Приклад 1. Напрацювання об'єкту повністю має нормальний розподіл з математичним очікуванням μ = 1000 годин і стандартним відхиленням σ = 200 годин. Визначити ймовірність безвідмовної роботи об'єкту впродовж 400 годин.

Рішення: Ймовірність безвідмовної роботи може бути обчислена через функцію розподілу

$$P(400) = 1 - F(400) = 1 - \frac{1}{200 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{400} e^{-\frac{(x-1000)^2}{2 \cdot 200^2}} dx.$$

Для розрахунку використовуємо табульований нормований нормальний розподіл Φ(x). Визначимо квантиль розподілу

$$x = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{400-1000}{200} = -3,$$

Для негативного значення квантиль $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Ймовірність безвідмовної роботи рівна

$$P(T) = 1 - \Phi(-x) = \Phi(x).$$

Обчислюємо значення ймовірності, використовуючи табульовану функцію Φ(x):

$$P(400) = \Phi(3) = 0{,}99865.$$

Ймовірність безвідмовної роботи об'єкту впродовж 400 годин складає 99,865 %.

Приклад 2. Визначити ймовірність безвідмовної роботи впродовж 1500 годин, якщо його ресурс по зносу підкоряється нормальному закону розподілу з математичним очікуванням 3500 годин і стандартним відхиленням 1000 годин.

Рішення: Обчислюємо квантиль нормованого нормального розподілу

$$x = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{1500-3500}{1000} = -2.$$

Ймовірність безвідмовної роботи:

$$P(1500) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) = 0{,}9772.$$

Ймовірність безвідмовної роботи впродовж 1500 година складає 97,72 %.

Приклад 3. Напрацювання об'єкту повністю підкоряється нормальному закону розподілу з параметрами μ = 1000 годин і σ = 200 годин. Визначити гамма-процентний ресурс об'єкту при ймовірності 90 %.

Рішення: Визначимо ймовірність відмови $\Phi(x) = 1 - P(x) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. По таблиці нормованого нормального розподілу знаходимо квантиль, що відповідає ймовірності 0,1: x=-1,281.

Використовуємо вираз для значення випадкової величини:

$$T_{p\gamma} = \mu + x \cdot \sigma = 1000 - 1{,}281 \cdot 200 = 744,$$

Отже, 90 % ресурс виробу рівний $T_{p90\%} = 744$ години.

Розподіл Вейбулла. Цей розподіл застосовують при описі надійності складних технічних систем. Розподіл Вейбулла є двох-параметричним універсальним законом, оскільки при зміні параметрів воно в межі може описувати нормальний розподіл, логарифмічно нормальний розподіл, експоненціальний розподіл та ін. Розподіл Вейбулла характеризується параметром масштабу λ і параметром форми α.

Функція розподілу для закону Вейбулла має вигляд:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t^{\alpha}},$$

функція надійності:

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}},$$

де α - параметр форми кривої розподілу; λ – параметр масштабу.

Щільність ймовірності розподілу Вейбулла виражається залежністю:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \alpha\lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}}.$$

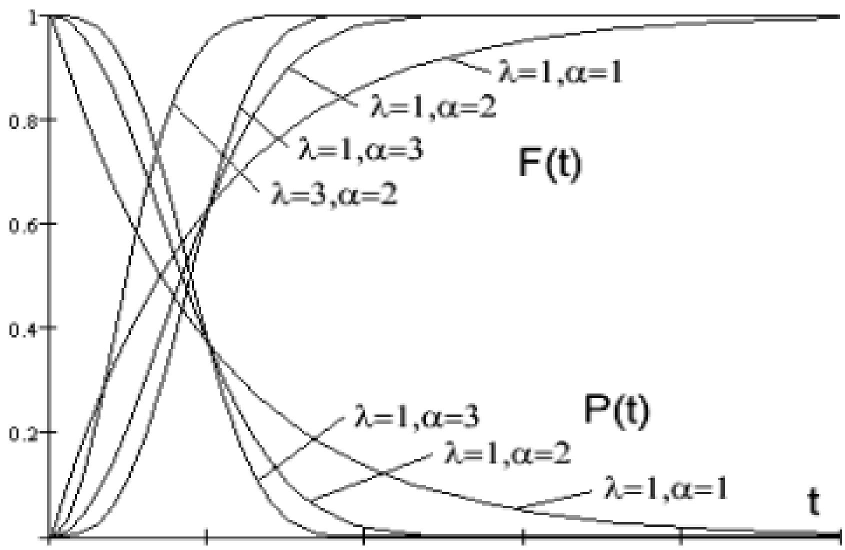

Рис. 1

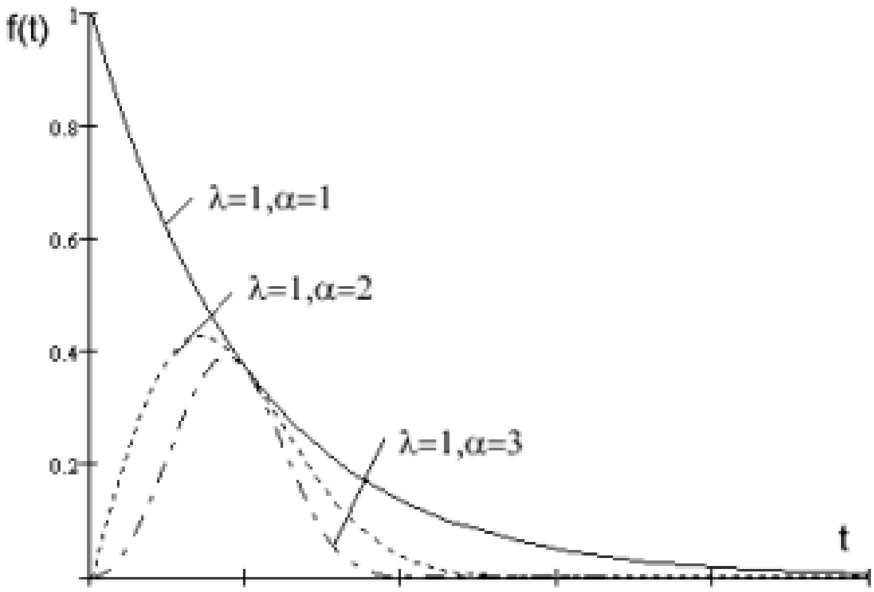

Рис. 2

Приклад 1. Визначити ймовірності безвідмовної роботи впродовж 1000 години, якщо її напрацювання на відмову описується розподілом Вейбулла з параметрами $\alpha = 2$ і $\lambda = 6{,}667\ 10^{-7}$.

Рішення: Ймовірність безвідмовної роботи рівна

$$P(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}} = e^{-6{,}667 \cdot 10^{-7} \cdot 1000^2} = 0{,}513.$$

Отже, ймовірність безвідмовної роботи впродовж 1000 години складає 51,3 %.

Гамма-розподіл. Розподіл характеризується двома параметрами: λ - параметр масштабу і α - параметр форми.

Криві розподіли змінюють свою форму в широких межах при зміні параметрів λ і α. Функція гамма-розподілу

$$F(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt, \ F(t) \equiv 0 \text{ при } t<0.$$

Щільність ймовірності гамма-розподілу ($\lambda > 0$, $\alpha > 0$)

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} \qquad \text{при } t \geq 0,$$

$$f(t) \equiv 0 \qquad \text{при } t<0$$

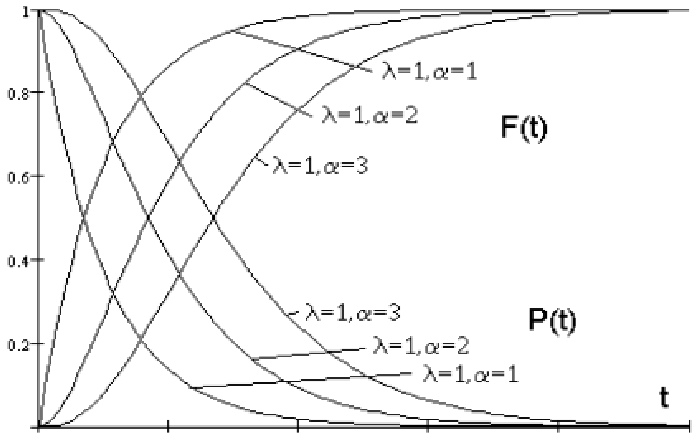

Рис. 3

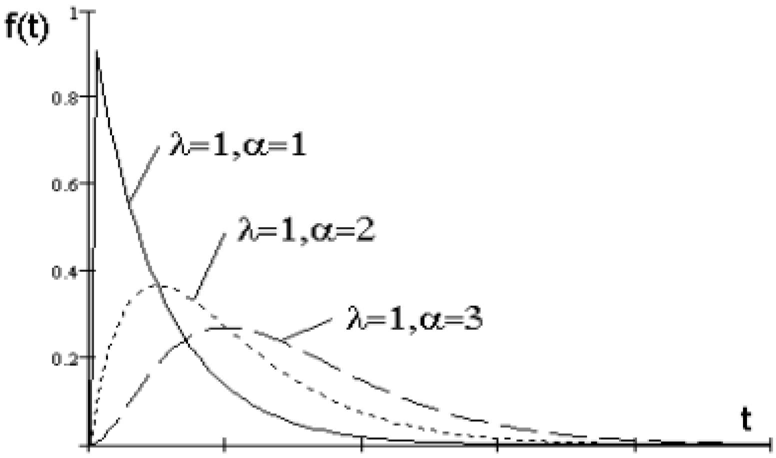

Рис. 4

Математичне сподівання і дисперсія для гамма-розподілу відповідно рівні

$$\mu = M(t) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{і} \quad \sigma^2 = D(t) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Приклад. Визначити ймовірність безвідмовної роботи виробу впродовж 1000 год, якщо напрацювання повністю цього виробу підкоряється гамма-розподілу з параметрами α = 4 і λ = 10-3.

Рішення: Використовуємо вираз для ймовірності безвідмовної роботи

$$P(t) = 1 - F(t) = 1 - F(t) = 1 - \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt.$$

Для обчислення виразу можна використовувати таблиці гамма-розподілу або комп'ютерні програми. Нижче показаний Mathcad-документ для обчислення ймовірності :

$$\alpha := 4 \qquad \lambda := 10^{-3} \qquad t := 1000$$

$$z := \int_0^t t^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda \cdot t}\, dt \qquad y := 1 - \frac{z \cdot \lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \qquad y = 0{,}981$$

В результаті обчислення отримаємо P(1000) = 0,981= 98,1 %.

Розподіл Пуассона. Використовується для дискретних випадкових величин. Описує появу раптових відмов в складних системах і розподіл часу відновлення, число відмов однотипного устаткування за певний інтервал часу і тому подібне.

Функція розподілу Пуассона для цілочисельного аргументу m = 0, 1, 2, ...

Щільність ймовірності дискретного розподілу

$$P_m(t) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

де t - фіксований інтервал часу, $\lambda > 0$. Чим менше значення λ, тим асиметричніший розподіл. Приклад графіку для розподілу Пуассона показаний на рисунку 5. Графік побудований для λ = 0,5.

Математичне сподівання і дисперсія розподілу Пуассона:

$$\mu = M(t) = \lambda, \qquad \sigma^2 = D(t) = \lambda.$$

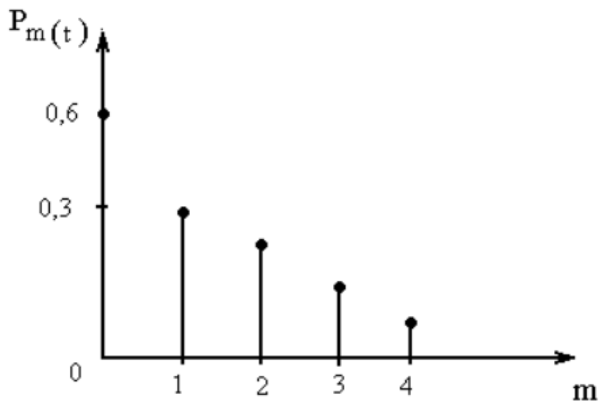

Рис. 5