

# Лекція 6. Нерозгалужені електричні кола змінного струму

Розглянемо застосування методу комплексних амплітуд. При послідовному з'єднанні елементів Рис.4 мають місце співвідношення для миттєвих значень та комплексів напруг:

$$u = u_R + u_L + u_C,$$

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Оскільки  $\dot{U}_R = IR$ ,  $\dot{U}_L = jIX_L$ ,  $\dot{U}_C = -jIX_C$ , то комплексні діючі значення струмів та напруг на комплексній площині можна зобразити відповідними обертовими векторами рис. 5.

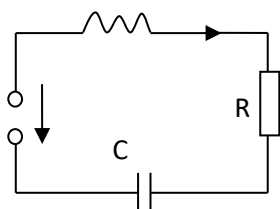


Рис. 4

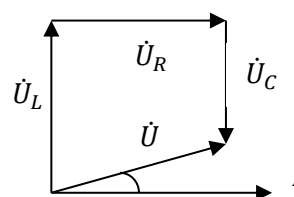


Рис. 5

З цієї векторної діаграми можна записати вираз щодо комплексу напруги:

$$\dot{U} = I[R + j(X_L - X_C)]$$

або

$$I = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)}$$

Різницю  $X = X_L - X_C$  називають реактивним опором, що в комплексній формі має вигляд:  $jX = j(X_L - X_C)$ .

Далі, можна виразити повний опір у комплексній формі

$$\underline{Z} = R + jX,$$

або

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi},$$

$$\underline{Z} = Z(\cos \varphi + j\sin \varphi)$$

де:  $\varphi$  – кут між струмом та напругою, визначається за співвідношенням

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

Модуль повного опору можна виразити як  $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ .

Прямокутний трикутник на векторній діаграмі можна перетворити на трикутник опорів. З трикутника опорів випливають такі співвідношення:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2},$$

$$R = Z \cos \varphi,$$

$$X = Z \sin \varphi,$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

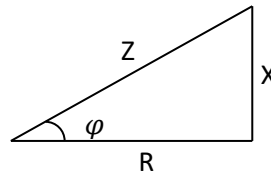
Зсув фаз вважають позитивним, коли  $\omega L > 1/\omega C$ .

Закон Ома для діючих значень та у комплексній формі для нерозгалуженого кола має вигляд:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}, \quad I = \frac{U}{Z}.$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + jX}, \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z}.$$

Розрахунок нерозгалуженого кола символічним методом можна виконувати так само, як і обчислення кола постійного струму.



**Рис.6 Трикутник опорів**

Якщо є таке коло і треба визначити повний опір, то можна записати таке співвідношення:

$$\underline{Z} = R_1 + R_2 + j(X_2 + X_4) - j(X_1 + X_3).$$

Отже всі індуктивні опори помножуються на символ  $+j$ , а всі ємнісні опори помножуються на символ  $-j$ .

Тепер можна підставити у формулу дані з електричного кола, якщо:

$$R_1 = 3, R_2 = 2, X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 2, X_4 = 4,$$

то

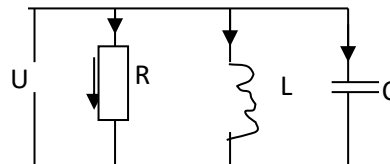
$$\begin{aligned} \underline{Z} &= 3 + 2 + j(3 + 4) - j(1 + 2) \\ \underline{Z} &= 5 + 4j. \end{aligned}$$

З цього можна зробити висновок, що все коло можна замінити еквівалентним опором. Цей опір складається із дійсної частини (активний опір 5 Ом) та уявної частини (індуктивний реактивний опір, що дорівнює 4 Ом)

## Розгалужені електричні кола

При паралельному з'єднанні елементів рівняння, за першим законом Кірхгофа для миттєвих значень та у комплексній формі мають такий вигляд:

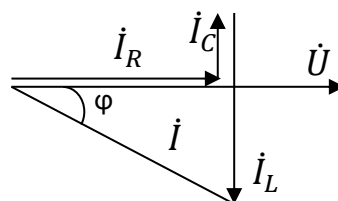
$$\begin{aligned} i &= i_R + i_L + i_C, \\ \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C. \end{aligned}$$



Через такі провідності:  $g$  – активну;  $b_L$  – реактивну індуктивність;  $b_C$  – реактивну ємнісну, струми можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{I}_R &= g\dot{U}; \\ \dot{I}_L &= -jb_L\dot{U}; \\ \dot{I}_C &= jb_C\dot{U}. \end{aligned}$$

Згідно з першим законом Кірхгофа, векторна діаграма має вигляд:



**Рис.7 Векторна діаграма**

За початковий вектор, зручно прийняти вектор напруги. Розділивши всі сторони трикутника струму на напругу, маємо трикутник провідностей.

Різницю  $b_L - b_C = b$  називають реактивною провідністю. У такому випадку повну провідність у комплексній формі можна визначити як:

$$\underline{Y} = g - jb,$$

або 
$$Y = Y(\cos\varphi - j\sin\varphi),$$

де модуль повної провідності буде дорівнювати

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2},$$

а зсув фаз між струмом та напругою

$$\varphi = \arctg \frac{b}{g}.$$

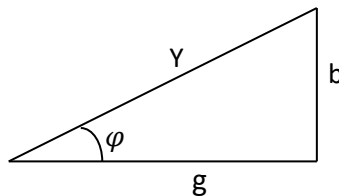
Прямокутний трикутник векторної діаграми можна перетворити на трикутник провідностей. З цього трикутника випливають такі співвідношення між провідностями:

$$Y = \sqrt{g^2 + b^2};$$

$$g = Y\cos\varphi,$$

$$b = Y\sin\varphi,$$

$$\varphi = \arctg \frac{b}{g}.$$



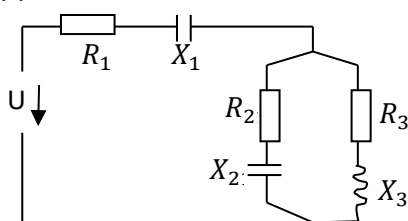
Прямокутний трикутник векторної діаграми дає таке співвідношення за законом Ома:

$$I = U\sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}$$

Для розрахунку розгалуженого кола, можна використати символічний метод, тобто:

$$\underline{Z} = \frac{R_1(-jX_1)(jX_2)}{R_1(-jX_1) + (-jX_1)(jX_2) + R_1(jX_2)}.$$

При змішаному з'єднанні елементів, спочатку розраховують розгалужені ділянки, а потім усе коло розглядають як нерозгалужене (або навпаки). Таким чином, якщо треба визначити повний опір кола (Рис.8), то можна визначити символічний метод:



$$\underline{Z} = R_1 - jX_1 + \underline{Z}_{\text{екв}}$$

$$\underline{Z}_{\text{екв}} = \frac{(R_2 - jX_2)(R_3 + jX_3)}{R_2 + R_3 + j(X_3 - X_2)}$$

Рис.8 Паралельне з'єднання елементів

## Потужність кола електричного струму

Миттєва потужність кола синусоїдного струму визначається добутком миттєвого струму та миттєвої напруги:  $p = iu$ .

**Потужність у символічному вигляді визначається добутком комплексу напруги та спряженого комплексу струму:**

$$\underline{S} = \dot{U}\dot{I}.$$

Вираз повної потужності у показниковій формі записується таким шляхом:

$$\underline{S} = UIe^{j\varphi}.$$

Можна потужність визначити і в алгебраїчній та тригонометричній формі:

$$\underline{S} = S \cos \varphi + j S \sin \varphi;$$

$$\underline{S} = P + jQ,$$

де  $S = UI$  - модуль повної потужності;

$P$  - активна потужність;

$Q$  - реактивна потужність.

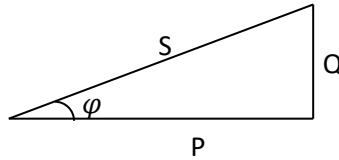
Трикутник потужностей має вигляд Рис. 1 і дає таке співвідношення:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

$$P = S \cos \varphi,$$

$$Q = S \sin \varphi,$$

$$\varphi = \arctg \frac{Q}{P}.$$



Таким чином, повна потужність є величина комплексна. Активна потужність є дійсною частиною повної потужності, а реактивна – уявною частиною повної потужності. Якщо є кілька приймачів електричної енергії, то співвідношення для повної потужності має вигляд:

$$S = \sqrt{(\sum P)^2 + (\sum Q_L - \sum Q_C)^2},$$

**Баланс потужностей** можна визначити рівнянням:

$$\underline{S}_{дж} = S_{прийм},$$

де  $\underline{S}_{дж}$  – потужність усіх джерел живлення,  $S_{прийм}$  – потужність приймачів кола.

## 10.2 Коефіцієнт потужності. Підвищення коефіцієнта потужності

З попереднього виразу активної потужності за співвідношенням:

$$P = S \cos \varphi$$

У цьому виразі  $\cos \varphi$  – коефіцієнт потужності. Він характеризує ступінь використання електричної енергії. Тому дуже важливим стає питання підвищення коефіцієнта потужності.

В приклад можна привести електричну схему, де індуктивним елементом можуть бути більшість потужних приймачів (наприклад, привідні двигуни), які мають індуктивний характер.

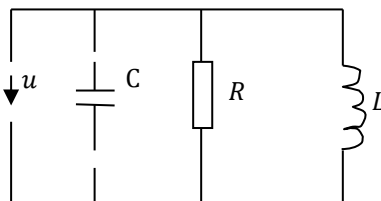


Рис. 2 типова схема енергоспоживання

Векторна діаграма такого кола буде мати такий вигляд рис. 3. Для того щоб зменшити зсув фаз, тобто підвищити коефіцієнт потужності, зазвичай паралельно приймачів вмикають батарею конденсаторів.

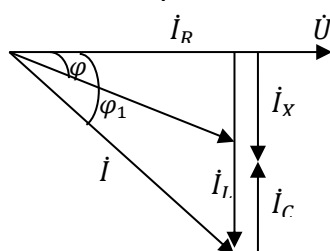


Рис. 3 Векторна діаграма

Для того, щоб визначити додаткову ємність, необхідно зменшити зсув фаз від  $\varphi_1$  до  $\varphi$ , тоді:

$$I_X = I_L - I_C; \quad I_X = I_R \tan \varphi; \quad I_L = I_R \tan \varphi_1; \quad I_C = U\omega C;$$

$$I_R \tan \varphi = I_R \tan \varphi_1 - U\omega C.$$

де 
$$C = \frac{I_R}{\omega U} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi)$$

Якщо використати залежність  $P = I_R U$ , то додаткову ємність визначити співвідношенням.

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\tan \varphi_1 - \tan \varphi).$$

### 10.3 Явище резонансу

Закон Ома для нерозгалуженого кола має вигляд: 
$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

У разі виникнення умови  $\omega L = 1/\omega C$  – таке явище називають **резонансом напруги**.

Режим електричного кола при послідовному з'єднанні ділянок з індуктивністю та ємністю, який характеризується рівністю індуктивного та ємнісного опорів, називають **резонансом напруг**.

В цьому випадку електричне коло перебуває в режимі резонансу напруг, який характеризується тим, що реактивна потужність кола дорівнює нулю, струм і напруга збігаються за фазою.

При незмінних параметрах  $L$  та  $C$  умову резонансу можна виконувати зміною частоти струму. Резонансну частоту визначають

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C;$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

У разі резонансу – напруги індуктивності та ємності рівні і векторна діаграма в цьому випадку буде виглядати таким чином рис. 3

$$\varphi = 0;$$

$$\cos \varphi = 1;$$

$$U = IR;$$

$$S = P.$$

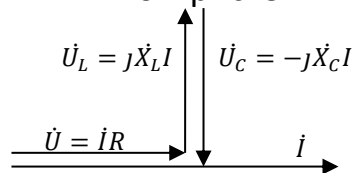


Рис. 4 Векторна діаграма

Якщо активний опір малий, то виникає значний струм і великі напруги на ємності та індуктивності, що можуть бути значно більшими, ніж напруга мережі:

$$R > 1/\omega C \text{ та } R < \omega L.$$

Величину реактивного опору при резонансній частоті називають **хвильовим опором**:

$$\rho = \omega_0 L = \frac{L}{\sqrt{L/C}}.$$

**Добротністю контуру** називають відношення хвильового опору до активного, тобто добротність визначає, у скільки разів напруга на реактивних елементах перевищує напругу на резистивному елементі:

$$Q = \frac{\rho}{R}.$$

Враховуючи, що

$$C = \omega L,$$

$$X_L = \omega L,$$

$$X_C = 1/\omega C,$$

$$X = X_L - X_C,$$

Закон Ома для розгалуженого кола має вигляд:  $I = U\sqrt{g^2 + (b_L - b_C)^2}$ .

Якщо  $b_L = b_C$ , то таке явище називається **резонансом струмів**. У цьому разі струми у вітках із реактивними елементами рівні і повернені у протилежні боки. Як і при резонансі напруг, резонансні струми мають такі співвідношення:

$$\varphi = 0,$$

$$\cos\varphi = 1,$$

$$S = P,$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}.$$

