ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

1. Економічна сутність задач динамічного програмування

Всі економічні процеси та явища є динамічними, оскільки вони функціонують і розвиваються не тільки у просторі, але й у часі. Для народного господарства в цілому, його галузей, регіонів чи окремих підприємств з метою їх стабільного функціонування та розвитку необхідно розробляти стратегічні та тактичні плани. Стратегічні плани містять параметри діяльності об'єктів, які характеризують їх віддалене майбутнє. Отже, вони мають розроблятися на основі динамічних моделей, для знаходження розв'язків яких застосовуються методи динамічного програмування.

Динамічне програмування являє собою математичний апарат, що дає змогу здійснювати планування багатокрокових керованих процесів, а також процесів, які розвиваються у часі.

До задач динамічного програмування належать такі, що пов'язані з оптимальним розподілом капіталовкладень, розподілом продукції між різними регіонами, визначенням найкоротшого шляху завезення товарів споживачам, задачі щодо заміни устаткування, оптимального управління запасами тощо.

Економічні процеси можна уявити складеними з кількох етапів (кроків). На кожному з них здійснюється вплив на розвиток всього процесу. Тому у разі планування багатоетапних процесів прийняття рішень на кожному етапі має враховувати попередні зміни та бути підпорядкованим кінцевому результату. Динамічне програмування дає змогу прийняти ряд послідовних рішень, що забезпечує оптимальність розвитку процесу в цілому.

Слід зазначити, що оптимальні плани стосовно окремих відрізків планового періоду не завжди є оптимальними для всього інтервалу планування. Наприклад, недостатньо визначити оптимальний план виробництва на один місяць і орієнтуватися на нього протягом тривалого часу. Досить ймовірно, що в наступні місяці виробництво за тим самим планом може стати неоптимальним, оскільки за його розроблення можливості дальшого розвитку не враховувались. Доцільніше визначати оптимальні плани на кожен місяць з урахуванням змін у попередніх періодах. Лише тоді річний оптимальний план виробництва буде сумарним результатом оптимальних рішень, що приймалися для кожного місяця.

Поставимо задачу динамічного програмування в загальному вигляді.

Нехай аналізується деякий керований процес, подання якого допускає декомпозицію на послідовні етапи (кроки), кількість яких n задана. Ефективність всього процесу Z може бути подана як сума ефективностей Z_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ окремих кроків, тобто:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j ,$$

що має назву адитивного критерію (або як добуток ефективностей Z_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ окремих кроків у вигляді: $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$, що має назву мультиплікативного критерію).

З кожним етапом (кроком) задачі пов'язане прийняття певного рішення, так званого ***крокового управління*** x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$, що визначає як ефективність даного етапу, так і всього процесу в цілому.

Розв'язування задачі динамічного програмування полягає в знаходженні такого управління $X = (x_1, x_2, ... x_n)$ процесом у цілому, яке максимізує загальну ефективність: $\max Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j$, ($\max$ $Z = \prod_{j=1}^{n} Z_j$).

Оптимальним розв'язком цієї задачі є управління X^*, що складається з сукупності имальних покрокових управлінь:

$$X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ... x_n^*\right)$$

іожливлює досягнення максимальної ефективності:

$$Z^* = \max_{x \in X} \{Z(x)\}.$$

2. Задача про розподіл капіталовкладень між двома підприємствами на *n* років

Розглянемо задачу динамічного програмування на прикладі задачі про розподіл капіталовкладень.

Допустимо, що розглядається виробнича система, яка складається з двох підприємств. Нехай плановий період складається з *n* інтервалів-частин (наприклад, років), і протягом даного періоду слід використати суму коштів *b*, що має бути розподілена між двома підприємствами. Відомі прибутки, які приносять вкладення коштів: вкладення у перше підприємство обсягом *x* приносить прибуток $g(x)$, а друге підприємство дає з такої ж суми прибутку $h(x)$.

Необхідно розподілити кошти на період у *n* років так, щоб досягти максимального прибутку за весь плановий період.

Можна легко сформулювати задачу, коли плановий період складається з одного року (однокрокова задача).

Якщо в перше підприємство здійснили вкладення обсягом *x*, тоді сума вкладених у друге підприємство коштів становить $b - x = y$ і дає прибуток $h(y)$.

У такому разі маємо однокрокову задачу:

$$\max Z = g(x) + h(y)$$

за умов:

$$x + y = b\,,$$

$$x \ge 0,\ \ y \ge 0\,.$$

Введемо позначення:

$Z = Z_1$, $b = b_1$, $x = x_1$, $y = b_1 - x_1$, тоді задача матиме вигляд:

$$\max Z_1 = g(x_1) + h(b_1 - x_1)\,; \qquad (10.1)$$

$$0 \le x_1 \le b_1\,. \qquad (10.2)$$

Тепер розглянемо цю задачу оптимального розподілу капітальних вкладень, якщо вона складається з двох періодів (етапів).

Оскільки прибуток утворюється в результаті випуску та реалізації продукції, що пов'язано з певними виробничими витратами, то на початок другого періоду початкова сума x_1 зменшиться до величини $x_2 = \alpha x_1$, де $0 \le \alpha \le 1$, а сума $(b_1 - x_1)$ — до величини $\beta(b_1 - x_1)$, де $0 \le \beta \le 1$. Щоб визначити найбільший прибуток, який можна отримати від сумарного залишку $b_2 = \alpha x_1 + \beta(b_1 - x_1)$ протягом другого етапу, необхідно розв'язати задачу математичного програмування, аналогічну до задачі (10.1)—(10.2), тобто:

$$\max Z_2 = g(x_2) + h(b_2 - x_2)\,, \qquad (10.3)$$

$$0 \le x_2 \le b_2\,. \qquad (10.4)$$

Поставимо тепер задачу оптимального поточного планування розподілу капіталовкладень по всіх n інтервалах періоду, причому принцип розподілу вкладень у кожному з періодів полягає у відшуканні оптимального використання тієї суми коштів, що залишається на кінець попереднього періоду. Критерій оптимальності не змінюється і полягає в максимізації прибутку за весь період. Тоді для k-го етапу (періоду) залишок коштів після використання в попередньому періоді становитиме b_k. Визначаємо оптимальну суму коштів x_k, що доцільно вкладати в перше підприємство в k-му періоді, розв'язуючи таку задачу:

$$\max Z_k = g(x_k) + h(b_k - x_k)\,, \qquad (10.5)$$

$$0 \le x_k \le b_k\,. \qquad (10.6)$$

Оскільки критерієм оптимальності є максимізація загального прибутку за всі n періодів, то в цілому необхідно знайти максимальне значення функціонала, що складається із максимальних значень прибутків кожного окремого періоду, тобто загальна задача має вид:

$$\max Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n = \sum_{k=1}^{n}\left[g(x_k) + h(b_k - x_k)\right] \qquad (10.7)$$

за умов:

$$0 \le x_k \le b_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right), \tag{10.8}$$
$$b_k = \alpha x_{k-1} + \beta(b_{k-1} - x_{k-1}) \quad \left(k = \overline{2,n}\right).$$

Цільова функція (10.7) є функцією *n* змінних $(x_1, x_2, ..., x_n)$ і залежить від початкового параметра b_1.

Розв'язування задачі (10.7)—(10.8) розглянутими раніше однокроковими методами може виявитися неможливим. Проте міркування, які привели до ормулювання задачі (10.7)—(10.8), породжують ідею побудови алгоритму поетапного ›зв'язування динамічних задач.

2.1. Метод рекурентних співвідношень

Продовжимо розгляд задачі (10.7)—(10.8). Позначимо через $R_n(b)$ максимальний ›рибуток, який досягнуто внаслідок виконання *n* кроків, тоді:

$R_n(b) = \max\limits_{x_1, x_2, ..., x_n} Z(b, x_1, x_2, ..., x_n)$, де змінні $x_j (j = \overline{1,n})$ задовольняють обмеження (10.8).

Як зазначалося вище, при $n = 1$ маємо однокрокову задачу управління і прибуток за ›ин рік від вкладення коштів у два підприємства обчислюється за формулою:

$$R_1(b) = \max_{0 \le x \le b} \left[g(x) + h(b - x) \right].$$

Розглянемо період з двох років. Як зазначалося вище, до початку другого періоду залишок коштів становитиме $b_2 = \alpha x + \beta(b - x)$. Використаємо введені вище позначення: $b = b_1$, $x = x_1$.

Найбільший прибуток, який можна отримати на другому етапі, дорівнює:

$$R_2(b) = \max_{\substack{0 \le x_1 \le b_1, \\ 0 \le x_2 \le b_2}} \left[g(x_1) + h(b_1 - x_1) + g(x_2) + h(b_2 - x_2) \right].$$

Розглянемо детальніше зв'язок між величинами $R_1(b)$ та $R_2(b)$, тобто максимальним прибутком для однокрокової задачі та максимальним прибутком, що може бути отриманий за два кроки.

За довільно визначеного на першому кроці значення *x*, максимальний прибуток на другому кроці визначатиметься так:

$$R_1(b_2) = \max_{0 \le x_2 \le b_2} \left[g(x_2) + h(b_2 - x_2) \right] = R_1(\alpha x + \beta(b - x)).$$

Розглянемо тепер $R_2(b)$ — найбільший прибуток, що може бути отриманий від початкової суми *b* за два періоди. Очевидно це значення буде розраховуватись, як максимальна сума доходів першого та другого періодів:

$$R_2(b) = \max_{0 \le x \le b} \left(Z_1 + Z_2 \right) = \max_{0 \le x \le b} \left[g(x) + h(b - x) + R_1(\alpha x + \beta(b - x)) \right]. \tag{10.9}$$

Формула (10.9) є рекурентним співвідношенням, яке зв'язує величину прибутку, що досягнута лише за другий інтервал планового періоду і яка дорівнює $R_1(\alpha x+\beta(b-x))$, і прибуток за обидва (перший і другий) інтервали планового періоду, який дорівнює $R_2(b)$.

Міркуючи аналогічно, приходимо до співвідношення, що визначає загальний прибуток, який досягається за n інтервалів:

$$R_n(b)=\max_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)+R_{n-1}(\alpha x+\beta(b-x))\right],\ (n=2,3,...), \qquad (10.10)$$

де $R_1(b)=\max\limits_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)\right]$. Очевидно, що $R_{n-1}(\alpha x+\beta(b-x))$ — максимальний прибуток за $n-1$ останніх кроків за розподілу обсягів капіталовкладень на першому кроці у такий спосіб: у перше підприємство — x, а в друге — решту $(b-x)$. Визначивши $R_1(b)=\max\limits_{0\le x\le b}\left[g(x)+h(b-x)\right]$ з (10.10), можемо обчислити $R_2(b)$ і, користуючись ним, знаходимо знову з (10.10) $R_3(b)$ і т. д., причому на кожному кроці обчислень матимемо як значення $R_k(x_k)$, так і $x_k(b_k)$. Отже, процес розв'язування задачі полягає в обчисленні послідовностей функцій $R_k(x_k)$ та $x_k(b_k)$ для всіх $x_k\ge 0,\ k=\overline{1,n}$.

3. Задача про розподіл капіталовкладень між підприємствами

Планується на наступний рік діяльність виробничої системи, яка складається з n підприємств. Відома початкова сума коштів — b_0, що має бути розподілена між всіма підприємствами. Сума вкладень x приносить k-му підприємству прибуток $g_k(x)$. Значення функції $g_k(x)$ $\left(k=\overline{1,n};\ 0\le x\le b_0\right)$, задані таблицею.

Необхідно визначити x_k — кошти, які потрібно виділити k-му підприємству так, щоб отримати максимальний сумарний прибуток від вкладення коштів в усі підприємства $\left(\max Z=\sum\limits_{k=1}^{n}g_k(x)\right)$.

Позначимо кількість коштів, що залишилися після k-го кроку (тобто кошти, які необхідно розподілити між рештою ($n-k$) підприємств через b_k:

$$b_k=b_{k-1}-x_k\quad\left(k=\overline{1,n}\right).$$

Задача розв'язується поетапно. В даному разі етапами є вкладення коштів в кожне підприємство.

I етап. Кошти вкладаються лише в одне (наприклад, перше) підприємство. Найбільший прибуток (ефективність першого етапу), що може бути отриманий, позначимо через $R_1(b_0)$. Маємо:

$$R_1(b_0)=\max_{0<x_1<b_0}\left\{g_1(x)\right\}.$$

II етап. Порівняємо ефективність, яку отримаємо, вкладаючи кошти лише у перше підприємство та вкладаючи кошти одночасно і в перше, і в друге підприємства. Якщо позначити ефективність другого етапу через $R_2(b_0)$, то отримаємо:

$$R_2(b_0) = \max_{\substack{0<x_1<b_0 \\ 0<x_2<b_1}} \{R_1(x_1) + g_2(x_2)\}.$$

Для k-го етапу маємо рекурентне співвідношення:

$$R_k(b_0) = \max_{0<x_k<b_k} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Послідовно розв'язуючи отримані рівняння, визначаємо оптимальні рішення на кожному етапі.

Приклад 10.1. Виробнича система складається з чотирьох філіалів. За умови здійснення реконструкції обладнання на кожному філіалі можна досягти певного приросту прибутку. Фірма виділяє на додаткові капітальні вкладення 200 тис. ум. од. (для спрощення розрахунків допустимо, що додаткові вкладення будуть здійснені в обсягах 50, 100, 150 та 200 тис. ум. од.).

Необхідно визначити оптимальний розподіл коштів між філіалами для максимізації загального прибутку від усіх чотирьох філіалів за умови, що відомі прирости прибутку для кожного з них (табл. 10.1):

Таблиця 10.1

Капіталовкладення, тис. ум. од.	Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

Розв'язання. В даному прикладі етапами задачі буде не час, як у попередніх викладках, а розподіл коштів між філіалами. Отже, маємо чотирьохетапну задачу динамічного програмування. Відповідно до введених раніше позначень вважатимемо, що $g_i(x)$ — приріст прибутку в i-му філіалі за умови капіталовкладень у нього обсягом x тис. ум. од. Умова задачі має вигляд (табл. 10.2):

Таблиця 10.2

Приріст прибутку в філіалах, тис. ум. од.			
$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
25	30	36	28
60	70	64	56
100	90	95	110
140	122	130	142

I етап

Найпростіший спосіб розподілу коштів, з якого починаємо розв'язування задачі, — це вкладення коштів лише у перший філіал. Якщо маємо в розпорядженні суму коштів $b_1 = 50$ тис. ум. од., то ефективність вкладення цієї суми відповідає прибутку, що його буде отримано від інвестування в перший філіал — 25 тис. ум. од. Ефективність першого етапу позначимо через $R_1(b)$:

$$R_1(b_1 = 50) = \max_{0 \le x_1 \le b_1} \left[g(x_1) \right] = \max_{\substack{x_1=0, \\ x_1=50}} \left[g(0), g(50) \right] = g(50) = 25 .$$

Аналогічно поступаємо у разі, коли в розпорядженні маємо суму $b_2 = 100$ тис. ум. од. Тоді з наявних коштів вкладати можна суму величиною x_2, що може набувати таких значень: $x_2 = 0$, або $x_2 = 50$, або $x_2 = 100$ тис. ум. од. Очевидно, що з трьох названих можливих варіантів найбільшу ефективність будемо мати, вклавши кошти в сумі 100 тис. ум. од. Отже, фіксуємо найбільшу ефективність на другому кроці першого етапу — $R_1(b_2 = 100) = 60$, потім на третьому кроці — $R_1(b_3 = 150) = 100$ тис. ум. од. і т. д.

Узагальнимо всі випадки першого етапу у вигляді «таблиці найбільших ефективностей», де відображено можливі прибутки за умови різних вкладень тільки в першу філію (табл. 9.3):

Таблиця 10.3

b	$R_1(b)$
50	25
100	60
150	100
200	140

II етап

На кожному етапі необхідно зіставити ефективності прийнятих рішень на попередньому та поточному етапах. Тобто, тепер розглянемо розподіл коштів одночасно між двома філіалами фірми, порівнюючи отриманий прибуток з ефективністю попереднього етапу. Скористаємося формулою для загального випадку:

$$R_k(b_0) = \max_{0<x_k<b_k} \{R_{k-1}(x_{k-1}) + g_k(b_0 - x_k)\}.$$

Для нашого прикладу величина $R_1(x_1)$ — ефективність, що дають вкладення на попередньому етапі (в даному прикладі — в перший філіал фірми), яка була розрахована на першому кроці, і позначалась через $R_1(b)$, а величина $g_2(b_0 - x_1)$ — прибуток, що дає другий філіал від залишку суми.

За введених у даному прикладі позначень формула набуває вигляду:

$$R_2(b) = \max_{0\le x\le b}[g_1(x) + g_2(b-x)] = \max_{0\le x\le b}[g_2(x) + R_1(b-x)].$$

Знову спочатку допускаємо, що розподіляється сума $b_1 = 50$. Тоді можливі два варіанти вкладення: $x_1 = 0$ (вкладаємо кошти лише в другий філіал) або $x_1 = 50$ (вкладаємо кошти лише в перший філіал), тоді:

$$R_2(b_1 = 50) = \max_{0\le x_1\le 50}[R_1(x_1) + g_2(b_1 - x_1)] = \max[g_2(0) + R_1(50); R_1(0) + g_2(50)]$$

$$R_2(b_1 = 50) = \max[0 + 25; 30 + 0] = 30 .$$

Для наочності подамо проміжні розрахунки у вигляді табл. 9.4:

Таблиця 10.4

x_1	$b_1 - x_1$	$R_1(x_1)$	$g_2(b_1 - x_1)$	$R_2(b_1)$
0	50	0	30	0 + 30 = 30
50	0	25	0	25 + 0 = 25

Стрілкою позначено найбільший з можливих прибутків за умови розподілу вкладення 50 тис. ум. од. одночасно в перший та другий філіали фірми.

У такий спосіб визначено наступний елемент «таблиці найбільших ефективностей» для випадку, коли $b_1 = 50$ (табл. 10.5):

Таблиця 9.5

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	
150	100	
200	140	

Потім розглядаються можливі варіанти розподілу коштів, якщо $b_2 = 100$, тоді вкладати лише в другий філіал можна суму $x_2 \le b_2$. x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. Маємо такі результати: (табл. 10.6):

Таблиця 10.6

x_2	$b_2 - x_2$	$R_1(x_2)$	$g_2(b_2 - x_2)$	$R_2(b_2)$
0	100	0	70	0 + 70 = 70
50	50	25	30	30 + 25 = 55
100	0	60	0	60 + 0 = 60

З табл. 9.6 висновуємо, що вкладаючи 100 тис ум. од., з усіх варіантів найбільший прибуток буде дорівнювати 70 тис. ум. од. Отже, таблиця найбільших ефективностей після цього кроку поповнюється наступним елементом (табл. 10.7):

Таблиця 10.7

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	
200	140	

Аналогічно проводимо обчислення для $b_3 = 150$ та $b_4 = 200$ тис. ум. од.

Нехай $b_3 = 150$ (розглядається чотири можливих варіанти розподілу, табл. 10.8):

Таблиця 10.8

x_3	$b_3 - x_3$	$R_1(x_3)$	$g_2(b_3 - x_3)$	$R_2(b_3)$
0	150	0	90	0 + 90 = 90
50	100	25	70	25 + 70 = 95
100	50	60	30	60 + 30 = 90
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Нехай $b_4 = 200$ (розглядається п’ять можливих варіантів розподілу, табл. 10.9):

Таблиця 10.9

x_4	$b_4 - x_4$	$R_1(x_4)$	$g_2(b_4 - x_4)$	$R_2(b_4)$
0	200	0	122	0 + 122 = 122
50	150	25	90	25 + 90 = 115
100	100	60	70	70 + 60 = 130
150	50	100	30	100 + 30 = 130
200	0	140	0	140 + 0 = 140

Внесемо всі розрахунки другого етапу в таблицю максимальних ефективностей, табл. 10.10:

Таблиця 10.10

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$
50	25	30
100	60	70
150	100	100
200	140	140

III етап

Знову необхідно зіставити ефективності попереднього та поточного етапів. Отже, використовуємо дані, що описують прибуток, який можна отримати від вкладення одразу в перший та другий філіал (стовпчик $R_2(b)$) та прибуток від вкладення одночасно в три філіали. Знову використаємо формулу:

$$R_3(b_0) = \max_{0 \le x_2 \le b_2} \left[R_2(x_2) + g_3(b_0 - x_2) \right]$$

Аналогічно попереднім випадкам спочатку беремо $b_1 = 50$, тоді $x_1 = 0$ або $x_1 = 50$ тис. ум. од., маємо (табл. 10.11):

Таблиця 10.11

x_1	$b_1 - x_1$	$R_2(x_1)$	$g_3(b_1 - x_1)$	$R_3(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

$R_3(b_1 = 50) = 36$.

Другий крок: $b_2 = 100$, тоді x_2 може набувати таких значень: $x_2 = 0$, $x_2 = 50$, $x_2 = 100$ тис. ум. од. В результаті маємо (табл. 10.12):

Таблиця 9.12

x_2	$b_2 - x_2$	$R_2(x_2)$	$g_3(b_2 - x_2)$	$R_3(b_2)$
0	100	0	64	0 + 64 = 64
50	50	30	36	36 + 30 = 66
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$R_3(b_2 = 100) = 70$.

При $b_3 = 150$ величина x_3 може набувати чотирьох значень: $x_3 = 0$, $x_3 = 50$, $x_3 = 100$, $x_3 = 150$ тис. ум. од., які означають частини загальної суми вкладення коштів лише в третє підприємство, відповідні їм чотири випадки: $b_3 - x_3 = 150$, $b_3 - x_3 = 100$, $b_3 - x_3 = 50$, $b_3 - x_3 = 0$ — лишки коштів, що необхідно вкладати в перші два філіали. Маємо (табл. 10.13):

Таблиця 9.13

x_3	$b_3 - x_3$	$R_2(x_3)$	$g_3(b_3 - x_3)$	$R_3(b_3)$
0	150	0	95	0 + 95 = 95
50	100	30	64	30 + 64 = 94
100	50	70	36	70 + 36 = 106
150	0	100	0	100 + 0 = 100

Отже, $R_3(b_3) = 106$.

Обчислення для останнього (четвертого) кроку $(b_4 = 200)$ третього етапу наведені в табл. 10.14:

Таблиця 10.14

x_4	$b_4 - x_4$	$R_2(x_4)$	$g_3(b_4 - x_4)$	$R_3(b_4)$
0	200	0	130	0 + 130 = 130
50	150	30	95	30 + 95 = 125
100	100	70	64	70 + 64 = 134
150	50	100	36	100 + 36 = 136
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_3(b_4) = 140$. Запишемо значення $R_3(b)$ у вигляді наступного стовпчика таблиці найбільших ефективностей (табл. 10.15).

Таблиця 10.15

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$
50	25	30	36
100	60	70	70
150	100	100	106
200	140	140	140

Аналогічно проводяться обчислення для $R_4(b)$, які наводяться без коментарів.

$b_1 = 50$.

Таблиця 10.16

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	28	0 + 28 = 28
50	0	36	0	36 + 0 = 36

$R_4(b_1) = 36$. $b_2 = 100$.

Таблиця 10.17

x_2	$b_2 - x_2$	$R_3(x_2)$	$g_4(b_2 - x_2)$	$R_4(b_2)$
0	100	0	56	56 + 0 = 56
50	50	36	28	36 + 28 = 64
100	0	70	0	70 + 0 = 70

$R_4(b_2) = 70$.

$b_3 = 150.$

Таблиця 10.18

x_3	$b_3 - x_3$	$R_3(x_3)$	$g_4(b_3 - x_3)$	$R_4(b_3)$
0	150	0	110	110 + 0 = 110
50	100	36	56	36 + 56 = 92
100	50	70	28	70 + 28 = 98
150	0	106	0	106 + 0 = 106

$R_4(b_3) = 110$.

$b_4 = 200.$

Таблиця 10.19

x_4	$b_4 - x_4$	$R_3(x_4)$	$g_4(b_4 - x_4)$	$R_4(b_4)$
0	200	0	142	142 + 0 = 142
50	150	36	110	36 + 110 = 146
100	100	70	56	70 + 56 = 126
150	50	106	28	106 + 28 = 134
200	0	140	0	140 + 0 = 140

$R_4(b = 200 = b_4) = 146$.

Остаточно маємо табл. 10.20:

Таблиця 10.20

b	$R_1(b)$	$R_2(b)$	$R_3(b)$	$R_4(b)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	134	146

З табл. 10.20 легко помітити, що найбільший прибуток, який дадуть всі чотири філіали за умови вкладення коштів у розмірі 200 тис. ум. од., становить 146 тис. ум. од. Повертаючись до останнього кроку розрахунків (табл. 10.19) бачимо, що число 146 відповідає змінній $x_4 = 150$, $b_4 - x_4 = 50 \Rightarrow 110 + 36 = R_2(150)$.

Звідси маємо, що 150 тис. ум. од. необхідно вкласти в четвертий філіал, а 50 тис. ум. од. розподілити між трьома іншими. Знову повертаємося до елементів табл. 9.20. Використання 50 тис. ум. од. на трьох перших філіалах дає загальний прибуток обсягом 36 тис. ум. од. (виділений елемент таблиці 10.20). Це значення було розраховано на III етапі, на першому кроці: $b = 50 = b_1$ у такий спосіб (табл. 10.21):

Таблиця 10.21

x_1	$b_1 - x_1$	$R_3(x_1)$	$g_4(b_1 - x_1)$	$R_4(b_1)$
0	50	0	36	0 + 36 = 36
50	0	30	0	30 + 0 = 30

Отже, маємо: $x_1 = 50$, а $g_3(50) = 36$. Це означає, що 50 тис. ум. од. виділяються третьому філіалу, $b_1 - x_1 = 0$, $R_2(0)$ — що в перші два філіали кошти взагалі не вкладаються.

Отже, оптимальним планом задачі є: $X^*(x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ \ x_3^* = 50;\ \ x_4^* = 150$ *тис. ум. од.). У разі такого розподілу коштів між філіалами фірми максимальний прибуток становитиме 146 тис. ум. од.*

.4. Принцип оптимальності

З викладених у попередніх параграфах міркувань можна висновувати, що для прийняття оптимального рішення на *k*-му кроці багатокрокового процесу потрібна оптимальність рішень на всіх його попередніх кроках, а сукупність усіх рішень дає оптимальний розв’язок задачі лише в тому разі, коли на кожному кроці приймається оптимальне рішення, що залежить від параметра етапу b_k, визначеного на попередньому кроці.

Цей факт є основою методу динамічного програмування і є сутністю так званого ***принципу оптимальності Р. Белмана***, який формулюється так:

Оптимальний розв’язок багатокрокової задачі $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ *має ту властивість, що яким би не був стан системи* b_i *в результаті деякої кількості кроків, необхідно вибирати управління* x_{i+1}^* *на найближчому кроці так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках приводило до максимального виграшу на всіх останніх кроках, включаючи даний.*

Доведемо справедливість такого твердження, міркуючи від супротивного. Нехай маємо задачу на максимізацію функції $Z = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j)$ і вектор $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ є її оптимальним планом (стратегією, поведінкою) *n*-крокового процесу (*n*-вимірної задачі) з початковим параметром стану *b*.

Принцип оптимальності еквівалентний твердженню, що вектор $(x_2^*,...,x_n^*)$ повинен бути оптимальним планом $(n-1)$-крокового процесу $(n-1)$-вимірної задачі з початковим параметром стану b_{n-1}, що дорівнює $b-x_1^*$. Припустимо протилежне, тобто що вектор $(x_2^*,...,x_n^*)$ не є оптимальним планом відповідного процесу, а ним є якийсь інший план $(x_2',...,x_n')$. Тоді дістанемо:

$$\max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') > \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*),$$

але

$$\max_{x_1,x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j^*) = \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) <$$

$$< \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j') = \max_{x_1} \max_{x_2,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \max_{x_1,...,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j),$$

що суперечливо. Отже, принцип оптимальності доведено.

5. Багатокроковий процес прийняття рішень

Будь-яку багатокрокову задачу можна розв'язувати по-різному: або знаходити одразу всі елементи розв'язку на всіх кроках, або будувати оптимальне управління поступово, крок за кроком (на кожному етапі розрахунків оптимізуючи лише один крок). Як правило, другий спосіб оптимізації є значно простішим, ніж перший, особливо при значній кількості кроків. Оптимізація одного кроку є простішою порівняно з оптимізацією всього процесу, тому краще багато разів розв'язувати простіші задачі, ніж один раз — складну.

Динамічний процес поділяється на сукупність послідовних етапів або кроків. На кожному етапі оптимізується тільки один крок, а рішення, під впливом якого система переходить з поточного стану в новий, вибирається з врахуванням його наслідків у майбутньому і не завжди дає найбільший ефект на даному етапі.

Плануючи багатокроковий процес, необхідно обирати управління на кожному кроці з урахуванням його майбутніх наслідків на тих кроках, які ще попереду. Лише на останньому кроці можна прийняти рішення, яке дасть максимальний ефект, оскільки наступного кроку для нього не існує. Тому оптимізація методом динамічного програмування починається з кінця, тобто спочатку планується останній крок. На базі відомої інформації про те, як закінчився попередній крок, для різних гіпотез щодо завершення передостаннього кроку вибирається управління на останньому. Таке управління називають умовно-оптимальним.

Для всіх кроків його знаходять із припущення, що попередній крок закінчився згідно з однією із можливих гіпотез.

Коли всі умовно-оптимальні управління на всіх кроках відомі, то це означає, що визначено, як необхідно керувати на кожному кроці, яким би не був процес на початку. В такому разі можна знайти не умовно-оптимальне, а оптимальне управління.

Дійсно, якщо відомо початковий стан S_0, то можна вибрати для нього оптимальне управління x_1^*, що приведе до стану S_1, для якого також відоме оптимальне управління x_2^* і т. д.

Отже, в процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатокроковий процес виконується двічі. Перший раз — від кінця до початку, в результаті чого знаходять умовно-оптимальні управління і умовно-оптимальні виграші для всіх кроків. Другий раз — від початку до кінця, в результаті чого знаходять вже оптимальні покрокові управління, тобто оптимальне управління процесом у цілому.

Перший етап — знаходження умовно-оптимальних управлінь є дуже складним та довгим у порівнянні з другим. На другому етапі залишається лише «прочитати» рекомендації, що отримані на першому. Зауважимо, що «кінець» та «початок» можна поміняти місцями і здійснювати процес оптимізації також і в іншому напрямку (приклад 10.1).

Враховуючи вищезазначене, опишемо алгоритм розв'язування задач динамічного програмування, який складається з послідовності таких операцій:

1. Визначають специфічні показники стану досліджуваної керованої системи і множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи описується у такий спосіб, щоб можна було забезпечити зв'язок між послідовними етапами розв'язання задачі і мати змогу одержати допустиме рішення задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо, а крім того, приймати оптимальні рішення на наступних етапах без урахування впливу майбутніх рішень на ті, що були прийняті раніше.

2. Поділяють процес на етапи (кроки), які, як правило, відповідають певним періодам планування динамічних процесів, або окремим об'єктам (підприємствам, видам продукції, устаткуванню тощо) у разі підготовки рішень стосовно керування ними.

3. Формулюють перелік управлінь x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначають ефект, який забезпечує управління x_j на *j*–му кроці, якщо перед тим система була у стані *S*, у вигляді функції ефективності:

$$\max Z(S, x_j)\,.$$

5. Визначають, як змінюється стан *S* системи під впливом управління x_j на *j*-му кроці, тобто як здійснюється перехід до нового стану:

$$S' = \varphi_j(S, x_j)\,.$$

6. Будують рекурентну залежність задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект $Z_j(S)$, починаючи з *j*–го кроку і до останнього, через вже відому функцію $Z_{j+1}(S')$:

$$Z_j(S) = \max_{x_j}\{Z_j(S)\} = \max_{x_j}\{f_j(S, x_j) + Z_{j+1}(S', x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на *j*-му кроці $(x_j(S))$. Зауважимо, що у функції $Z_{j+1}(S)$ необхідно замість S врахувати змінений стан системи, тобто $S' = \varphi_j(S, x_j)$.

7. Використовують умовну оптимізацію останнього *n*-го кроку, визначаючи множину станів *S*, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану. Умовно-оптимальний ефект на *n*-му кроці обчислюють за формулою:

$$Z_n(S) = \max_{x_n}\{f_n(S, x_n)\}.$$

Потім знаходять умовно-оптимальне управління $x_n(S)$, в результаті реалізації якого цей максимум буде досягнуто.

8. Проводять умовну оптимізацію $(n-1)$-го, $(n-2)$-го та інших кроків за рекурентними залежностями (див. п. 6) і визначають для кожного кроку умовно-оптимальне управління:

$$x_n^*(S_{n-1}).$$

9. Проводять безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямку від початкового стану S_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці x_1^* змінюють стан системи згідно з пунктом 5. Потім для цього нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і аналогічно ці дії повторюють до останнього етапу (кроку).

В результаті знаходять оптимальне покрокове управління $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, що забезпечує максимальну ефективність Z^*.

Приклад 10.2. Фірма планує нарощувати виробничі потужності на чотирьох підприємствах, маючи для цього 4 млн грн. Для кожного підприємства розроблено інвестиційні проекти, які відображають прогнозовані загальні витрати *C* (обсяги капіталовкладень) та доходи *D*, пов’язані з реалізацією кожного проекту. Ці показники наведені в табл. 10.22:

Таблиця 10.22

Проект	Підприємство							
	1		2		3		4	
	C_1	D_1	C_2	D_2	C_3	D_3	C_4	D_4
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	1	4	2	4	1	2
3	2	5	2	6	3	9	2	8
4	3	7	3	8	4	12	3	5

Перший проект не передбачає розширення виробництва, а тому має нульові витрати і доходи. Необхідно розробити план інвестування виділених коштів у зазначені підприємства так, щоб одержати максимальний прибуток.

Розв'язання. Як вже наголошувалось, спрощеним, але і найменш ефективним способом розв'язування подібних задач є перебір усіх можливих варіантів. Проте на практиці їх так багато, що проаналізувати їх всі і вибрати серед них найефективніший неможливо. Головними недоліками такого способу розв'язування є великий обсяг обчислень, відсутність апріорної інформації про недопустимі розв'язки, а також неможливість скористатися проміжними результатами аналізу для відкидання неоптимальних комбінацій проектів.

Розв'яжемо цю задачу, починаючи пошук умовно-оптимального управління з останнього кроку. Кроками задачі вважатимемо кожне з чотирьох підприємств, оскільки для кожного з них маємо вибрати оптимальний інвестиційний проект за обмежених грошових ресурсів.

Зауважимо, що в цьому разі нединамічний процес розглядаємо як динамічний, аби скористатися методами динамічного програмування для знаходження оптимального розв'язку. Зв'язок між зазначеними кроками забезпечується обмеженням на загальний обсяг виділених коштів — 4 млн грн.

Змінні задачі візьмемо так, щоб можна було послідовно керувати процесом розподілу коштів:

x_1 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 1—4;

x_2 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 2—4;

x_3 — обсяг капіталовкладень, виділених на кроках 3 і 4;

x_4 — обсяг капіталовкладень, виділених на 4 кроці.

k_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — обсяг інвестицій в i-те підприємство $\left(k_i = 0,1,2,3,4\right)$.

k_i^* $\left(i=\overline{1,n}\right)$ — оптимальний обсяг інвестицій в *i*-те підприємство.

Рекурентне співвідношення, що описує зв'язок між ефективностями управління від 4-го до 1-го кроку (від четвертого до першого підприємства) подається у вигляді:

$$f_i^*(x_5)=0\,,$$
$$f_i^*(x_i;k_i)=\max_{k_i}\left\{D_i(k_i)+f_{i+1}^*(x_i-C_i(k_i))\right\}\ \left(i=\overline{1,4}\right),\ C_i(k_i)\le x_i\,,$$

де $f_i^*(x_i;k_i)$ — сумарна ефективність інвестицій з *i*-го кроку до останнього.

Тут $f^*(x_5)=0$, оскільки п'ятого підприємства не існує.

Виконаємо поетапні розрахунки за цією моделлю.

Етап IV.

$$f_4^*(x_4;k_4)=\max_{k_4}\left\{D_4(k_4)+f_5^*(x_4-C_4(k_4))\right\}.$$

Результати розрахунків подамо таблицею:

Таблиця 10.23

x_4	Дохід $f_4(x_4;k_4)=D_4(k_4)+f_5^*(x_5)$					Оптимальний розв'язок	
	$k_4=0$	$k_4=1$	$k_4=2$	$k_4=3$	$k_4=4$	$f_4^*(x_4)$	k_4^*
0	0	0				0	0
1	0	2				2	1
2	0	2	8			8	2
3	0	2	8	5		8	2
4	0	2	8	5		8	2

$$f_3^*(x_3;k_3)=\max_{k_3}\left\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\right\}$$

за умов

$$C_3(k_3)\le x_3\,,\ k_3=0,1,2,3,4.$$

Результати розрахунків наведені в табл. 10.24:

Таблиця 10.24

x_3	Дохід $f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$k_3=3$	$k_3=4$	$f_3^*(x_3)$	k_3^*
0	$0+f_4^*(0-0)=$ $=0+0=0$				0	0
1	$0+f_4^*(1-0)=$ $=0+2=2$				2	0
2	$0+f_4^*(2-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(2-2)=$ $=4+0=4$			8	0
3	$0+f_4^*(3-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(3-2)=$ $=4+2=6$	$9+f_4^*(3-3)=$ $=9+0=9$		9	3
4	$0+f_4^*(4-0)=$ $=0+8=8$	$4+f_4^*(4-2)=$ $=4+8=12$	$9+f_4^*(4-3)=$ $=9+2=11$	$12+f_4^*(4-4)=$ $=12+0=12$	12	2 або 4

Розрахунки виконують так. Нехай потрібно знайти $f_3^*(x_3=3)$. Обчислюємо за формулою:

$$f_3(x_3;k_3)=D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3)).$$

Отже,

$$f_3(x_3=3;k_3=1)=0+f_4^*(3-0)=0+f_4^*(3)=0+8=8,$$

$$f_3(x_3=3;k_3=2)=4+f_4^*(3-2)=4+2=6,$$

$$f_3(x_3=3;k_3=3)=9+f_4^*(3-3)=9+0=9.$$

Зауважимо, що $C_3(k_3=1)=0$, оскільки для третього підприємства не існує проекту з інвестиціями в 1 млн грн. Значення $f_4^*(x_3-C_3(k_3))$ беремо з попередньої таблиці. Потім маємо:

$$f_3^*(x_3;k_3)=\max_{k_3=1,2,3}\{D_3(k_3)+f_4^*(x_3-C_3(k_3))\}=\max\{8,6,9\}=9.$$

Етап 2

$$f_2^*(x_2;k_2)=\max_{k_2}\{D_2(k_2)+f_3^*(x_2-C_2(k_2))\}$$

за умов:

$$C_2(k_2) \le x_2\,,\ k_2 = 0, 1, 2, 3, 4\,.$$

Результати розрахунків подані в табл. 10.25:

Таблиця 10.25

x_2	Дохід $f_2(x_2;k_2) = D_2(k_2) + f_3^*(x_2 - C_2(k_2))$					Оптимальне рішення	
	$k_2 = 0$	$k_2 = 1$	$k_2 = 2$	$k_2 = 3$	$k_2 = 4$	$f_2^*(x_2)$	k_2^*
0	0					0	0
1	4	4				4	1
2	8	6	6			8	0
3	9	12	8	8		12	1
4	12	13	14	10		14	2

Етап 1.

$$f_1^*(x_1;k_1) = \max_{k_1}\{D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))\}$$

за умов: $$C_1(k_1) \le x_1\,,\ k_1 = 0, 1, 2, 3, 4\,.$$

Виконуємо розрахунки лише для $x_1 = 4$, подаючи їх у табл. 10.26:

Таблиця 10.26

x_1	Дохід $f_1(x_1;k_1) = D_1(k_1) + f_2^*(x_1 - C_1(k_1))$				Оптимальний розв'язок	
	$k_1 = 1$	$k_1 = 2$	$k_1 = 3$	$k_1 = 4$	$f_1^*(x_1)$	k_1^*
4	$3 + f_2^*(4-1) = = 3 + 12 = 15$	$5 + f_2^*(4-2) = = 5 + 6 = 11$	$7 + f_2^*(4-3) = = 7 + 4 = 11$		15	1

Знайдемо оптимальний план. Із таблиці першого кроку випливає, що $k_1^* = 1$, тобто для першого підприємства реалізується другий проект, яким передбачено 1 млн грн інвестицій з доходом, що дорівнює 3 млн грн. Отже, для другого, третього і четвертого підприємств залишається 4 – 1 = 3 млн грн інвестицій. Із таблиці другого кроку маємо, що за умов $x_2 = 3$ максимальний ефект можна отримати в разі реалізації для другого підприємства першого проекту ($k_2 = 1$). Дохід у такому разі становитиме 4 млн грн. Отже, $x_3 = 3 - 1 = 2$, тобто для третього і четвертого підприємств слід використати 2 млн грн інвестицій. Із таблиці третього кроку за умов $x_3 = 2$ маємо, що $k_3 = 0$. Отже, $x_4 = 2$, а йому відповідають капітальні вкладення $k_4 = 2$, які забезпечують дохід обсягом 8 млн грн. Остаточно маємо: дохід від 4 млн грн інвестицій становить 3 + 4 + 8 = 15 (млн грн).