Методи знаходження початкового опорного плану перевезень

Для знаходження опорного плану необхідно спланувати перевезення так, щоб заповненими були рівно $(m+n-1)$ клітинок. Для цього реалізується наступний алгоритм, що складається із $(m+n-1)$ кроків.

На кожному кроці заповнюється вибрана за певним критерієм одна клітинка, причому так, щоб або повністю задовольняються потреби відповідного пункту споживання (той, в стовпчику якого знаходиться клітинка, що заповнюються) або повністю вивозиться вантаж з відповідної бази (тієї, в рядочку якої знаходиться клітинка, що заповнюється).

В першому випадку ми можемо виключити стовпчик, що містить клітинку, яка заповнюється на цьому кроці, і вважати, що задача звелася до заповнення таблиці з числом стовпчиків, на одиницю меншим, ніж було перед цим кроком, але з тією ж кількістю рядочків із відповідно зміненим запасом вантажу на одній із баз; в другому випадку виключається рядочок, що містить клітинку, яка заповнюється і вважається, що таблиця звузилась на один рядочок при незмінній кількості стовпчиків і при зміні потреб відповідного пункту споживання.

Очевидно, що повторивши описаний крок $m+n-2$ разів, прийдемо до таблиці, яка складається із одного рядочка і одного стовпчика, тобто з однієї клітинки. Інакше кажучи, прийдемо до задачі з однієї базою і одним споживачем, причому в силу закритості транспортної задачі запаси залишеної бази рівні потребам залишеного пункту. Заповнюючи останню клітинку ми одночасно вивозимо весь вантаж з останньої бази і задовольняємо останній пункт споживання. В результаті виконання описаних дій, заповнивши рівно $m+n-1$ клітинок, ми отримаємо шуканий початковий опорний план перевезень.

Зауваження. Можливі випадки, коли на деякому кроці (не враховуючи останнього, для якого ця умова виконується завжди) потреби чергового споживача дорівнюватимуть запасам вантажу на черговій базі. Тоді, після заповнення відповідної клітинки, ми одночасно зменшуємо таблицю на один рядочок і один стовпчик. Але, згідно з заданим алгоритмом, при заповненні однієї клітинки ми повинні виключати з таблиці або один рядочок або один стовпчик.

В таких випадках або вважають, що повністю задовольняється пункт споживання, а на відповідній базі залишається “залишок” вантажу, рівний нулю, або вважають, що повністю вивезений вантаж з бази, а на відповідний пункт необхідно “довезти” вантаж у кількості нуль одиниць. Цей нуль (“залишок” або “потреба”) необхідно вписати в одну із клітинок, що буде заповнюватись при одному з наступних кроків.

В залежності від того, за яким критерієм вибирається клітинка, яка буде заповнюватись розрізняють різні методи знаходження початкового опорного плану. Одні з методів дозволяють швидко знайти початковий базисний розв’язок, але велика ймовірність, що він буде суттєво відрізнятись від оптимального і для його знаходження доведеться робити багато перетворень. Є методи, якими довше знаходиться початковий опорний план перевезень, але він якщо не оптимальний, то близький до нього. Розглянемо основні три методи знаходження першого плану.

3.2 Метод північно-західного кута (діагональний метод).

При ньому на кожному кроці заповнюється по вказаним вище правилам клітинка, що знаходиться в лівому верхньому куті частини таблиці, що залишилась перед заповненням чергової клітинки.

Покажемо застосування цього методу на прикладі.

Задача 1. На трьох базах A_1, A_2, A_3 знаходиться однорідний вантаж у кількості 260 т, 170 т, 360 т відповідно. Цей вантаж необхідно перевезти до п’яти пунктів: 110 т до B_1, 110 т до B_2, 140 т до B_3, 140 т до B_4 і 290 до пункту B_5. Тарифи на перевезення, тобто вартості перевезення 1 т вантажу від баз до пунктів задачі подано у вигляді матриці $C=(C_{ij})$, де елемент C_{ij} - означає кількість грошових одиниць, які будуть витрачатись на перевезення кожної тонни вантажу від бази A_i до пункту B_j. Надалі умову транспортної задачі подаватимемо у вигляді

$a_1 = 260$, $a_2 = 170$, $a_3 = 360$;

$b_1 = 110$, $b_2 = 110$, $b_3 = 140$, $b_4 = 140$, $b_5 = 290$.

$$C = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 31 & 21 & 39 \\ 38 & 24 & 29 & 16 & 30 \\ 33 & 47 & 40 & 15 & 35 \end{pmatrix}.$$

Запишемо дані умови у наступну таблицю.

Таблиця 1.

Пункти відправлення	**Пункти призначення**					**Запаси**
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36	6	31	21	39	**260**
A_2	38	24	29	16	30	**170**
A_3	33	47	40	15	35	**360**
Потреби	**110**	**110**	**140**	**140**	**290**	

Починаємо заповнювати табличку з клітинки, що знаходиться в лівому верхньому куті – клітинка (A_1B_1). На базі A_1 є 260 т вантажу, пункт B_1 потребує 110 т. $\min\{260; 110\} = 110$, отже у клітинку (A_1B_1) ставимо 110, тобто надаємо значення змінній $x_{11} = 110$ і вводимо її в базис. Цим самим ми повністю задовольняємо потреби пункту B_1, з баз A_2 і A_3 до B_1 везти вантаж не потрібно, а отже в клітинках (A_2B_1) і (A_3B_1) ставимо прочерк. Ці клітинки при подальшому заповненні не враховуємо. Змінні x_{21} і x_{31} - вільні. На базі A_1 залишиться $260 - 110 = 150$ т вантажу.

Таблиця 2

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6	31	21	39	260 (150)
A_2	38 -	24	29	16	30	170
A_3	33 -	47	40	15	35	360
Потреби	110(-)	110	140	140	290	

В залишеній частині таблиці в лівому верхньому куті знаходиться клітинка (A_1B_2), тому її заповнення – наступний крок. Пункт B_2 потребує 110 т, на базі A_1 залишилось 150 т. Отже, ставимо в клітинку (A_1B_2) - 110, в клітинках (A_2B_2) і (A_2B_3) прочерк. Задовольняються потреби пункту B_2, на базі A_1 залишається $150 - 110 = 40$ т вантажу.

Таблиця 3

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31	21	39	260 (40)
A_2	38 -	24 -	29	16	30	170
A_3	33 -	47 -	40	15	35	360
Потреби	110(-)	110(-)	140	140	290	

На наступному кроці в верхньому лівому куті клітинка (A_1B_3). Пункт B_3 потребує 140 т вантажу на базі A_1 залишилось 40 т. Тому в клітинку A_1B_3 ставимо 40, запаси бази A_1 вичерпуються, в клітинки (A_1B_4) і (A_1B_5) ставимо прочерк. До пункту B_3 необхідно довезти $140 - 40 = 100$ т.

Таблиця 4

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260 (-)
A_2	38 -	24 -	29	16	30	170
A_3	33 -	47 -	40	15	35	360
Потреби	110(-)	110	140(100)	140	290	

В залишеній для заповнення частині таблиці із шести клітинок ліва верхня – клітинка (A_2B_3). На базі A_2 знаходиться 170 т вантажу, пункт B_3 потребує 100 т. $\min\{170;100\} = 100$. Отже, в клітинку A_2B_3 ставимо 100, потреби B_3 повністю задовольняються, в клітинку (A_3B_3) ставимо прочерк на базі A_2 залишається $170 - 100 = 70$ т вантажу.

Таблиця 5

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260 (-)
A_2	38 -	24 -	29 100	16	30	170 (70)
A_3	33 -	47 -	40 -	15	35	360
Потреби	110(-)	110(-)	140(-)	140	290	

Залишились незаповненими чотири клітинки. Ліва верхня - $\left(A_2B_4\right)$. $\min\{70;140\} = 70$. Отже, ставимо в клітинку $\left(A_2B_4\right) - 70$. Запаси A_2 на цьому вичерпуються, в клітинку $\left(A_2B_5\right)$ ставимо прочерк. Пункт B_4 потребує ще $140 - 70 = 70$ т вантажу.

Таблиця 6.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260 (-)
A_2	38 -	24 -	29 100	16 70	30 -	170 (-)
A_3	33 -	47 -	40 -	15	35	360
Потреби	110(-)	110(-)	140(-)	140(70)	290	

Наступними двома кроками заповнюємо послідовно клітинку $\left(A_3B_4\right) - 70$ і $\left(A_3B_5\right) - 290$ після чого отримуємо остаточно:

Таблиця 7

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	36 110	6 110	31 40	21 -	39 -	260
A_2	38 -	24 -	29 100	16 70	30 -	170
A_3	33 -	47 -	40 -	15 70	35 290	360
Потреби	100	100	140	140	290	

Знайдений опорний план перевезень (базисний розв'язок) $x_{11} = 110$, $x_{12} = 40$, $x_{23} = 100$, $x_{24} = 70$, $x_{34} = 70$, $x_{35} = 290$. Як5 бачимо кількість базисних змінних рівна $m+n-1=3+5-1=7$. Так як всі вони додатні, то знайдений план невироджений. Всі інші змінні - вільні і дорівнюють нулю.

Сумарні витирати для знайденого плану:
$S = 110\cdot 36 + 110\cdot 6 + 40\cdot 31 + 100\cdot 29 + 70\cdot 16 + 70\cdot 15 + 290\cdot 35 =$

3.3 Метод мінімальної вартості

Ідея методу полягає в тому, що на кожному кроці заповнюють клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці вантажу. Якщо таких клітинок декілька, вибирають будь-яку з них. Такі дії повторюють доти, доки не буде розподілено весь вантаж між базами та пунктами споживання.

Нехай маємо наступну транспортну задачу:

Табл. 1.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5	12	17	11	250
A_2	16	9	3	21	20	200
A_3	14	24	18	19	7	300
Потреби	80	170	30	170	300	

Найменша вартість перевезення – 3 для клітинки A_2B_3. Тому заповнення таблиці починаємо саме з неї, здійснюючи максимальне перевезення $\min\{200;\,30\} = 30$. Отже, в клітинку A_2B_3 ставимо 30 при цьому повністю задовольнивши потреби B_3. Тому в клітинках A_1B_3 і A_3B_3 ставимо прочерк, вони заповнюватись не будуть, на наступних кроках їх не розглядаємо. На базі A_2 залишається $200 - 30 = 170$ т вантажу.

Табл. 2.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5	12 -	17	11	250
A_2	16	9	3 30	21	20	200 (170)
A_3	14	24	18 -	19	7	300
Потреби	80	170	30(-)	170	300	

Серед клітинок, які залишились найменшу вартість перевезення – 5 має клітинка A_1B_2 $\min\{250;\,170\} = 170$.

Отже, цю клітинку заповнюємо значенням 170. Потреби B_2 при цьому задовольняються, тому в A_2B_2 і A_3B_2 ставимо прочерк, на базі A_1 залишається $250 - 170 = 80$ т вантажу.

Табл. 3.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5 170	12 -	17	11	250 (80)
A_2	16	9 -	3 30	21	20	200 (178)
A_3	14	24 -	18 -	19	7	300
Потреби	80	170(-)	30(-)	170	300	

Серед клітинок, що ще можуть бути заповнені найменшу вартість перевезення -7 має клітинка A_3B_5. На базі A_3 є в наявності 300 т вантажу, пункт B_5 потребує 300 т вантажу. Отже, заповнюючи клітинку A_3B_5 значенням 300 ми одночасно задовольняємо потреби пункту B_5 і вичерпуємо запаси бази A_3. В такому випадку відповідно до вказаних вище правил знаходження опорного розв'язку, в клітинку A_3B_5 ставимо значення 300 і або вважаємо, що повністю задовольнили потреби B_5, а на базі A_3 залишився вантаж у кількості "0", або, що повністю вичерпано ресурси бази A_3 на пункт B_5 необхідно довезти вантаж у кількості "0" одиниць.

Виберемо останнє.

Табл. 4.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	5 170	12 -	17	11	250 (80)
A_2	16	9 -	3 30	21	20	200 (170)
A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80	170(-)	30(-)	170	300(0)	

Так як уявний нуль пункту B_5 буде виставлено в одну із клітинок A_1B_5 чи A_2B_5, то наступним кроком, так як вартість перевезення для клітинки A_1B_5 менша ніж для A_2B_5 $(11 < 20)$, то заповнюємо клітинку A_1B_5 значенням 0. При цьому задовольняються потреби пункту B_5, в клітинку A_2B_5 ставимо прочерк, а на базі A_1 залишається $80 - 0 = 80$ одиниць вантажу.

Табл. 5.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$ 170	$\boxed{12}$ -	$\boxed{17}$	$\boxed{11}$ 0	250 (80)
A_2	$\boxed{16}$	$\boxed{9}$ -	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{21}$	$\boxed{20}$ -	200 (170)
A_3	$\boxed{14}$ -	$\boxed{24}$ -	$\boxed{18}$ -	$\boxed{19}$ -	$\boxed{7}$ 300	300 (-)
Потреби	80	170(-)	30(-)	170	300(-)	

Серед залишених чотирьох клітинок найменшу вартість перевезення – 10 має клітинка A_1B_1. Запаси на базі A_1 - 80, потреби B_1 - також 80. Отже, заповнюємо цю клітинку значенням 80, але знову вважаємо, що ресурси A_1 вичерпано, а пункт B_1 потребує ще 0 одиниць вантажу.

Табл. 6.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$\boxed{10}$ 80	$\boxed{5}$ 170	$\boxed{12}$ -	$\boxed{17}$ -	$\boxed{11}$ 0	250 (-)
A_2	$\boxed{16}$	$\boxed{9}$ -	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{21}$	$\boxed{20}$ -	200 (170)
A_3	$\boxed{14}$ -	$\boxed{24}$ -	$\boxed{18}$ -	$\boxed{19}$ -	$\boxed{7}$ 300	300 (-)
Потреби	80(0)	170(-)	30(-)	170	300(-)	

Наступним кроком заповнюємо уявним нулем клітинку A_2B_1.

Табл. 7.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	$\boxed{10}$ 80	$\boxed{5}$ 170	$\boxed{12}$ -	$\boxed{17}$ -	$\boxed{11}$ 0	250 (-)
A_2	$\boxed{16}$ 0	$\boxed{9}$ -	$\boxed{3}$ 30	$\boxed{21}$	$\boxed{20}$ -	200 (170)
A_3	$\boxed{14}$ -	$\boxed{24}$ -	$\boxed{18}$ -	$\boxed{19}$ -	$\boxed{7}$ 300	300 (-)
Потреби	80(-)	170(-)	30(-)	170	300(-)	

І завершує знаходження опорного плану перевезень заповнення клітинки A_2B_4 значенням 170, яким ми задовольняємо потреби останнього пункту B_4 і вичерпуємо ресурси останньої бази A_2.

Табл. 8.

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 80	5 170	12 -	17 -	11 0	250 (-)
A_2	16 0	9 -	3 30	21 170	20 -	200 (-)
A_3	14 -	24 -	18 -	19 -	7 300	300 (-)
Потреби	80(-)	170(-)	30(-)	170(-)	300(-)	

Отже, знайдений базисний розв'язок $x_{11} = 80$, $x_{12} = 170$, $x_{15} = 0$, $x_{21} = 0$, $x_{23} = 30$, $x_{24} = 170$, $x_{35} = 300$. З A_2 до B_1 і з A_1 до B_5 вантаж перевозитись не буде, але змінні x_{21} і x_{15} є базисним.

Кількість базисних змінних $m+n-1=7$. Так як серед них є такі, що рівні 0, то маємо вироджений випадок.

Затрати при знайденому опорному плані перевезень складуть:

$S = 80\cdot 10 + 170\cdot 3 + 30\cdot 3 + 170\cdot 21 + 300\cdot 7 = 7070$ (грошових одиниць)

3.5 Метод подвійної переваги

Перед початком заповнення таблиці позначають клітинки, які мають найменшу вартість у рядках і стовпчиках. Таблицю починають заповнювати з клітинок, позначених двічі (мінімальні і в рядку і стовпчику). Далі заповнюють клітинки, позначені один раз, а вже потім – за методом мінімальної вартості.

3.6 Метод апроксимації Фогеля.

За цим методом на кожному кроці визначають різницю між двома найменшими вартостями в кожному рядку і стовпчику транспортної таблиці. Серед усіх вибирають найбільшу і у відповідному рядку чи стовпчику заповнюють клітинку з найменшою вартістю, коли залишається незаповненим лише один рядок або стовпчик, то обчислення різниць припиняють, а таблицю продовжують заповнювати за методом мінімальної вартості.