_2, ..., x_n) = g_1(x_1) + g_2(x_2) + ... + g_n(x_n) \to \max$$

за умов

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = x,$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1, n}.$$

Для розв'язування цієї задачі методом динамічного програмування весь процес розподілу ресурсів між k підприємствами розіб'ємо на k кроків і введемо функцію умовно оптимальних значень критерію оптимальності $f_k(x)$, що показує найбільшу ефективність, яку можна отримати від використання ресурсів x від перших k різних підприємств.

Сформульовану задачу розподілу ресурсів можна подати у вигляді:

$$f_n(x)=max\{g_1(x_1)+g_2(x_2)+...+g_n(x_n)\}$$

за умов

$$x_1+x_2+...+x_n=x,$$

$$x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n}.$$

Для знаходження розв'язку задачі необхідно отримати рекурентні співвідношення, що пов'язують $f_k(x)$ і $f_{k-1}(x)$.

При $k=1$ найбільша ефективність $f_1(x)$ одержується від вкладення ресурсу x в одне підприємство при $x_1=x$ і маємо

$$f_1(x)=g_1(x). \qquad (1)$$

При $k=2$ $f_2(x)$ означає максимальну ефективність, отриману від оптимального розподілу всього ресурсу x між першим і другим підприємствами. Спочатку виділяємо другому підприємству x_2 одиниць ресурсу, який забезпечить $g_2(x_2)$ одиниць доходу, а залишок $(x-x_2)$ виділяємо для першого підприємства, де він забезпечить $f_1(x-x_2)$ одиниць доходу. Звідси рекурентне співвідношення на випадок, коли $k=2$ має вигляд

$$f_2(x)=\max_{0\leq x_2\leq x}\{g_2(x_2)+f_1(x-x_2)\}. \qquad (2)$$

Відповідне значення x_2 називається умовно оптимальним.

Аналогічно при будь-якому k функція $f_k(x)$ означає максимальну ефективність, одержану при оптимальному розподілі всього ресурсу між першими k підприємствами. Виділяємо $k-$му підприємству x_k одиниць ресурсу, які приносять дохід $g_k(x_k)$. Залишок $(x-x_k)$ вкладаємо у перші $k-1$ підприємств, де він при оптимальному розподілі забезпечить $f_{k-1}(x-x_k)$ одиниць доходу.

Для максимізації ефективності вкладення ресурсів у $k-$те і перші $k-1$ підприємств, необхідно вибрати x_k так, щоб виконувались співвідношення

$$f_k(x)=\max_{0\leq x_k\leq x}\{g_k(x_k)+f_{k-1}(x-x_k)\}. \qquad (3)$$

Знайдене значення x_k називається умовно оптимальним.

Рівняння (3) справедливе для $k=\overline{2,n}$. При $k=n$ функція $f_n(x)$ означає загальну ефективність, отриману при оптимальному розподілі ресурсу між всіма підприємствами, а відповідне значення x_n, що надає максимуму цій функції, є безумовно оптимальним.

Повертаючись до $(n-1)-$го кроку, визначаємо безумовно оптимальне значення x_{n-1}, при якому функція $f_{n-1}(x)$ набуває максимуму при розподілі ресурсу $(x-x_{n-1})$ між $(n-1)$ підприємствами, і так до $f_1(x_1)$. Таким чином, одержимо оптимальний розподіл ресурсів і максимальну ефективність (прибуток) від вибраного способу розподілу.

$$f_2(x)=\max_{0\leq x_2\leq x}\{g_2(x_2)+f_1(x-x_2)\}. \qquad (2)$$

Розв’язування задач динамічного програмування.

Задача. Знайти розв’язок задачі,якщо S=700 тис.грн. n=3, а значення x_i і $f_i(x_i)$ наведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Об’єм капіталовкладень x_i (тис.грн.)	Приріст випуску продукції $f_i(x_i)$ в залежності від об’єму капіталовкладень (тис. грн.)		
	Підприємство1	Підприємство2	Підприємство3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Розв’язування. Для розв’язування даної задачі динамічного програмування необхідно зіставити рекуррентне співвідношення Беллмана. В розглядаючому випадку це співвідношення приводить до наступних функціональних рівнянь:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \{ f_1(x_1) \}$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \}$$

....

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x} \{ f_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1}) \}$$

Тут функції $\phi_i(x)$ $(i = \overline{1, n-1})$ визначають максимальний приріст випуску продукції при відповідному розподілі X тис. грн. капіталовкладень між *i* підприємствами. Тому значення функції $\varphi_n(x)$ вираховується лише для одного значення $X = S$, так як об’єм капіталовкладень, виділяючих для всіх *n* підприємств, дорівнює S тис. грн.

Використовуючи тепер рекурентне співвідношення і вихідні дані табл.1, приступаємо до знаходження розв’язку задачі, тобто до визначення спочатку умовно оптимальних, а потім і оптимальних розподілів капіталовкладень між підприємствами.

Починаємо з визначення умовно оптимальних капіталовкладень, виділяючих для розвитку першого підприємства. Для цього знаходимо значення $\varphi_1(X)$ для кожного *X*, приймаючого значення 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700.

Нехай $X=0$; тоді $\varphi_1(0)=0$. Візьмемо тепер $X=100$. Тоді, використовуючи табл.1, дістанемо

$$\varphi_1(100)=\max\left\{\begin{matrix}0\\ [30]\end{matrix}\right\}=30, X_1^0=100.$$

Тут перший рядок відповідає розв'язку $X_1=0$, а другий рядок – розв'язку $X_1=100$. Так як першому розв'язку приріст випуску продукції не забезпечується, а при другому дорівнює 30 тис. грн., то умовно оптимальним розв'язком являється $X_1^0=100$.

Аналогічно знаходимо умовно оптимальний розв'язок для інших значень X:

$$\varphi_1(200)=\max\left\{\begin{matrix}0\\ 30\\ [50]\end{matrix}\right\}=50, X_1^0=200;$$

$$\varphi_1(300)=\max\left\{\begin{matrix}0\\ 30\\ 50\\ [90]\end{matrix}\right\}=90, X_1^0=300;$$

$$\varphi_1(400)=\max\left\{\begin{matrix}0\\ 30\\ 50\\ 90\\ [110]\end{matrix}\right\}=110, X_1^0=400;$$

$$\varphi_1(500)=\max\left\{\begin{matrix}0\\ 30\\ 50\\ 90\\ 110\\ [170]\end{matrix}\right\}=170, X_1^0=500;$$

$$\varphi_1(600)=\max\left\{\begin{matrix}0\\ 30\\ 50\\ 90\\ 110\\ 170\\ [180]\end{matrix}\right\}=180, X_1^0=600;$$

$$\varphi_1(700) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210, X_1^0 = 700$$

Результати обчислень і одержані відповідні умовно оптимальні розв'язки записуємо в табл.2.

Таблиця 2.

Об'єм капіталовкладень X, виділених першому підприємству (тис.грн.)	Максимальний приріст $\varphi_i(X)$ випуску продукції (тис. грн.)	Умовно оптимальний об'єм капіталовкладень X_1^0, виділених першому підприємству (тис. грн.)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Використовуючи тепер дані табл.2 і 1, визначимо умовно оптимальні об'єми капіталовкладень, виділених другому підприємству. Знайдемо

$$\varphi_2(X) = \max_{0 \le x_2 \le x}\{f_2(X_2) + \varphi_1(X - X_2)\}$$

для кожного із допустимих значень X, рівних 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700:

$\varphi_2(0) = 0$, $X_2^0 = 0$;

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ [50+0] \end{Bmatrix} = 50, X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ [50+30] \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80, X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ [80+30] \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110, X_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ [150+0] \end{Bmatrix} = 150, X_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90=50 \\ 150+30 \\ [190+0] \end{Bmatrix} = 190, X_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max\begin{Bmatrix} 0+180 \\ [50+170] \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220, X_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ [80+170] \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = 250, X_2^0 = 200.$$

Одержані результати і найдені умовно оптимальні об’єми капіталовкладень, виділених другому підприємству, записуємо в табл.3.

Таблиця 3.

Об’єм капіталовкладень *X*, виділених двом підприємствам (тис.грн.)	Максимальний приріст $\varphi_2(X)$ випуску продукції (тис.грн.)	Умовно оптимальний об’єм капіталовкладень X_2^0,виділених другому підприємству (тис.грн.)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходимо до знаходження значень

$$\varphi_3(X) = \max_{0 \le x_3 \le x} \{ f_3(X_3) + \varphi_2(X - X_3) \},$$

використовуючи для цього відповідні дані табл.3 і 1.

Так як в даному випадку число підприємств дорівнює 3 то проводимо обчислення лише для одного значення $X = 700$:

$$\varphi_3(700) = \begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ [220+50] \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270, X_3^0 = 600 .$$

Відповідно, максимальний приріст випуску продукції складає 270 тис.грн. Це має місце тоді, коли третьому підприємству виділяється 600 тис.грн., а першому і другому підприємствам – 100 тис.грн. Тоді, як бачимо з табл.3, другому підприємству необхідно виділити 100 тис. грн.

Отже, ми одержали оптимальний план розподілу капіталовкладень між підприємствами, згідно якому забезпечується максимальний приріст випуску продукції.