Транспортна задача

Транспортна задача — це специфічна задача лінійного програмування, застосовувана для визначення найекономічнішого плану перевезення однорідної продукції від постачальників до споживачів.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min;$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \left(i = \overline{1...m}\right);$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \left(j = \overline{1...n}\right);$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(i = \overline{1...m};\ j = \overline{1...n}\right).$$

де x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться від і-го постачальника до j-го споживача;

c_{ij} — вартість перевезення одиниці продукції від і-го постачальника до j-го споживача;

a_i — запаси продукції і-го постачальника;

b_j — попит на продукцію j-го споживача.

Якщо в транспортній задачі загальна кількість продукції постачальників дорівнює загальному попиту всіх споживачів, тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то таку транспорту задачу називають збалансованою, або закритою. Якщо ж така умова не виконується, то транспортну задачу називають незбалансованою, або відкритою.

Планом транспортної задачі називають будь-який невід'ємний розв'язок системи обмежень транспортної задачі, який позначають матрицею $x = \left(x_{ij}\right) \quad \left(i = \overline{1...m};\ j = \overline{1...n}\right)$.

Оптимальним планом транспортної задачі називають матрицю $X^* = \left(\vec{x}^{*}_{ij}\right) \quad \left(i = \overline{1...m};\ j = \overline{1...n}\right)$, яка задовольняє умови задачі і для якої цільова функція набуває найменшого значення.

Теорема (умова існування розв'язку транспортної задачі). Необхідною і достатньою умовою існування розв'язку транспортної задачі є її збалансованість, тобто $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв'язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв'язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є метод потенціалів.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1. Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).

2. Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3. Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4. Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв'язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5. Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Розглянемо докладно кожний етап цього алгоритму.

1. Якщо під час перевірки збалансованості виявилося, що транспортна задача є відкритою, то її необхідно звести до закритого типу. Це виконується введенням фіктивного умовного постачальника A_{m+1} у разі перевищення загального попиту над запасами $\left(\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i\right)$ із запасом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$. Якщо ж загальні запаси постачальників перевищують попит споживачів $\left(\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j\right)$ до закритого типу задача зводиться введенням фіктивного умовного споживача B_{n+1} з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Вартість перевезення одиниці продукції для фіктивного постачальника A_{m+1} , або фіктивного споживача B_{n+1} . вважається такою, що дорівнює нулю.

2. Для побудови початкового опорного плану транспортної задачі існує кілька методів: північно-західного кута; мінімальної вартості; подвійної переваги; апроксимації Фогеля. Побудову опорного плану зручно подавати у вигляді таблиці, в якій постачальники продукції є рядками, а споживачі — стовпчиками.

Побудову першого плану за методом північно-західного кута починають із заповнення лівої верхньої клітинки таблиці (x_{11}), в яку записують менше з двох чисел a_1 та b_1. Далі переходять до наступної клітинки в рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т. д. Закінчують заповнювати таблицю у правій нижній клітинці.

Ідея методу мінімальної вартості полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Метод подвійної переваги. Перед початком заповнення таблиці необхідно позначити клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (як мінімальні і в рядку, і в стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз (як мінімальні або в рядку, або в стовпчику), а вже потім — за методом мінімальної вартості.

Метод апроксимації Фогеля. За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Ці різниці записують у спеціально відведених місцях таблиці. Серед усіх різниць вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю. Якщо ж однакових найбільших різниць кілька, то вибирають будь-який відповідний рядок або стовпчик. Коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.

Після побудови першого опорного плану одним із розгляну тих методів у таблиці має бути заповнено $(m+n-1)$ клітинок, де m — кількість постачальників; n — кількість споживачів у задачі, у тому числі фіктивних. Такий план називають не виродженим. Якщо кількість заповнених клітинок перевищує $(m+n-1)$, то початковий план побудовано неправильно і він є не є опорним. Ознакою опорності плану транспортної задачі є його ациклічність, тобто неможливість побудови циклу. Циклом у транспортній задачі називають замкнену ламану лінію, вершини якої розміщуються в заповнених клітинках таблиці, а сторони проходять уздовж рядків і стовпчиків таблиці.

Якщо заповнених клітинок у таблиці менш як $(m+n-1)$, то опорний план називають виродженим. У такому разі необхідно заповнити відповідну кількість порожніх клітинок, записуючи в них «нульове перевезення», але так, щоб при цьому не порушилася ациклічність плану.

3. Опорний план перевіряють на оптимальність за допомогою потенціалів u_i та v_i відповідно постачальників та споживачів.

Теорема (умова оптимальності опорного плану транспортної задачі). Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ існують числа u_i та v_j, для яких виконується умова

$$\begin{cases} u_i + v_j = c_{ij}, & x_{ij} > 0, \\ u_i + v_j \le c_{ij}, & x_{ij} = 0 \end{cases}$$

для всіх $i = \overline{1...m}$, та $j = \overline{1...n}$, то він є оптимальним планом транспортної задачі.

Потенціали опорного плану визначаються із системи рівнянь $u_i + v_j = c_{ij}$, які записують для всіх заповнених клітинок транспортної таблиці.

4. За допомогою розрахованих потенціалів перевіряють умову оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ для порожніх клітинок таблиці. Якщо хоча б для однієї клітинки ця умова не

виконується, тобто $u_i + v_j > c_{ij}$, поточний план є неоптимальним і від нього необхідно перейти до нового опорного плану.

Перехід від одного опорного плану до іншого виконують заповненням клітинки, для якої порушено умову оптимальності. Якщо таких клітинок кілька, то для заповнення вибирають таку, що має найбільше порушення, тобто $\left\{\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - c_{ij}\right\}$. Для вибраної порожньої клітинки будують цикл перерахування та виконують перерозподіл продукції в межах цього циклу за такими правилами:

1) кожній вершині циклу приписують певний знак, причому вільній клітинці — знак «+», а всім іншим по черзі — знаки «–» та «+»;

2) у порожню клітинку переносять менше з чисел x_{ij}, що стоять у клітинках зі знаком «–». Одночасно це число додають до відповідних чисел, які розміщуються в клітинках зі знаком «+».

Отже, клітинка, що була вільною, стає заповненою, а відповідна клітинка з мінімальним числом x_{ij} вважається порожньою. У результаті такого перерозподілу продукції дістанемо новий опорний план транспортної задачі.

5. Новий опорний план перевіряють на оптимальність згідно з п. 3 розглянутого алгоритму.

Приклад 4.

Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3 здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відправляти відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Побудова математичної моделі. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з і–ї фабрики до j-го замовника $\left(i=\overline{1...3};\ j=\overline{1...4}\right)$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z=4\cdot x_{11}+4\cdot x_{12}+2\cdot x_{13}+5\cdot x_{14}+5\cdot x_{21}+3\cdot x_{22}+x_{23}+2\cdot x_{24}+2\cdot x_{31}+x_{32}+4\cdot x_{33}+2\cdot x_{34}\to \min$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z=4x_{11}+4x_{12}+2x_{13}+5x_{14}+5x_{21}+3x_{22}+x_{23}+2x_{24}+2x_{31}+x_{32}+4x_{33}+2x_{34}\to \min$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1...3};\quad j=\overline{1...4}.$$

Розв'язування. Розв'язування задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 **110**	4	2 +	5 **40** –	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 **60** -	2 **0** +	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 **40**	4	2 **40**	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z_1 = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку A_2B_4. Тепер перший план транспортної задачі є не виродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5,\ u_2 = 2,\ u_3 = 2,\ v_1 = -1,\ v_2 = -1,\ v_3 = -1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2: u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4;$
$A_1B_3: u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2;$
$A_2B_1: u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5;$
$A_2B_2: u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3;$
$A_3B_1: u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2;$
$A_3B_3: u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4.$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «-» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку A_1B_3 переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60; 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_3 — 40 од. продукції, $A_2B_3 = 60 - 40 = 20$ од., $A_2B_4 = 0 + 40 = 40$ од. Клітинка A_1B_4, звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 **110** -	4	2 **40** +	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 **20** -	2 **40** +	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 +	1 **40**	4	2 **40** -	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_3 = 2, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $u_1 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_2 = -1,\ u_3 = -1,\ v_1 = 4,\ v_2 = -2,\ v_3 = 2,\ v_4 = 3$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2 : u_1 + v_2 = 0 + 4 = 4 = 4;$
$A_1B_4 : u_1 + v_4 = 0 + 3 = 3 < 5;$
$A_2B_1 : u_2 + v_1 = -1 + 4 = 3 < 5;$
$A_2B_2 : u_2 + v_2 = -1 + (-2) = -3 < 3;$
$A_3B_1 : u_3 + v_1 = -1 + 4 = 3 > 2;$
$A_3B_3 : u_3 + v_3 = -1 + 2 = 1 < 4.$

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3.

Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки A_3B_1).

Потрібно заповнити клітинку A_1B_3, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки A_1B_3, та позначаємо вершини циклу почергово знаками «-» і «+». Визначаємо $\min\{110; 20; 40\} = 20$, тобто $\min x_{ij} = 20$. Виконавши перерозподіл продукції, дістанемо такі нові значення: клітинка A_1B_1 — 90 од. продукції, $A_1B_3 = 40 + 20 = 60$ од., $A_2B_4 = 40 + 20 = 60$ од., $A_3B_1 = 0 + 20 = 20$ од., $A_3B_4 = 40 - 20 = 20$ Клітинка A_2B_3, звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки другої таблиці, які не входили до циклу, переписують у третю таблицю без змін.

A_j	B_j				u_i
	$B_1=110$	$B_2=40$	$B_3=60$	$B_4=80$	
$A_1=150$	4 **90**	4	2 **60**	5	$u_1=0$
$A_2=60$	5	3	1	2 **60**	$u_2=-2$
$A_3=80$	2 **20**	1 **40**	4	2 **20**	$u_3=-2$
v_j	$v_1=4$	$v_2=3$	$v_3=2$	$v_4=4$	

Тому $Z_3 = 4\cdot 90 + 2\cdot 60 + 2\cdot 60 + 2\cdot 20 + 1\cdot 40 + 2\cdot 20 = 720$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4, \\ u_1+v_3=2, \\ u_2+v_4=2, \\ u_3+v_1=2, \\ u_3+v_2=1, \\ u_3+v_4=2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $u_1=0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_2=-2,\ u_3=-2,\ v_1=4,\ v_2=3,\ v_3=2,\ v_4=4$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

$A_1B_2: u_1+v_2=0+3=3<4;$
$A_1B_4: u_1+v_4=0+4=4<5;$
$A_2B_1: u_2+v_1=-2+4=2<5;$
$A_2B_2: u_2+v_2=-2+3=1<3;$
$A_2B_3: u_2+v_3=-2+2=0<2;$
$A_3B_3: u_3+v_3=-2+2=0<4.$

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики. Третій споживач отримує 60 тис. од. продукції з першої фабрики. Четвертий замовник отримує 60 тис. од.

продукції з другої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.