Транспортна задача з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій. Матрична постановка.

Розглянемо збалансовану транспортну задачу (Т-задачу), в якій додатково по кожній комунікації $\overline{\boldsymbol{A_i B_j}}$ задана умова, що обмежує її пропускну спроможність зверху,

$$L(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min \,, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,, \ i = \overline{1,m} \,, \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{4.3}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j . \tag{4.5}$$

Матрицю $\boldsymbol{D} = \left\| \boldsymbol{d_{ij}} \right\|_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}}$ називають матрицею пропускних спроможностей комунікацій. Надалі задачу (4.1) – (4.5) будемо називати $\mathrm{T_d}$ - задачею.

До розв'язування $\mathrm{T_d}$ - задачі може бути пристосований довільний з методів, які розв'язують Т-задачу, зокрема і метод потенціалів. Однак при цьому змінюються:

1) умови розв'язності;
2) побудова початкового опорного плану;
3) умови оптимальності опорного плану;
4) перехід до нового опорного плану.

Розглянемо ці зміни детально.

Умови розв'язності $\mathrm{T_d}$ - задачі.

На відміну від Т-задачі, де умова балансу (4.5) є необхідною і достатньою умовою розв'язності, в $\mathrm{T_d}$ - задачі умова балансу є лише необхідною умовою розв'язності. Дійсно, якщо за виконання умови балансу (4.5) знайдеться номер i, для якого

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} < a_i , \tag{4.6}$$

або номер j, для якого

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij} < b_j , \tag{4.7}$$

то така $\mathrm{T_d}$ - задача не матиме допустимих розв'язків, тобто умова балансу (4.5) не є достатньою умовою розв'язності $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Побудова початкового опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Означення опорного плану в Т-задачі грунтувалось на понятті основної комунікації. Введемо аналогічне поняття для $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Означення. *Комунікацію* $\overline{A_i B_j}$ *назвемо основною комунікацією допустимого плану перевезень* $\boldsymbol{X}$ $\mathrm{T_d}$ *- задачі, якщо перевезення* x_{ij} *задовольняє умову*

$$0 < x_{ij} < d_{ij} \; . \tag{4.8}$$

За такого означення основної комунікації на $\mathrm{T_d}$ - задачу можна без змін перенести з Т-задачі означення опорного плану, яке грунтувалось на її геометричній інтерпретації, а також результати теорем про лінійну незалежність векторів-комунікацій та про розклад вектора-комунікацій.

Початковий опорний план $\mathrm{T_d}$ - задачі будується значно складніше у порівнянні з Т-задачею. В загальному випадку він складається з двох етапів, на другому з яких використовується метод потенціалів для $\mathrm{T_d}$ - задачі, в чому проглядається аналогія з М-методом відшукання початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

На першому етапі будується допустимий план перевезень за правилами методу мінімального елемента, але з урахуванням пропускних спроможностей комунікацій. При цьому, якщо величина перевезення x_{ij}, що заноситься у клітину (i, j) транспортної таблиці, визначається об'ємом залишків ресурсів або попиту, то як і в Т-задачі після заповнення клітини (i, j) викреслюється з таблиці або рядок, або стовпчик (або і рядок, і стовпчик, якщо залишки нульові, і клітина (i, j) виділяється. Якщо ж величина перевезення x_{ij} визначається тільки пропускною спроможністю d_{ij} (тобто обидва залишки і запасу, і попиту після заповнення клітини (i, j) залишаються додатними), то викреслюється з таблиці тільки така клітина (i, j), і вона не виділяється.

Після викреслення всіх клітин транспортної таблиці може виявитись, що всі ресурси розподілені і весь попит задоволений, тобто, що виконуються умови

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m} \; ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n} \; .$$

В цьому випадку побудований допустимий план перевезень приймається за початковий опорний план $\mathrm{T_d}$ - задачі, а множина виділених клітин транспортної таблиці приймається за множину базисних клітин цього плану.

Якщо число виділених клітин менше, ніж $m+n-1$, то множина виділених клітин доповнюється до числа $m+n-1$ довільними клітинами транспортної таблиці, але так, щоб вона залишалась ациклічною (перевіряється, наприклад, методом викреслювання після приєднання кожної клітини). Якщо ж після викреслення всіх клітин транспортної таблиці в деякому рядку, а, значить, і у деякому стовпчику, залишились нерозподілені залишки ресурсів і попиту, тобто знайдуться i та j такі, що $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i$ і $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j$, то переходять до другого етапу побудови початкового опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Нехай

$$\delta = \sum_{i=1}^{m}(a_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij})$$

суми нерозподілених залишків по ресурсах і по попиту (вони рівні в силу збалансованості задачі). Скористаємось ідеєю методу штучного базису і введемо в таблицю додаткові $(m+1)-$й рядок з ресурсом $a_{m+1} = \delta$ і $(n+1)-$й стовпчик з попитом $b_{n+1} = \delta$ та покладемо:

$$c_{i,n+1} = M,\ d_{i,n+1} = \infty\ \ (i = \overline{1,m}),$$

$$c_{m+1,j} = M,\ d_{m+1,j} = \infty\ \ (j = \overline{1,n}),$$

$$c_{m+1,n+1} = 0,\ d_{m+1,n+1} = \infty,$$

де $M >> 0$ – нескінченно великий штраф за перевезення продукту по відповідній комунікації.

Нерозподілені залишки розподіляємо так: незадоволений попит задовольняємо ресурсом від фіктивного пункту $\boldsymbol{A_{m+1}}$, невивезений продукт направляємо фіктивному споживачу $\boldsymbol{B_{n+1}}$. Клітини з додатними перевезеннями у додаткових рядку і стовпчику виділяються.

Якщо загальна кількість виділених клітин розширеної задачі виявиться меншою, ніж $(m+1)+(n+1)-1 = m+n+1$, то множину виділених клітин доповнюють до цього числа довільними клітинами таблиці розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі, але так, щоб ця множина залишалась ациклічною. Тоді множину виділених клітин побудованого допустимого плану розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі можна прийняти за множину його базисних клітин. За таких умов цей план буде початковим опорним планом розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Далі побудовану збалансовану розширену $\mathrm{T_d}$ - задачу розв'язують методом потенціалів. Якщо в процесі розв'язування всі перевезення додаткового рядка і стовпчика стануть рівними нулю (за вийнятком перевезення $x_{m+1,n+1} = \delta$), тобто весь фіктивний запас буде вивезений фіктивному споживачу, то ці рядок і стовпчик відкидають з таблиці. На основній частині таблиці в цьому випадку залишиться початковий опорний план вихідної $\mathrm{T_d}$ - задачі. Якщо ж буде отриманий оптимальний розв'язок розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі, в якому принаймні одне фіктивне перевезення додатне, то вихідна $\mathrm{T_d}$ - задача допустимих розв'язків не має.

Умови оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Обчислення системи потенціалів для опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі нічим не відрізняється від обчислення системи потенціалів для опорного плану Т-задачі. Ознака оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі для базисних та незаповнених клітин транспортної таблиці також нічим не відрізняється від відповідної ознаки для опорного плану Т-задачі. Вона лише доповнюється для клітин, що заповнені за пропускною спроможністю відповідних комунікацій.

Отже, нехай $\boldsymbol{X}$ – деякий опорний план $\mathrm{T_d}$ - задачі, $\boldsymbol{E_X}$ – множина базисних клітин цього плану. Введемо до розгляду дві множини:

$$\Gamma_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{0}} = \{(i,j) \notin \boldsymbol{E_X},\ x_{ij} = 0\},$$

$$\Gamma_{\boldsymbol{X}}^{d} = \{(i,j) \notin \boldsymbol{E_X},\ x_{ij} = d_{ij}\}.$$

Ознака оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі. *Опорний план $\boldsymbol{X}$ є оптимальним планом $\mathrm{T_d}$ - задачі, якщо виконуються умови*:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j = 0,\ (i,j) \in \boldsymbol{E_X}, \qquad (4.9)$$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j \geq 0,\ (i,j) \in \Gamma_{\boldsymbol{X}}^{\boldsymbol{0}}, \qquad (4.10)$$

$$\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j \leq 0,\ (i,j) \in \Gamma_{\boldsymbol{X}}^{d}. \qquad (4.11)$$

Перехід до нового опорного плану.

Нехай опорний план $\boldsymbol{X}$ $\mathrm{T_d}$ - задачі не задовольняє умови оптимальності (4.9) – (4.11). Якщо в Т-задачі клітина (i_k, j_k) транспортної таблиці для введення у множину базисних визначалась за правилом

$$(i_k,j_k)=\underset{\{(i,j)\in\Gamma^0_X:\Delta_{ij}<0\}}{\arg\min}\ \Delta_{ij}\ \text{(або }(i_k,j_k)=\underset{\{(i,j)\in\Gamma^0_X:\Delta_{ij}<0\}}{\arg\max}\left|\Delta_{ij}\right|\text{)}$$

то в $\mathrm{T_d}$ - задачі її потрібно визначати, враховуючи і клітини множини Γ^d_X, на яких порушені умови (4.11), тобто

$$(i_k,j_k)=\arg\max(\max_{\{(i,j)\in\Gamma^0_X:\Delta_{ij}<0\}}\left|\Delta_{ij}\right|,\max_{\{(i,j)\in\Gamma^d_X:\Delta_{ij}>0\}}\Delta_{ij})\ .$$

Пошук циклу C на множині клітин $\boldsymbol{E_X}\cup\{(i_k,j_k)\}$ для $\mathrm{T_d}$ - задачі і для Т-задачі здійснюється однаково. Розбиття циклу C на додатний C^+ та від'ємний C^- півцикли відбувається складніше і залежить від того, до якої множини Γ^d_X чи Γ^0_X належить клітина (i_k, j_k).

Якщо $(i_k,j_k)\in\Gamma^0_X$, то таке розбиття нічим не відрізняється від аналогічної процедури для Т-задачі. Практично його здійснюють так: першою до додатного півциклу C^+ відносять клітину (i_k, j_k), наступну за нею клітину по циклу відносять до від'ємного півциклу C^-, наступну клітину по циклу за цією знову відносять до додатного півциклу C^+, наступну – знову до від'ємного C^-, і т.д., поки, чергуючи віднесення клітин до півциклів, не обійдуть цикл і не повернуться до клітини (i_k,j_k). Напрямок обходу циклу C при цьому не суттєвий. У випадку, коли $(i_k,j_k)\in\Gamma^d_X$, процедура розбиття здійснюється аналогічно, тільки клітину (i_k,j_k) першою відносять до від'ємного півциклу C^-.

Визначення сталої θ перерозподілу плану перевезень у $\mathrm{T_d}$ - задачі теж відбувається.складніше. Нагадаємо, що процедура визначення θ у Т-задачі гарантує невід'ємність компонент нового опорного плану. Якщо застосувати її в незмінному вигляді до $\mathrm{T_d}$ - задачі, то можливе переповнення пропускних спроможностей комунікацій на клітинах додатного півциклу. Тому θ обчислюється у два етапи. Спочатку знаходять $\theta^-=\min\limits_{\{(i,j)\in C^-\}}x_{ij}$ і $\theta^+=\min\limits_{\{(i,j)\in C^+\}}(d_{ij}-x_{ij})$, а потім вже визначають $\theta=\min\{\theta^-,\theta^+\}$.

Перехід до нового опорного плану в $\mathrm{T_d}$ - задачі нічим не відрізняється від аналогічного переходу в Т-задачі і практично здійснюється додаванням θ до перевезень у клітинах додатного півциклу C^+ і відніманням θ від перевезень у клітинах від'ємного півциклу C^-, після чого цикл C розривають на клітині (i_l, j_l), за якою визначалось θ і яка стає небазисною. Перевезення у всіх інших клітинах $\mathrm{T_d}$ - таблиці залишаються незмінними.

І, нарешті, зауважимо, що викладений вище метод потенціалів для розв'язування Т-задачі розв'язуватиме і $\mathrm{T_d}$ - задачу, якщо в його алгоритм внести зміни у відповідності з викладеними особливостями $\mathrm{T_d}$ - задачі.

Приклади.

Приклад. Розв'язати транспортну задачу з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій, задану транспортною таблицею 35 (питомі транспортні витрати вказані у верхньому правому, а пропускні спроможності комунікацій – у нижньому лівому кутах кожної клітини).

Таблиця 35

a_i \ b_j	70	30	50
45	5 30	2 25	3 25
65	7 40	9 15	6 20
40	4 25	7 20	5 15

Розв'язування. Перевіряємо умову балансу. Задача збалансована, оскільки

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 45 + 65 + 40 = 150, \quad \sum_{j=1}^{3} b_j = 70 + 30 + 50 = 150 .$$

Знаходимо початковий опорний план задачі. Першою заповнюємо клітину $(1,2)$:

$$x_{12} = \min(a_1, b_2, d_{12}) = \min(45,30,25) = 25 ,$$

$$a_1^{(1)} = a_1 - x_{12} = 45 - 25 = 20 , \; b_2^{(1)} = b_2 - x_{12} = 30 - 25 = 5 .$$

Клітина заповнюється за пропускною спроможністю, яка менша і ресурсу, і попиту. Після занесення у клітину $(1,2)$ перевезення її викреслюємо з таблиці (див. таблицю 36).

Наступною заповнюємо клітину $(1,3)$:

$$x_{13} = \min(a_1^{(1)}, b_3, d_{13}) = \min(20,50,25) = 20 ,$$

$$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} - x_{13} = 20 - 20 = 0 , \; b_3^{(1)} = b_1 - x_{13} = 50 - 20 = 30 .$$

Таблиця 3

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 25	20
65	7 40	9 15	6 20	
40	4 25	7 20	5 15	
$b_j - x_{ij}$		5		

Клітину $(1,3)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення) і викреслюємо перший рядок, оскільки ресурс пункту A_1 вичерпаний (див. таблицю 37).

Таблиця 37

a_i \ b_j	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **<u>20</u>** 25	0
65	7 40	9 15	6 20	
40	4 25	7 20	5 15	
$b_j - x_{ij}$		5	30	

Далі заповнюємо клітину $(3,1)$:

$$x_{31} = \min(a_3, b_1, d_{31}) = \min(40, 70, 25) = 25,$$

$$a_3^{(1)} = a_3 - x_{31} = 40 - 25 = 15, \quad b_1^{(1)} = b_1 - x_{31} = 70 - 25 = 45.$$

Клітина заповнюється за пропускною спроможністю, яка менша і ресурсу, і попиту. Клітину $(3,1)$ викреслюємо після занесення до неї перевезення (див. таблицю 38).

Наступною заповнюємо клітину $(3,3)$:

$$x_{33} = \min(a_3^{(1)}, b_3^{(1)}, d_{33}) = \min(15, 30, 15) = 15,$$

$a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - x_{33} = 15 - 15 = 0$, $b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - x_{33} = 30 - 15 = 15$.

Таблиця 38

b_j / a_i	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **<u>20</u>** 25	0
65	7 40	9 15	6 20	
40	4 ~~25~~ 25	7 20	5 15	15
$b_j - x_{ij}$	45	5	30	

Клітину $(3,3)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення), не дивлячись на те, що $x_{33} = d_{33}$, і викреслюємо третій рядок, оскільки ресурс пункту $\boldsymbol{A_3}$ вичерпаний (див. таблицю 39).

Таблиця 39

b_j / a_i	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **<u>20</u>** 25	0
65	7 40	9 15	6 20	
40	4 ~~25~~ 25	7 20	5 **<u>15</u>** 15	0
$b_j - x_{ij}$	45	5	15	

Далі заповнюємо клітину $(2,3)$:

$x_{23} = \min(a_2, b_3^{(2)}, d_{23}) = \min(65, 15, 20) = 15$,

$a_2^{(1)} = a_2 - x_{23} = 65 - 15 = 50$, $b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - x_{23} = 15 - 15 = 0$.

Клітину $(2,3)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення) і викреслюємо третій стовпчик, оскільки попит пункту $\boldsymbol{B_3}$ задоволений (див. таблицю 40).

Таблиця 40

b_j \ a_i	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **<u>20</u>** 25	0
65	7 40	9 15	6 **<u>15</u>** 20	50
40	4 ~~25~~ 25	7 20	5 **<u>15</u>** 15	0
$b_j - x_{ij}$	45	5	0	

Наступною заповнюємо клітину $(2,1)$:

$$x_{21} = \min(a_2^{(1)}, b_1^{(1)}, d_{21}) = \min(50,45,40) = 40 \,,$$

$$a_2^{(2)} = a_2^{(1)} - x_{21} = 50 - 40 = 10 \,, \; b_1^{(2)} = b_1^{(1)} - x_{21} = 45 - 40 = 5 \,.$$

Клітина заповнюється за пропускною спроможністю, яка менша і ресурсу, і попиту. Клітину $(2,1)$ викреслюємо після занесення до неї перевезення (див. таблицю 41).

Таблиця 41

b_j \ a_i	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **<u>20</u>** 25	0
65	7 ~~40~~ 40	9 15	6 **<u>15</u>** 20	10
40	4 ~~25~~ 25	7 20	5 **<u>15</u>** 15	0
$b_j - x_{ij}$	5	5	0	

Останньою заповнюємо клітину $(2,2)$:

$$x_{22} = \min(a_2^{(2)}, b_2^{(1)}, d_{22}) = \min(10,5,15) = 5 \,,$$

$$a_2^{(3)} = a_2^{(2)} - x_{22} = 10 - 5 = 5 \,, \; b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - x_{22} = 5 - 5 = 0$$

Клітину $(2{,}2)$ виділяємо (підкреслюємо перевезення) і викреслюємо другий стовпчик, оскільки попит пункту $\boldsymbol{B_2}$ задоволений (див. таблицю 42).

Таблиця 42

b_j / a_i	70	30	50	$a_i - x_{ij}$
45	5 30	2 ~~25~~ 25	3 **20** 25	0
65	7 ~~40~~ 40	9 **5** 15	6 **15** 20	5
40	4 ~~25~~ 25	7 20	5 **15** 15	0
$b_j - x_{ij}$	5	0	0	

Оскільки існують нерозподілені залишки з ресурсів $\delta = a_2^{(3)} = 5$ та з попиту $\delta = b_1^{(2)} = 5$, то переходимо до другого етапу побудови початкового опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі. Будуємо розширену $\mathrm{T_d}$ - задачу, яку записуємо в таблицю 43.

Таблиця 43

b_j / a_i	70	30	50	5	u_i
45	5 30	2 25 25	3 **20** 25	M	
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **15** 20	M **5**	
40	4 25 25	7 20	5 **15** 15	M	
5	M **5**	M	M	0 **0**	
v_j					

Фіктивними в цій таблиці є пункт $\boldsymbol{A_4}$ з ресурсом $a_4 = \delta = 5$ і пункт $\boldsymbol{B_4}$ з попитом $b_4 = \delta = 5$. Незадоволений попит $\delta = b_1^{(2)} = 5$ пункту $\boldsymbol{B_1}$

задовольняємо за рахунок фіктивного виробника $\boldsymbol{A_4}$, покладаємо $x_{41} = 5$ і виділяємо клітину $(4,1)$; нерозподілений ресурс $\delta = a_2^{(3)} = 5$ пункту $\boldsymbol{A_2}$ розподіляємо фіктивному споживачу $\boldsymbol{B_4}$, покладаємо $x_{24} = 5$ і клітину $(2,4)$ також виділяємо. Оскільки для розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі число базисних клітин дорівнює 7, а виділених клітин є тільки 6, потрібно доповнити множину виділених клітин однією клітиною, але так, щоб ця множина залишилась ациклічною. Якщо діяти за принципом мінімального елемента, то першою потрібно перевірити клітину $(4,4)$. Занесемо в неї виділений нуль і методом викреслювання перевіримо отриману множину виділених клітин на ациклічність. Послідовність викреслювань буде такою: 1 рядок, 3 рядок, 1, 2, 3 стовпчики, 2 рядок, 4 рядок. Всі клітини таблиці викреслені, тому множину виділених клітин приймаємо за множину базисних клітин початкового опорного плану розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі (див. таблицю 43).

Розширену $\mathrm{T_d}$ - задачу розв'язуємо методом потенціалів. Покладемо $u_2 = 0$ і з рівнянь на базисних клітинах $(2,2), (2,3), (2,4)$ знаходимо:

$$v_2 = c_{22} + u_2 = 9 + 0 = 9,\ v_3 = c_{23} + u_2 = 6 + 0 = 6,\ v_4 = c_{24} + u_2 = \mathrm{M} + 0 = \mathrm{M}.$$

Знайдені потенціали заносимо у таблицю 44.

Таблиця 44

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	5 30	2 25 25	3 <u>**20**</u> 25	M	
65	7 40 40	9 <u>**5**</u> 15	6 <u>**15**</u> 20	M <u>**5**</u>	0
40	4 25 25	7 20	5 <u>**15**</u> 15	M	
5	M <u>**5**</u>	M	M	0 <u>**0**</u>	
v_j		9	6	M	

Далі, послідовно використовуючи базисні клітини $(1,3), (3,3), (4,4), (4,1)$, обчислюємо:

$$u_1 = v_3 - c_{13} = 6 - 3 = 3,\ u_3 = v_3 - c_{33} = 6 - 5 = 1,$$

$$u_4 = v_4 - c_{44} = \text{M} - 0 = \text{M},\ v_1 = c_{41} - u_4 = \text{M} + \text{M} = 2\text{M}.$$

Потенціали заносимо у таблицю 45.

Таблиця 45

b_j / a_i	70	30	50	5	u_i
45	8-2M 5 30	2 25 25	3 **20** 25	M	3
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **15** 20	M **5**	0
40	4 25 25	-1 7 20	5 **15** 15	M	1
5	M **5**	M	M	0 **0**	M
v_j	2M	9	6	M	

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i, j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 45 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності:

$$\Delta_{11} = 5 + 3 - 2\text{M} = 8 - 2\text{M},\ \Delta_{32} = 7 + 1 - 9 = -1.$$

Клітини $(1,1), (3,2)$ з порушенням ознаки оптимальності належать до множини Γ_X^0. Тому для введення у множину базисних вибираємо клітину $(1,1)$ з найбільшим модулем від'ємної оцінки. Приєднуємо цю клітину до множини базисних клітин і методом викреслювання (всього буде два викреслювання: 3 рядок, 2 стовпчик) знаходимо цикл

$$C = \{(1,1), (4,1), (4,4), (2,4), (2,3), (1,3)\},$$

який розбиваємо на додатний $C^+ = \{(1,1), (4,4), (2,3)\}$ та від'ємний $C^- = \{(4,1), (2,4), (1,3)\}$ півцикли, першою відносячи до додатного півциклу клітину $(1,1)$, оскільки вона належить множині Γ_X^0. Цикл обходимо за напрямом проти годинникової стрілки, починаючи з клітини $(1,1)$ і почергово відносячи клітини циклу до додатного і від'ємного півциклів (див. таблицю 46).

За від'ємним півциклом $C^- = \{(4,1), (2,4), (1,3)\}$ знаходимо

$\theta^{-} = \min(x_{41}, x_{24}, x_{13}) = \min(5, 5, 20) = 5$,

Таблиця 46

b_j / a_i	70	30	50	5	u_i
45	8-2M 5 $+\theta \Downarrow$ 30	2 25 25	3 **20** $-\theta \Leftarrow$ 25	M	3
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **15** $+\theta \Uparrow$ 20	M **5** $-\theta \Leftarrow$	0
40	4 25 25	-1 7 20	5 **15** 15	M	1
5	M **5** $-\theta \Rightarrow$	M	M	0 **0** $+\theta \Uparrow$	M
v_j	2M	9	6	M	$\theta = 5$

За додатним півциклом $C^{+} = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ знаходимо

$$\theta^{+} = \min(d_{11} - x_{11}, d_{44} - x_{44}, d_{23} - x_{23}) = \min(30 - 0, \infty - 0, 20 - 15) = 5.$$

Отже, $\theta = \min(\theta^{-}, \theta^{+}) = \min(5,5) = 5$, і це значення досягається на трьох клітинах $(4,1)$, $(2,4)$, $(1,3)$.

Після переходу до нового опорного плану цикл C можна розривати на будь-якій з цих клітин, але у відповідності з ідеєю методу штучного базису потрібно розривати цикл на одній із фіктивних базисних клітин, звичайно, якщо це можливо зробити. Переходимо до нового опорного плану розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі, додаючи θ до перевезень додатного півциклу $C^{+} = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ і віднімаючи θ від перевезень від'ємного півциклу $C^{-} = \{(4,1),(2,4),(1,3)\}$. Цикл розриваємо на фіктивній клітині $(4,1)$ (див. таблицю 47).

Всі блоковані М-методом фіктивні клітини розширеної $\mathrm{T_d}$ - задачі звільнились від додатних перевезень, обмін фіктивним продуктом відбувається тільки між фіктивними пунктами A_4 і B_4 , тому з таблиці 47 можна видалити відповідні їм рядок і стовпчик (див. таблицю 48).

Таблиця 47

a_i \ b_j	70	30	50	5	u_i
45	5 **5** 30	2 25 25	3 **15** 25	M	
65	7 40 40	9 **5** 15	6 **20** 20	M **0**	
40	4 25 25	7 20	5 **15** 15	M	
5	M	M	M	0 **5**	
v_j					

Ми отримали початковий опорний план вихідної $\mathrm{T_d}$ - задачі (таблиця 48), продовжуємо її розв’язувати методом потенціалів.

Таблиця 48

a_i \ b_j	70	30	50	u_i
45	5 **5** 30	2 25 25	3 **15** 25	0
65	7 40 40	9 **5** $-\theta \Downarrow$ 15	6 **20** $+\theta \Leftarrow$ 20	-3
40	4 25 25	-1 7 $+\theta \Rightarrow$ 20	5 **15** $-\theta \Uparrow$ 15	-2
v_j	5	6	3	$\theta = 0$

Покладемо $u_1 = 0$ і послідовно використовуючи базисні клітини $(1,1)$,
$(1,3)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(2,2)$, обчислимо:

$$v_1 = c_{11} + u_1 = 5 + 0 = 5,\ v_3 = c_{13} + u_1 = 3 + 0 = 3,\ u_2 = v_3 - c_{23} = 3 - 6 = -3,$$

$$u_3 = v_3 - c_{33} = 3 - 5 = -2,\ v_2 = c_{22} + u_2 = 9 - 3 = 6.$$

Заносимо потенціали в таблицю 48.

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i,j): $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ і заносимо у таблицю 48 (верхній лівий кут клітини) лише ті з них, які не задовольняють умови оптимальності. Така оцінка лише одна:

$\Delta_{32} = 7 - 2 - 6 = -1$.

Клітина $(3,2) \in \Gamma_X^0$. Приєднуємо цю клітину до множини базисних клітин і знаходимо цикл

$C = \{(3,2),(3,3),(2,3),(2,2)\}$,

який розбиваємо на додатний $C^+ = \{(3,2),(2,3)\}$ та від'ємний $C^- = \{(3,3),(2,2)\}$ півцикли, першою відносячи до додатного півциклу клітину $(3,2)$, оскільки вона належить множині Γ_X^0 (див. таблицю 48).

За від'ємним півциклом $C^- = \{(3,3),(2,2)\}$ знаходимо

$\theta^- = \min(x_{22}, x_{33}) = \min(5, 15,) = 5$,

по додатному півциклу $C^+ = \{(1,1),(4,4),(2,3)\}$ знаходимо

$\theta^+ = \min(d_{32} - x_{32}, d_{23} - x_{23}) = \min(20 - 0, 20 - 20) = \min(20,0) = 0$.

Отже, $\theta = \min(\theta^-, \theta^+) = \min(5,0) = 0$, і це значення досягається на клітині $(2,3)$.

Оскільки $\theta = 0$, то опорний план залишається незмінним, а змінюється лише його базис. Розриваючи цикл C на клітині $(2,3)$, за якою визначалося θ, ми, тим самим, виводимо її із множини базисних і вводимо замість неї у множину базисних клітин клітину $(3,2)$ (див. таблицю 49).

Таблиця 49

a_i \ b_j	70	30	50	u_i
45	5 **<u>5</u>** 30	2 25 25	3 **<u>15</u>** 25	0
65	7 40 40	9 **<u>5</u>** 15	6 20 20	-4
40	4 25 25	7 **<u>0</u>** 20	5 **<u>15</u>** 15	-2
v_j	5	5	3	

Обчислюємо потенціали, покладаючи $u_1 = 0$ і послідовно використовуючи рівняння на базисних клітинах $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,3)$, $(3,2)$, $(2,2)$:

$v_1 = c_{11} + u_1 = 5 + 0 = 5,\ v_3 = c_{13} + u_1 = 3 + 0 = 3$,

$u_3 = v_3 - c_{33} = 3 - 5 = -2,\ v_2 = c_{32} + u_3 = 7 - 2 = 5,\ u_2 = v_2 - c_{22} = 5 - 9 = -4$.

Потенціали заносимо у таблицю 49.

Обчислюємо оцінки небазисних клітин (i, j) $\Delta_{ij} = c_{ij} + u_i - v_j$ та перевіряємо умови оптимальності. Оцінки всіх небазисних клітин (вони заповнені за пропускними спроможностями комунікацій) недодатні. Ознака оптимальності опорного плану $\mathrm{T_d}$ - задачі виконується.

Отже, поточний опорний план $\boldsymbol{X}^*$ в таблиці 15 – оптимальний. Остаточно маємо:

$$\boldsymbol{X}^* = \begin{pmatrix} 5 & 25 & 15 \\ 40 & 5 & 20 \\ 25 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$L(\boldsymbol{X}^*) = 5\cdot 5 + 2\cdot 25 + 3\cdot 15 + 7\cdot 40 + 9\cdot 5 + 6\cdot 20 + 4\cdot 25 + 7\cdot 0 + 5\cdot 15 =$$
$$= 25 + 50 + 45 + 280 + 45 + 120 + 100 + 75 = 740$$

Завдання для самостійного розв’язування.

Лабораторна робота. Розв’язування транспортної задачі з обмеженими пропускними спроможностями комунікацій методом потенціалів.

4.6.3.

a_i \ b_j	17	33	38	21	22
10	5 9	3 1	20 16	7 5	25 11
48	8 20	12 19	6 17	12 3	5 6
27	3 10	1 14	12 30	2 18	19 7
46	6 18	3 16	3 11	1 13	18 17

4.6.4.

a_i \ b_j	75	10	20	40	30
80	7 20	19 6	7 15	12 22	18 25
12	17 2	11 5	7 2	13 3	11 4
38	1 20	13 1	19 3	18 15	12 8
45	18 40	4 5	11 6	3 2	11 10

4.6.5.

a_i \ b_j	40	40	20	10	30
14	10 8	16 2	3 3	8 2	15 2
25	3 15	4 3	12 3	9 4	1 5
56	2 10	20 20	4 15	11 5	5 10
45	7 11	17 20	13 7	8 4	15 21

4.6.6.

a_i \ b_j	30	27	16	33	24
15	16 5	12 3	3 5	9 4	10 10
17	4 7	16 5	1 5	11 10	10 4
23	19 12	10 7	18 6	20 4	19 3
75	12 10	4 17	11 15	18 35	19 20

4.6.7.

a_i \ b_j	35	30	35	45	25
30	10 10	9 4	12 15	7 8	1 10
70	16 20	4 21	9 23	19 16	10 15
50	20 5	17 10	11 8	1 25	12 12
20	13 4	14 5	15 6	7 7	8 10

4.6.8.

a_i \ b_j	5	15	35	15	40
50	5 2	19 6	12 18	5 5	9 25
20	17 3	20 4	11 1	10 7	9 8
10	2 9	15 5	12 3	13 3	6 7
30	18 15	3 7	8 21	5 22	14 6

4.6.9.

a_i \ b_j	10	50	40	50	20
60	5 5	4 20	20 14	6 25	14 13
80	19 19	20 22	2 15	4 4	5 12
40	9 6	6 8	8 15	19 5	1 10
20	7 14	15 7	20 2	6 23	11 20

4.6.10.

a_i \ b_j	11	10	14	16	17
10	17 7	18 10	7 4	20 5	2 8
13	5 5	16 4	3 6	9 5	19 9
28	15 11	14 6	17 12	7 8	5 7
17	11 3	15 2	9 1	8 6	16 10