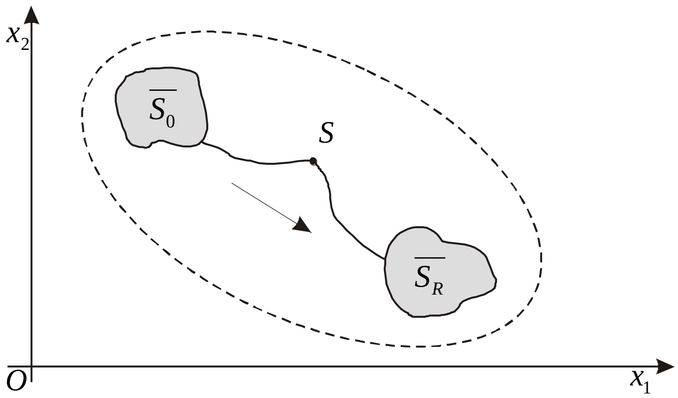
Задачі динамічного програмування.

§ 1. Геометрична та економічна інтерпретація задач динамічного програмування.

У розглянутих задачах лінійного та нелінійного програмування розв'язок знаходиться в один етап, тому ці задачі одержали назву *одноетапних* або *однокрокових*. На відміну від цих задач, задачі динамічного програмування є *багатоетапними* або *багатокроковими*. Тому термін "динамічне програмування" не стільки визначає особливий тип задач, скільки характеризує методи знаходження розв'язку окремих класів задач математичного програмування, які можуть відноситися до задач як лінійного, так і нелінійного програмування. Дамо загальну постановку задачі динамічного програмування і визначимо єдиний підхід до її розв'язку.



Припустимо, що дана фізична система S знаходиться в деякому початковому стані $S_0 \in \overline{S_0}$ і є керованою. Таким чином, завдяки здійсненню деякого управління U вказана система переходить з початкового стану S_0 в кінцевий стан $S_{кінц} \in \overline{S_R}$. При цьому якість кожного з реалізованих управлінь U характеризується відповідним значенням функції $W(U)$. Задача полягає в тому, щоб з множини можливих управлінь U знайти таке управління U^*, при якому функція $W(U)$ приймає екстремальне (максимальне або мінімальне) значення $W(U^*)$. Сформульована задача і є *загальною задачею динамічного програмування*.

Геометрична інтерпретація цієї задачі є такою. Нехай стан системи характеризується деякою точкою S на площині x_1Ox_2, і ця точка завдяки деякому управлінню переміщується вздовж лінії з області можливих початкових станів $\tilde{S}_0$ в область допустимих кінцевих станів $\tilde{S}_R$. Кожному управлінню U рухом точки, тобто кожній траєкторії руху точки, поставимо у відповідність значення деякої функції $W(U)$ (наприклад, довжину шляху, пройденого точкою під дією даного управління). Тоді задача полягає в тому, щоб з усіх допустимих траєкторій руху точки S знайти таку, яка одержується в результаті реалізації управління U^*, яке забезпечує екстремальне значення функції $W(U^*)$.

Економічну інтерпретацію загальної задачі динамічного програмування розглянемо на конкретних прикладах.

Приклад 1. У розпорядженні міністерства, в підпорядкуванні якого знаходиться k підприємств, виділені кошти у розмірі K тис. грошових одиниць для використання їх на розвиток підприємств протягом m років. Ці кошти на початку кожного року (тобто в моменти часу $t_1, t_2,...,t_m$) розподіляються між підприємствами. Одночасно з цим між підприємствами розподіляється одержаний ними за минулий рік прибуток. Таким чином, на початку кожного i-го року розглядуваного періоду j-ве підприємство одержує в своє розпорядження $x_i^{(j)}$ тис. грошових одиниць. Задача полягає у визначенні таких значень $x_i^{(j)}$, тобто в знаходженні таких розподілів виділених коштів між підприємствами та одержаного ними прибутку, при яких за m років забезпечується одержання максимального прибутку усіма підприємствами. Потрібно сформулювати поставлену задачу в термінах загальної задачі динамічного програмування.

Розв'язання. Припускаючи, що j-му підприємству на i-й рік виділяється $x_i^{(j)}$ тис. грошових одиниць, будемо розглядати даний розподіл коштів, як реалізацію деякого управління U_i. Таким чином, управління U_i полягає в тому, що на i-му кроці першому підприємству виділяється $x_i^{(1)}$ тис. грошових одиниць, другому — $x_i^{(2)}$ тис. грошових одиниць і т.д. Сукупність чисел $x_i^{(1)}, x_i^{(2)},..., x_i^{(k)}$ визначає всю сукупність управлінь $U_1, U_2,..., U_m$ на m кроках розподілу коштів, як m точок в k-вимірному просторі.

Критерієм оцінки якості вибраного розподілу коштів, тобто реалізованих управлінь, взято сумарний прибуток за m років, який залежить від цієї сукупності управлінь $W = W(U_1, U_2,..., U_m)$. Отже, задача полягає у виборі таких управлінь U_i^*, тобто в такому виборі коштів, при якому функція W приймає максимальне значення.

Сформульована задача є багатоетапною. Ця багатоетапність визначається її умовами, якими передбачено прийняття певних рішень на початку кожного року розглядуваного періоду часу. Разом з тим в цілому ряді інших задач динамічного програмування така багатоетапність безпосередньо не випливає з їх умов. Але з метою знаходження розв'язку, такі задачі доцільно розглядати як багатоетапні.

Приклад 2. Для збільшення об'єму випуску продукції підприємством, яка користується підвищеним попитом, виділені капіталовкладення в об'ємі S тис. грошових одиниць. Використання i-м підприємством x_i тис. грошових одиниць із вказаних засобів забезпечує приріст випуску продукції, який визначається значенням нелінійної функції $f_i(x_i)$. Знайти розподіл капіталовкладень між підприємствами, який забезпечує максимальне збільшення випуску продукції.

Розв'язання. Математична постановка задачі полягає в тому, щоб знайти

$$F=\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\to \max \qquad (1)$$

при обмеженнях
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S, \qquad (2)$$
$$x_i \ge 0, \quad i=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Задача (1)-(3) є задачею лінійного програмування. У випадку, коли $f_i(x_i)$ — опуклі (або вгнуті) функції, її розв'язок можна знайти, наприклад, методом множників Лагранжа. Якщо ж функції $f_i(x_i)$ такими не будуть, то відомі методи знаходження розв'язку задач нелінійного програмування не дозволяють визначити глобальний максимум функції (1). Тоді розв'язок задачі (1)-(3) можна знайти за допомогою динамічного програмування. Для цього вихідну задачу слід розглянути як багатоетапну або багатокрокову. Замість того, щоб розглядати допустимі варіанти розподілу капіталовкладень між *n* підприємствами і оцінювати їх ефективність, будемо досліджувати ефективність вкладення коштів на одному підприємстві, на двох підприємствах і т.д., нарешті на *n* підприємствах. Таким чином, одержимо *n* етапів, на кожному з яких стан системи (в якості якої виступають підприємства) описується об'ємом коштів, які мають освоїти *k* підприємств, $k=\overline{1,n}$. Рішення про об'єми капіталовкладень, які виділяються *k*-му підприємству ($k=\overline{1,n}$) і будуть управліннями. Задача полягає у виборі таких управлінь, при яких функція (1) приймає найбільше значення.

§2. Знаходження розв'язків задач методом динамічного програмування.

Розглянемо розв'язання задачі динамічного програмування в загальному виді. Будемо вважати, що стан системи *S* на *k*-му кроці ($k=\overline{1,n}$) визначається сукупністю чисел $X^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)})$, які одержані в результаті реалізації управління U_k, яке забезпечує перехід системи *S* із стану $X^{(k-1)}$ в стан $X^{(k)}$. При цьому будемо припускати, що стан $X^{(k)}$, в який перейшла система *S*, залежить від даного стану $X^{(k-1)}$ і вибраного управління U_k і не залежить від того, яким чином система *S* прийшла до стану $X^{(k-1)}$.

Далі будемо вважати, що коли в результаті *k*-го кроку забезпечено певний прибуток або виграш, який також залежить від вихідного стану системи $X^{(k-1)}$ і вибраного управління U_k, і який рівний $W_k(X^{(k-1)},U_k)$, то загальний прибуток або виграш за *n* кроків складає
$$F=\sum_{k=1}^{n} W_k(X^{(k-1)},U_k). \qquad (1)$$

Таким чином, нами сформульовано дві умови, яким повинна задовольняти розглядувана задача динамічного програмування. Перша умова називається *умовою відсутності післядії*, а друга – *умовою адитивності цільової функції* задачі.

Виконання для задачі динамічного програмування першої умови дозволяє сформулювати для неї *принцип оптимальності Беллмана*. Перш, ніж це зробити, дамо означення *оптимальної стратегії управління*. Під такою стратегією будемо розуміти сукупність управлінь $U^* = (U_1^*, U_2^*, ..., U_n^*)$, в результаті реалізації яких система S за n кроків переходить з початкового стану $X^{(0)}$ в кінцевий $X^{(k)}$ і при цьому функція (1) приймає максимальне значення.

Принцип оптимальності Беллмана. Яким би не був стан системи перед черговим кроком, потрібно вибрати управління на цьому кроці так, щоб виграш на даному кроці плюс оптимальний виграш на всіх наступних кроках був максимальним.

Звідси випливає, що оптимальну стратегію управління можна одержати, якщо спочатку знайти оптимальну стратегію управління на *n*-му кроці, потім на двох останніх кроках, потім на трьох останніх кроках і т.д., аж до першого кроку. Таким чином, розв’язок розглядуваної задачі динамічного програмування доцільно починати з визначення оптимального розв’язку на останньому, *n*-му кроці. Для того, щоб знайти цей розв’язок, треба зробити різні припущення про те, як зміг закінчитися останній крок, і з урахуванням цього вибрати управління U_n^0, яке забезпечує максимальне значення функції $W_n(X^{(n-1)}, U_n)$. Таке управління U_n^0, яке вибране при певних припущеннях про те, як закінчився попередній крок, називається *умовно оптимальним управлінням*. Отже, принцип оптимальності вимагає знаходити на кожному кроці умовно оптимальне управління для будь-якого з можливих результатів попереднього кроку.

Дамо математичне формулювання принципу оптимальності. Позначимо $F_n(X^{(0)})$ — максимальний прибуток, який одержується за n кроків при переході системи S з початкового стану $X^{(0)}$ в кінцевий стан $X^{(n)}$ при реалізації оптимальної стратегії управління $U = (U_1, U_2, ..., U_n)$, а через $F_{n-k}(X^{(k)})$ — максимальний прибуток, який одержується при переході з будь-якого стану $X^{(k)}$ в кінцевий стан $X^{(n)}$ при оптимальній стратегії управління на $n-k$ кроках, які залишилися. Тоді

$$F_n(X^{(0)}) = \max\left[W_1(X^{(0)}, U_1) + ... + W_n(X^{(n-1)}, U_n)\right]; \qquad (2)$$

$$F_{n-k}(X^{(k)}) = \max\left[W_{k+1}(X^{(k)}, U_{k+1}) + F_{n-k+1}(X^{(k+1)})\right], \quad k = \overline{0, n-1}. \qquad (3)$$

Вираз (3) являє собою математичний запис принципу оптимальності і називається *основним функціональним рівнянням Беллмана*. Використовуючи дане рівняння, знаходимо розв’язок розглядуваної задачі динамічного програмування.

Покладаючи $k = n-1$ в рекурентному співвідношенні (3), одержимо таке функціональне рівняння:

$$F_1(X^{(n-k)}) = \max_{U_n}\left[W_n(X^{(n-1)}, U_n) + F_0(X^{(n)})\right]. \qquad (4)$$

В (4) вважаємо $F_0(X^{(n)})$ відомою величиною. Використовуючи (4) і розглядаючи всі можливі допустимі стани системи *S* на $(n-1)$-му кроці $X_1^{(n-1)}, X_2^{(n-1)}, ..., X_m^{(n-1)}, ...$, знаходимо умовно оптимальні розв'язки $U_n^0(X_1^{(n-1)}), U_n^0(X_2^{(n-1)}), ..., U_n^0(X_m^{(n-1)}), ...$ і відповідні значення функції (4) $F_1^0(X_1^{(n-1)}), F_1^0(X_2^{(n-1)}), ..., F_1^0(X_m^{(n-1)}), ...$ Таким чином, на *n*-му кроці знаходимо умовно оптимальне управління для всякого допустимого стану системи *S* після $(n-1)$-го кроку. Тобто, в якому би стані система не виявилася після $(n-1)$-го кроку, нам уже відомо, яке слід прийняти рішення на *n*-му кроці. Відомо також відповідне значення функції (4). Розглянемо функціональне рівняння при $k = n-2$.

$$F_2(X^{(n-1)}) = \max_{U_{n-1}}\left[W_{n-1}(X^{(n-2)}, U_{n-1}) + F_1(X^{(n-1)})\right]. \qquad (5)$$

Для того, щоб знайти значення F_2 для всіх допустимих значень $X^{(n-2)}$, потрібно знати $W_{n-1}(X^{(n-2)}, U_{n-1})$ і $F_1(X^{(n-1)})$. Значення $F_1(X^{(n-1)})$ вже визначені. Тому потрібно провести обчислення для $W_{n-1}(X^{(n-2)}, U_{n-1})$ при деякому наборі допустимих значень $X^{(n-2)}$ і відповідний управлінь U_{n-1}. Ці обчислення дозволяють визначити умовно оптимальне управління U_{n-1}^0 для кожного $X^{(n-2)}$. Кожне з таких управлінь сумісно з уже вибраним управлінням на останньому кроці забезпечує максимальне значення прибутку на двох останніх кроках.

Послідовно здійснюючи описаний вище ітераційний процес, доходимо нарешті до першого кроку. На цьому кроці нам відомо, в якому стані може знаходитися система. Тому вже немає потреби робити припущення про допустимі стани системи, а залишається тільки вибрати управління, яке є найкращим з урахуванням умовно оптимальних управлінь, вже прийнятих на всіх наступних кроках. Таким чином, в результаті послідовного знаходження всіх етапів від кінця до початку, визначаємо максимальне значення виграшу за *n* кроків і для кожного з них знаходимо умовно оптимальне управління.

Щоб знайти оптимальну стратегію управління, тобто визначити шуканий розв'язок задачі, треба тепер пройти всю послідовність кроків, тільки на цей раз від початку і до кінця. А саме: на першому кроці в якості оптимального управління U_1^* візьмемо знайдене оптимальне управління U_1^0. На другому кроці знайдемо стан X_1^*, в який переводить систему управління U_1^*. Цей стан визначає знайдене умовно оптимальне управління U_2^0, яке тепер будемо вважати оптимальним. Знаючи U_2^*, знаходимо X_2^*, а, значить, визначаємо U_3^* і т.д. В результаті цього знаходимо розв'язок задачі, тобто максимально можливий прибуток і оптимальну стратегію управління U^*, яке включає оптимальні управління на окремих кроках: $U^* = (U_1^*, U_2^*, ..., U_n^*)$. Розглянемо розв'язання задачі динамічного програмування на конкретний прикладах.

Приклад 1. На підприємстві встановлене нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від його використання підприємством наведена в таблиці.

	Час τ, протягом якого використовується обладнання (роки)					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(\tau)$ у вартісному виразі (в тис. грошових одиниць)	80	75	65	60	60	55
Щорічні витрати $Z(\tau)$, пов'язані з утриманням та ремонтом обладнання (в тис. грошових одиниць)	20	25	30	35	45	55

Знаючи, що витрати, пов'язані з придбанням та установкою нового обладнання, ідентичного із встановленим, складають 40 тис. грошових одиниць, а обладнання, яке замінюється — списується, скласти такий план заміни обладнання протягом п'яти років, при якому загальний прибуток за даний період часу є максимальним.

Розв'язання. Цю задачу можна розглядати, як задачу динамічного програмування, де в якості системи S виступає обладнання. Стани цієї системи визначаються фактичним часом використання обладнання (його віком) τ, тобто описуються єдиним параметром τ. В якості управлінь виступають рішення про заміну і збереження обладнання, які приймаються на початку кожного року. Позначимо через U_1 рішення про збереження обладнання, а через U_2 — рішення про заміну обладнання. Тоді задача полягає в знаходженні такої стратегії управління, яка визначається рішеннями, які приймаються на початок кожного року, при якій загальний прибуток підприємства за 5 років буде максимальним. Отже, вихідна задача сформульована в термінах задачі динамічного програмування. Ця задача має властивості адитивності та відсутності післядії. Значить її розв'язок можна знайти за допомогою описаного вище алгоритму розв'язання задачі динамічного програмування, який реалізується в два етапи. На першому етапі, при русі від початку 5-го року п'ятирічки до початку першого року для кожного допустимого стану обладнання знайдемо умовно оптимальне управління (рішення), а на другому етапі, при русі від початку першого року до початку п'ятого року, з умовно оптимальних рішень для кожного року складемо оптимальний план заміни обладнання на 5 років.

Для визначення умовно оптимальних розв'язків спочатку необхідно скласти функціональне рівняння Беллмана.

Оскільки за припущенням до початку *k*-го року $(k=\overline{1,5})$ може прийматися тільки одне з двох рішень – замінити або не заміняти обладнання, то прибуток підприємства за *k*-й рік складе

$$F_k(\tau^{(k)},U_k)=\begin{cases} R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right) & \text{при} \quad U_1, \\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n & \text{при} \quad U_2, \end{cases}$$

де $\tau^{(k)}$— вік обладнання на початок *k*-го року $(k=\overline{1,5})$; U_k— управління, яке реалізується на початок *k*-го року ; C_n— вартість нового обладнання. Таким чином, в даному випадку рівняння Баллмана приймає вигляд:

$$F_k(\tau^{(k)})=\max_{\tau}\left\{\begin{array}{l} R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right)+F_{k+1}\left(\tau^{(k+1)}\right), \\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n+F_{k+1}\left(\tau^{(k+1)}=1\right) \end{array}\right\}. \qquad (6)$$

Використовуючи рівняння (6), приступаємо до розв'язання задачі. Розв'язання починаємо із визначення умовно оптимального управління (рішення) для останнього п'ятого року. В зв'язку з цим знаходимо множину допустимих станів обладнання на початок даного (п'ятого) року. Оскільки на початок першого року є нове обладнання ($\tau^{(1)}=0$), то вік обладнання на початок п'ятого року може складати 1, 2, 3 та 4 роки. Тому допустимі стани системи на даний період часу будуть такими: $\tau_1^{(5)}=1;\ \tau_2^{(5)}=2;\ \tau_3^{(5)}=3;\ \tau_4^{(5)}=4$. Для кожного з цих станів знайдемо умовно оптимальний розв'язок і відповідне значення функції $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$. Використовуючи рівняння (6) і відношення $F_6\left(\tau^{(k+1)}\right)=0$ (оскільки розглядається останній, п'ятий, рік), одержуємо:

$$F_5(\tau^{(5)})=\max\left\{\begin{array}{l} R\left(\tau^{(5)}\right)-Z\left(\tau^{(5)}\right), \\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n \end{array}\right\}. \qquad (7)$$

Підставивши в формулу (7) замість $\tau^{(5)}$ його значення, яке рівне одиниці і врахувавши дані таблиці, одержуємо:

$$F_5(\tau_1^{(5)})=\max\left\{\begin{array}{l} R\left(\tau^{(5)}=1\right)-Z\left(\tau^{(5)}=1\right) \\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n \end{array}\right\}=\max\left\{\begin{array}{l} 75-25 \\ 80-20-40 \end{array}\right\}=\max\left\{\begin{array}{c} 50 \\ 20 \end{array}\right\}=50,$$

$U^0=U_1$.

Отже, умовно оптимальний розв'язок в даному випадку буде U_1.

Аналогічні обчислення для інших допустимих станів обладнання на початок п'ятого року будуть такими:

$$F_5(\tau_2^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 35 \\ 20 \end{Bmatrix} = 35, \quad U^0 = U_1;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 60-35 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 25 \\ 20 \end{Bmatrix} = 25, \quad U^0 = U_1;$$

$$F_5(\tau_4^{(5)}) = \max\begin{Bmatrix} 60-45 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 15 \\ 20 \end{Bmatrix} = 20, \quad U^0 = U_2.$$

Одержані результати обчислень зводимо у таблицю.

Вік обладнання $\tau^{(5)}$, років	Значення функції $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$, тис. грошових одиниць	Умовно оптимальний розв'язок
1	50	U_1
2	35	U_1
3	25	U_1
4	20	U_2

Розглянемо можливі стани обладнання на початок четвертого року. Допустимими станами будуть $\tau_1^{(4)} = 1; \tau_2^{(4)} = 2; \tau_3^{(4)} = 3$. Для кожного з них визначаємо умовно оптимальний розв'язок і відповідне значення функції $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$. Для цього використовуємо рівняння (6) і дані двох таблиць.

$$F_4(\tau_1^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(4)}=1\right) - Z\left(\tau^{(4)}=1\right) + F_5\left(\tau^{(5)}=2\right) \\ R\left(\tau^{(4)}=0\right) - Z\left(\tau^{(4)}=0\right) - C_n + F_5\left(\tau^{(5)}=1\right) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75-25+35 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 85 \\ 70 \end{Bmatrix} = 85, \quad U^0 = U_1;$$

$$F_4(\tau_2^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65-30+25 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 60 \\ 70 \end{Bmatrix} = 70, \quad U^0 = U_2;$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 60-35+20 \\ 80-20-40+50 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 45 \\ 70 \end{Bmatrix} = 70, \quad U^0 = U_2.$$

Одержані результати записуємо у таблицю.

Вік обладнання $\tau^{(4)}$, років	Значення функції $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$, тис. грошових одиниць	Умовно оптимальний розв'язок
1	85	U_1
2	70	U_2
3	70	U_2

Визначаємо умовно оптимальний розв'язок для кожного з допустимих станів на початок третього року. У відповідності з рівнянням (6) при $\tau_1^{(3)} = 1; \tau_2^{(3)} = 2$, маємо:

$$F_3(\tau_1{}^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(3)} = 1\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 1\right) + F_4\left(\tau^{(4)} = 2\right) \\ R\left(\tau^{(3)} = 0\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 0\right) - C_n + F_4\left(\tau^{(4)} = 1\right) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 120 \\ 105 \end{Bmatrix} = 120, \quad U^0 = U_1;$$

$$F_3(\tau_2{}^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(3)} = 2\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 2\right) + F_4\left(\tau^{(4)} = 3\right) \\ R\left(\tau^{(3)} = 0\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 0\right) - C_n + F_4\left(\tau^{(4)} = 1\right) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 105 \\ 105 \end{Bmatrix} = 105, \quad U^0 = U_2.$$

Із останнього виразу бачимо, що якщо на початок третього року вік обладнання складає два роки, то не залежно від того, чи буде прийняте рішення U_1, чи U_2, величина прибутку залишається однією і тою ж. Це означає, що в якості умовно оптимального розв'язку можна взяти будь-який, наприклад, U_2. Одержані значення записуємо у таблицю.

Вік обладнання $\tau^{(3)}$, років	Значення функції $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$, тис. грошових одиниць	Умовно оптимальний розв'язок
1	120	U_1
2	105	U_2

На початок другого року вік обладнання може бути рівний тільки одному року. Отже, $F_2\left(\tau^{(2)}\right) = 75 - 25 + 105 = 155, \quad U^0 = U_1$. На початок першого року $F_1\left(\tau^{(1)}\right) = R\left(\tau_2^{(1)} = 0\right) - Z\left(\tau_1^{(1)} = 0\right) + F_2\left(\tau^{(1)} = 1\right) = 80 - 20 + 155 = 215, \quad U^0 = U_1$.

Таким чином, максимальний прибуток підприємства може бути рівний 215 тис. грошових одиниць. Він відповідає оптимальному плану заміни обладнання, який одержується на основі попередніх таблиць. Для першого року рішення єдине – слід зберегти обладнання. Отже, вік обладнання на початок другого року складає один рік. Тоді єдиним рішенням може бути рішення про збереження обладнання. На початок третього року вік обладнання стає рівним двом. При такому віці його слід замінити. Після заміни, на початок четвертого року, його вік складе один рік. Тому на початок п'ятого року вік обладнання складе два роки і його міняти не доцільно. Отже, оптимальний план заміни обладнання є таким:

	Роки				
	1	2	3	4	5
Оптимальне рішення	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання	Провести заміну обладнання	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання

Приклад 2. Знайти $F = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S,$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,n},$$

якщо S=700 тис. грошових одиниць, n=3, а значення x_i та $f_i(x_i)$ наведені в таблиці:

Об'єм капіталовкладень x_i (тис. грош. од.)	Приріст випуску продукції $f_i(x_i)$ в залежності від об'єму капіталовкладень (тис. грошових одиниць)		
	Підприємство 1	Підприємство 2	Підприємство 3
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі слід скласти рекурентне співвідношення Беллмана. Одержуємо такі функціональні рівняння:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \{f_1(x_1)\},$$
$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}, \qquad (8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x} \{f_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1})\}.$$

Тут функції $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, n-1}$ визначають максимальний приріст випуску продукції при відповідних розподілах x тис. грошових одиниць капіталовкладень між i підприємствами. Тому значення функції $\varphi_n(x)$ обчислюється лише для одного значення $x = S$, оскільки об'єм капіталовкладень, що виділяються для всіх n підприємств, дорівнює S тис. грошових одиниць.

Почнемо з визначення умовно оптимальних капіталовкладень, які виділяються для розвитку першого підприємства. Для цього знаходимо $\varphi_1(x)\ \ \forall x = \{0,\ 100,\ 200,\ 300,\ 400,\ 500,\ 600,\ 700\}$. $x = 0 \Rightarrow \varphi_1(0) = 0$; $x = 100 \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi_1(100) = \max\left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \end{matrix}\right\} = 30$, $x_1^0 = 100$. Тут перший рядок відповідає рішенню $x_1 = 0$, а другий – рішенню $x_2 = 100$. Оскільки при першому рішенні приріст випуску продукції не забезпечується, а при другому рівний 30 тис. грошових одиниць, то умовно оптимальним рішенням буде $x_1^0 = 100$.

Аналогічно

$$\varphi_1(200) = \max\left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{matrix}\right\} = 50, \quad x_1^0 = 200; \quad \varphi_1(300) = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \end{matrix}\right\} = 90, \quad x_1^0 = 300;$$

$$\varphi_1(400) = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \end{matrix}\right\} = 110, \quad x_1^0 = 400; \qquad \varphi_1(500) = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \end{matrix}\right\} = 170, \quad x_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \end{matrix}\right\} = 180, \quad x_1^0 = 600; \qquad \varphi_1(700) = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{matrix}\right\} = 210, \quad x_1^0 = 700.$$

Результати обчислень і одержані відповідні умовно оптимальні розв’язки записуємо у таблицю:

Об’єм капіталовкладень x, які виділяються першому підприємству (тис. грош. одиниць)	Максимальний приріст $\varphi_1(x)$ випуску продукції (тис. грош. одиниць)	Умовно оптимальний об’єм капіталовкладень x_1^0, які виділяються першому підприємству (тис. грош. одиниць)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600

700	210	700

Використовуючи дані двох таблиць, знайдемо умовно оптимальні об'єми капіталовкладень, які виділяються другому підприємству. Знайдемо

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x}\{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\} \ \ \forall x = \overline{0;700}\,; \quad \varphi_2(0) = 0, \quad x_2^0 = 100\,;$$

$$\varphi_2(100) = \max_{0 \le x_2 \le 100}\begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(100) \\ f_2(100) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ 50+0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 30 \\ 50 \end{Bmatrix} = 50, \quad x_2^0 = 100\,;$$

$$\varphi_2(200) = \max_{0 \le x_2 \le 200}\begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(200) \\ f_2(100) + \varphi_1(100) \\ f_2(200) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ 50+30 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 50 \\ 80 \\ 80 \end{Bmatrix} = 80, \quad x_2^0 = 100\,;$$

$$\varphi_2(300) = \max_{0 \le x_2 \le 300}\begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(300) \\ f_2(100) + \varphi_1(200) \\ f_2(200) + \varphi_1(100) \\ f_2(300) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ 80+30 \\ 90+0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 90 \\ 100 \\ 110 \\ 90 \end{Bmatrix} = 110, \quad x_2^0 = 200\,;$$

$$\varphi_2(400) = \max_{0 \le x_2 \le 400}\begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(400) \\ f_2(100) + \varphi_1(300) \\ f_2(200) + \varphi_1(200) \\ f_2(300) + \varphi_1(100) \\ f_2(400) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ 150+0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 110 \\ 140 \\ 130 \\ 120 \\ 150 \end{Bmatrix} = 150, \quad x_2^0 = 400\,;$$

$$\varphi_2(500) = \max_{0 \le x_2 \le 500}\begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(500) \\ f_2(100) + \varphi_1(400) \\ f_2(200) + \varphi_1(300) \\ f_2(300) + \varphi_1(200) \\ f_2(400) + \varphi_1(100) \\ f_2(500) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ 190+0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 170 \\ 160 \\ 170 \\ 140 \\ 180 \\ 190 \end{Bmatrix} = 190, \quad x_2^0 = 500\,;$$

$$\varphi_2(600) = \max_{0 \le x_2 \le 600}\begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(600) \\ f_2(100) + \varphi_1(500) \\ f_2(200) + \varphi_1(400) \\ f_2(300) + \varphi_1(300) \\ f_2(400) + \varphi_1(200) \\ f_2(500) + \varphi_1(100) \\ f_2(600) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0+180 \\ 50+170 \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 180 \\ 220 \\ 190 \\ 180 \\ 200 \\ 220 \\ 210 \end{Bmatrix} = 220, \quad x_2^0 = 100\,;$$

$$\varphi_2(700) = \max_{0 \le x_2 \le 700} \begin{Bmatrix} f_2(0) + \varphi_1(700) \\ f_2(100) + \varphi_1(600) \\ f_2(200) + \varphi_1(500) \\ f_2(300) + \varphi_1(400) \\ f_2(400) + \varphi_1(300) \\ f_2(500) + \varphi_1(200) \\ f_2(600) + \varphi_1(100) \\ f_2(700) + \varphi_1(0) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ 80+170 \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 210 \\ 230 \\ 250 \\ 200 \\ 240 \\ 240 \\ 240 \\ 220 \end{Bmatrix} = 250, \quad x_2^0 = 200.$$

Об'єм капіталовкладень x, які виділяються двом підприємствам (тис. грош. одиниць)	Максимальний приріст $\varphi_2(x)$ випуску продукції (тис. грош. одиниць)	Умовно оптимальний об'єм капіталовкладень x_2^0, які виділяються другому підприємству (тис. грош. одиниць)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходимо до знаходження значень $\varphi_3(x) = \max\limits_{0 \le x_3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$. Оскільки число підприємств рівне трьом, проводимо обчислення лише для одного значення $x = 700$.

$$\varphi_3(700) = \begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 120+80 \\ 180+80 \\ 220+50 \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270, \quad x_3^0 = 600.$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції складає 270 тис. грошових одиниць. Це має місце тоді, коли третьому підприємству виділити 600 тис. грош. одиниць, а першому і другому – 200 тис. грош. одиниць. Як видно з другої таблиці, другому підприємству слід виділити 100 тис. грош. одиниць. Отже, нами одержано оптимальний план розподілу капіталовкладень між підприємствами, згідно якого забезпечується максимальний приріст випуску продукції.