Теорія двоїстості

Економічна інтерпретація прямої та двоїстої задач лінійного програмування

Кожна задача лінійного програмування пов'язана з іншою, так званою ***двоїстою*** задачею.

Економічну інтерпретацію кожної з пари таких задач розглянемо на прикладі виробничої задачі.

Пряма задача:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (1.1)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + ... + a_{3n}x_n \le b_3; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \quad (1.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \ . \quad (1.3)$$

Необхідно визначити, яку кількість продукції кожного *j*-го виду $x_j \ (j = \overline{1, n})$ необхідно виготовляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. Причому відомі: наявні обсяги ресурсів – $b_i \ (i = \overline{1, m})$; норми витрат *i*-го виду ресурсу на виробництво одиниці *j*-го виду продукції – $a_{ij} \ (i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n})$, а також $c_j \ (j = \overline{1, n})$ – ціни реалізації одиниці *j*-ої продукції.

Розглянемо тепер цю саму задачу з іншого погляду. Допустимо, що за певних умов доцільно продавати деяку частину чи всі наявні ресурси. Необхідно визначити ціни ресурсів. Кожному ресурсу $b_i \ (i = \overline{1, m})$ поставимо у відповідність його оцінку $y_i \ (i = \overline{1, m})$. Умовно вважатимемо, що y_i – ціна одиниці *i*-го ресурсу.

На виготовлення одиниці *j*-го виду продукції витрачається згідно з моделлю (1.1)—(1.3) *m* видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, ..., a_{mj}$. Оскільки ціна одиниці *i*-го виду ресурсу дорівнює $y_i \ (i = \overline{1, m})$, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці *j*-го виду продукції, обчислюється у такий спосіб:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + ... + a_{mj}y_m .$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від продажу ресурсів, перевищує суму, яку можна було б отримати від реалізації продукції, виготовленої з тих самих обсягів ресурсів, тобто:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + ... + a_{mj}y_m \ge c_j, \ j = 1,2,..., n .$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть здійснити операцію якнайдешевше, отже, необхідно визначити мінімальні ціни одиниць кожного виду ресурсів, за яких їх продаж є доцільнішим, ніж виготовлення продукції. Загальну вартість ресурсів можна виразити формулою:

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m .$$

Отже, в результаті маємо ***двоїсту задачу***:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \qquad (1.4)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + a_{31} y_3 + ... + a_{m1} y_m \ge c_1; \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + a_{32} y_3 + ... + a_{m2} y_m \ge c_2; \\ .... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + a_{3n} y_3 + ... + a_{mn} y_m \ge c_n; \end{cases} \qquad (1.5)$$

$$y_i \ge 0 \ (i = 1,2,...m). \qquad (1.6)$$

Тобто необхідно визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного *i*-го виду ресурсу y_i, $i = \overline{1,m}$, щоб продаж ресурсів був доцільнішим, ніж виробництво продукції.

Зауважимо, що справжній зміст величин y_i, $i = \overline{1,m}$ – умовні ціни, що виражають рівень «цінності» відповідного ресурсу для даного виробництва. Англійський термін «shadow prices» у літературі перекладають як «оцінка» або «тіньова, неявна ціна». Академік Л.В.Канторович назвав їх ***об'єктивно обумовленими оцінками*** відповідного ресурсу.

Задача (1.4)-(1.6) є двоїстою або спряженою до задачі (1.1)-(1.3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. По суті мова йде про одну і ту ж задачу, але з різних поглядів. Дійсно, не важко переконатися, що двоїста задача до (1.4)-(1.6) збігається з початковою. Тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу – двоїстою. *Симетричність* двох таких задач очевидна. Як у прямій, так і у двоїстій задачі використовують один набір початкових даних: $b_i, i = (\overline{1,m})$, $a_{ij}, (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$; $c_j, (j = \overline{1,n})$. Крім того, вектор обмежень початкової задачі стає вектором коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі і навпаки, а рядки матриці *A* (матриці коефіцієнтів при змінних з обмежень прямої задачі) стають стовпцями матриці коефіцієнтів при змінних в обмеженнях двоїстої задачі. Кожному обмеженню початкової задачі відповідає змінна двоїстої і навпаки.

Початкова постановка задачі та математична модель може мати вигляд як (1.1)-(1.3), так і (1.4)-(1.6). Отже, як правило, кажуть про пару ***спряжених*** задач лінійного програмування.

Правила побудови двоїстих задач

Для побудови двоїстої задачі необхідно звести пряму задачу до стандартного виду. Вважають, що задача лінійного програмування подана у стандартному вигляді, якщо для відшукання максимального значення цільової функції всі нерівності її системи обмежень приведені до виду «$\leq$», а для задачі на відшукання мінімального значення — до виду «$\geq$».

Якщо пряма задача лінійного програмування подана в стандартному вигляді, то двоїста задача ***утворюється за такими правилами***:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі – на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних у цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних у цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів у системі обмежень двоїстої задачі

$$\grave{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками.

Процес побудови двоїстої задачі зручно зобразити схематично:

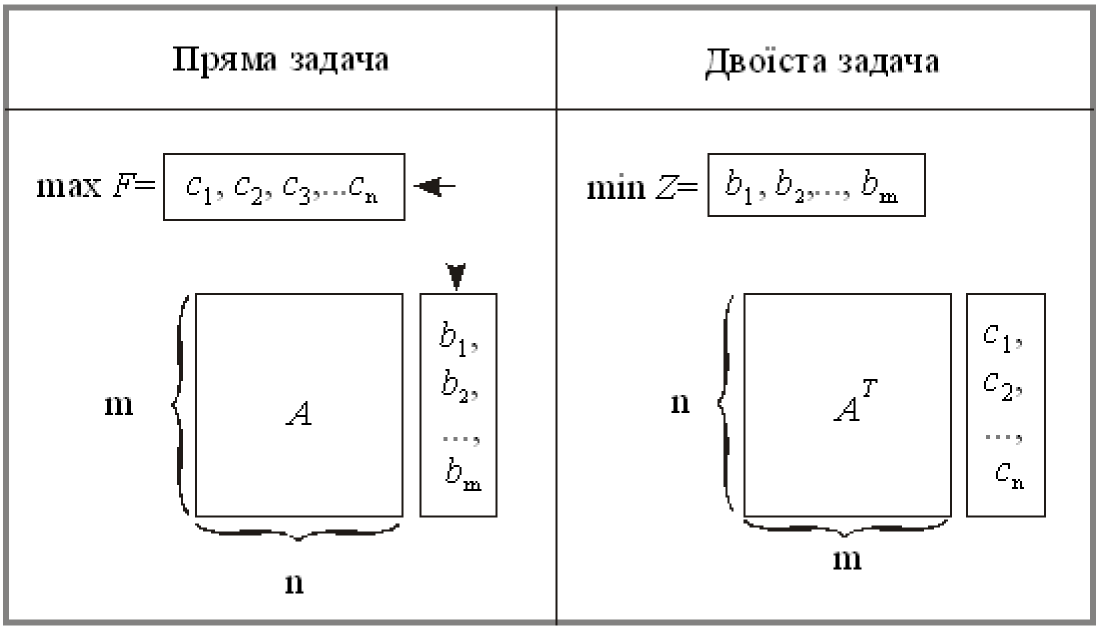

Рисунок 1.1 – Схема побудови двоїстої задачі до прямої

Пари задач лінійного програмування бувають симетричні та несиметричні.

У ***симетричних задачах*** обмеження прямої та двоїстої задач є лише нерівностями, а змінні обох задач можуть набувати лише невід'ємних значень.

У ***несиметричних задачах*** деякі обмеження прямої задачі можуть бути рівняннями, а двоїстої – лише нерівностями. У цьому разі відповідні рівнянням змінні двоїстої задачі можуть набувати будь-яких значень, не обмежених знаком.

Всі можливі форми прямих задач лінійного програмування та відповідні їм варіанти моделей двоїстих задач у матричній формі наведено нижче.

Пряма задача	**Двоїста задача**
Симетричні задачі	
$\max F = CX$ $AX \le B$ $X \ge 0$	$\min Z = BY$ $A^T Y \ge C$ $Y \ge 0$
$\min F = CX$ $AX \ge B$ $X \ge 0$	$\max Z = BY$ $A^T Y \le C$ $Y \ge 0$
Несиметричні задачі	
$\max F = CX$ $AX = B$ $X \ge 0$	$\min Z = BY$ $A^T Y \ge C$ $Y \in \left]-\infty; \infty\right[$
$\min F = CX$ $AX = B$ $X \ge 0$	$\max Z = BY$ $A^T Y \le C$ $Y \in \left]-\infty; \infty\right[$

Основні теореми двоїстості та їх економічний зміст

Зв'язок між оптимальними розв'язками прямої та двоїстої задач встановлюють леми та теореми двоїстості. Розглянемо задачі (1.1)-(1.3) та (1.4)-(1.6) з економічною інтерпретацією.

Лема 1.1 (основна нерівність теорії двоїстості). Якщо $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, то виконується нерівність

$$F(X) \le Z(Y) \text{ або } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \,. (1.7)$$

Лема 1.2 (достатня умова оптимальності). Якщо $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ та $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ – допустимі розв'язки відповідно прямої та двоїстої задач, для яких виконується рівність

$$F(X^*) = Z(Y^*), \quad (1.8)$$

то X^*, Y^* – оптимальні розв'язки відповідних задач.

Теорема (*перша теорема двоїстості*). Якщо одна з пари спряжених задач має оптимальний план, то й друга задача також має розв'язок, причому для оптимальних розв'язків значення цільових функцій обох задач збігаються, тобто

$\max F = \min Z$.

Якщо цільова функція однієї із задач необмежена, то спряжена задача також не має розв'язку.

Перша теорема двоїстості дає змогу в процесі розв'язування однієї задачі водночас знаходити план другої.

Економічний зміст першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток (F_{max}) підприємство отримує за умови виробництва продукції згідно з оптимальним планом $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, однак таку саму суму грошей ($Z_{\min} = F_{\max}$) воно може мати, реалізувавши ресурси за оптимальними цінами $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$. За умов використання інших планів $X \neq X_{opt}$, $Y \neq Y_{opt}$ на підставі основної нерівності теорії двоїстості можна стверджувати, що прибутки від реалізації продукції завжди менші, ніж витрати на її виробництво.

Між розв'язками спряжених задач крім рівності значень цільових функцій існує тісніший взаємозв'язок. Для його дослідження розглянемо дві симетричні задачі лінійного програмування.

Пряма задача:

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \qquad (1.9)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Двоїста задача:

$$\min Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{cases} \qquad (1.10)$$

$$y_i \geq 0, \; i = \overline{1,m}.$$

Для розв'язування задач симплексним методом необхідно звести їх до канонічної форми, для чого в системи обмежень задач (1.9) і (1.10) необхідно ввести відповідно m та n невід'ємних змінних. Поставимо обмеженням кожної задачі у відповідність змінні її двоїстої задачі.

$$\left\{ \begin{array}{l|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; & y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; & y_2 \\ .... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. & y_m \end{array} \right.$$

Аналогічно:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n. \end{cases} \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array} \right.$$

Отримали таку відповідність між змінними спряжених задач:

Основні змінні прямої задачі						Додаткові змінні прямої задачі					
x_1	x_2	…	x_k	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+l}	…	x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$	…	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}		y_{m+k}		y_{m+n}	y_1	y_2		y_l		y_m
Додаткові змінні двоїстої задачі						Основні змінні двоїстої задачі					

Наступна теорема в літературі, як правило, має назву теореми про доповнюючу нежорсткість.

Теорема *(друга теорема двоїстості для симетричних задач).* Для того, щоб плани X^* та Y^* відповідних спряжених задач були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб виконувалися умови доповнюючої нежорсткості:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n} \quad (1.11)$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \quad (1.12)$$

Очевидніший взаємозв’язок між оптимальними планами прямої та двоїстої задач встановлює наслідок другої теореми двоїстості.

***Наслідок*.** Якщо в результаті підстановки оптимального плану однієї із задач (прямої чи двоїстої) в систему обмежень цієї задачі i-те обмеження виконується як строга нерівність, то відповідна i-та компонента оптимального плану спряженої задачі дорівнює нулю.

Якщо i-та компонента оптимального плану однієї із задач додатна, то відповідне i-те обмеження спряженої задачі виконується для оптимального плану як рівняння.

Економічний зміст другої теореми двоїстості *стосовно оптимального плану X^* прямої задачі*. Якщо для виготовлення всієї продукції в обсязі, що визначається оптимальним планом X^*, витрати одного i-го ресурсу строго менші, ніж його загальний обсяг b_i, то відповідна оцінка такого ресурсу y_i^* (компонента оптимального плану двоїстої задачі) буде дорівнювати нулю, тобто такий ресурс за даних умов для виробництва не є «цінним».

Якщо ж витрати ресурсу дорівнюють його наявному обсягові b_i, тобто його використано повністю, то він є «цінним» для виробництва, і його оцінка y_i^* буде строго більшою від нуля.

Економічне тлумачення другої теореми двоїстості *щодо оптимального плану* Y^* *двоїстої задачі*: у разі, коли деяке *j*-те обмеження виконується як нерівність, тобто всі витрати на виробництво одиниці *j*-го виду продукції перевищують її ціну c_j, виробництво такого виду продукції є недоцільним, і в оптимальному плані прямої задачі обсяг такої продукції x_j^* дорівнює нулю.

Якщо витрати на виробництво *j*-го виду продукції дорівнюють ціні одиниці продукції c_j, то її необхідно виготовляти в обсязі, який визначає оптимальний план прямої задачі $x_j^* > 0$.

Як було з'ясовано в попередньому параграфі, існування двоїстих змінних уможливлює зіставлення витрат на виробництво і цін на продукцію, на підставі чого обґрунтовується висновок про доцільність чи недоцільність виробництва кожного виду продукції. Крім цього, значення двоїстої оцінки характеризує зміну значення цільової функції, що зумовлена малими змінами вільного члена відповідного обмеження. Дане твердження формулюється у вигляді такої теореми.

Теорема (*третя теорема двоїстості*). Компоненти оптимального плану двоїстої задачі y_i^* $(i=\overline{1,m})$ дорівнюють значенням частинних похідних від цільової функції $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ за відповідними аргументами $b_i, (i=\overline{1,m})$, або

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (1.13)$$

Економічний зміст третьої теореми двоїстості. Двоїсті оцінки є унікальним інструментом, який дає змогу зіставляти непорівнянні речі. Очевидно, що неможливим є просте зіставлення величин, які мають різні одиниці вимірювання. Якщо взяти як приклад виробничу задачу, то цікавим є питання: як змінюватиметься значення цільової функції (може вимірюватися в грошових одиницях) за зміни обсягів різних ресурсів (можуть вимірюватися в тоннах, м^2, люд./год, га тощо).

Використовуючи третю теорему двоїстості, можна легко визначити вплив на зміну значення цільової функції збільшення чи зменшення обсягів окремих ресурсів: числові значення двоїстих оцінок показують, на яку величину змінюється цільова функція за зміни обсягу відповідного даній оцінці ресурсу $y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Отже, за умови незначних змін b_i замість задачі лінійного програмування, поданій в канонічній формі

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \qquad (1.14)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1.15)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n}. \qquad (1.16)$$

маємо нову задачу, де b_i замінено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Позначимо через X' оптимальний план нової задачі. Для визначення $F(X')$ не потрібно розв'язувати нову задачу лінійного програмування, а достатньо скористатися формулою $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, де X^* – оптимальний план задачі (1.14-1.16).

Приклади застосування теорії двоїстості для знаходження оптимальних планів прямої та двоїстої задач

Кожну з двох спряжених задач можна розв'язати окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та двоїстої задач уможливлюють знаходження розв'язку двоїстої задачі за наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Приклад 1. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план другої задачі, використовуючи співвідношення першої теореми двоїстості.

max $Z = -5x_1 + 2x_2$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до стандартного вигляду. Оскільки цільова функція F максимізується і в системі обмежень є нерівності, то їх слід звести до виду «$\le$». Тому перше обмеження задачі помножимо на (–1). Після цього знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

max $Z = -5x_1 + 2x_2$;

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1; \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5; \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

min $F = -y_1 + 5y_2$;

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5; \\ -y_1 + 3x_2 \ge 2; \end{cases}$$

$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$

Оскільки записані задачі симетричні, то будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1. max $Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$

$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 4}.$

2. Векторна форма запису системи обмежень має вигляд:

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній один вектор. Тому введемо штучну змінну в перше обмеження.

3. Розширена задача лінійного програмування буде такою:

$\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 – базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 – вільні. Нехай $x_1=x_2=x_3=0$, тоді $x_4=5$; $x_5=1$.

Перший опорний план задачі:

$X_0=(0; 0; 0; 5; 1)$, $Z_0= -$ M.

4. Подальше розв’язування прямої задачі подано у вигляді симплексної таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	-5	2	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	-1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - c_j \geq 0$		0 $-M$	5 $-M$	-2 $-M$	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 -1	1 0	-1 3	0 1	1 -3	– 2/3
$Z_j - c_j \geq 0$		2	7	0	-2	0	2 M	
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 $-1/3$	1 0	0 1	1/3 1/3	0 -1	
$Z_j - c_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 M	

З останньої симплекс-таблиці запишемо оптимальний план прямої задачі:

$X^*=(0; 5/3; 2/3; 0)$, $Z_{\max}=10/3$.

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна зробити висновок, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$\min F = \max Z = 10/3$.

Компоненти вектора Y^* (оптимальний план двоїстої задачі) визначимо за формулою:

$$Y^* = \vec{C}_{\text{áàç}} D^{-1},$$

де $\vec{C}_{\text{áàç}} = (2;\ 0)$ та міститься в стовпчику «$C_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Матриця D^{-1} також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис.

Отже,

$$Y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$

Застосувавши для розв'язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв'язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Приклад 2. До заданої задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$\min Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Розв'язання. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$\max F = y_1 + 4y_2;$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1; \\ y_1 + 2y_2 \leq 2; \\ -y_1 + y_2 \leq 2. \end{cases}$$

$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, \ y_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає першому рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 – лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис.5.2).

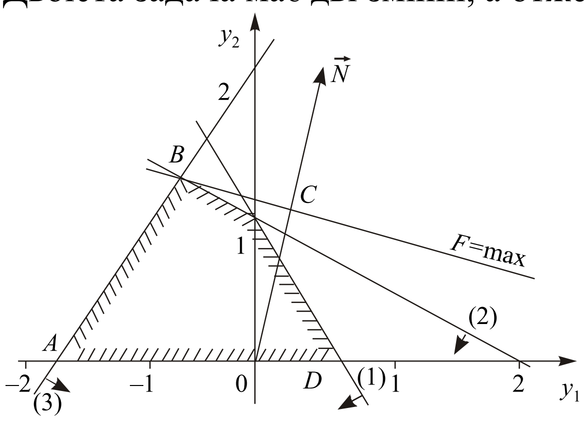

Рисунок 1.2

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає в точці B багатокутника $ABCD$. Її координати визначимо розв'язанням системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

Отже, $Y^* = (-2/3; 4/3)$; $\max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$.

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-2/3) + 4/3 = 0; \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2; \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1; \\ 2 = 2; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, то висновуємо, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1=0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2=4/3$ додатна, то друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1=0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто $X^* = (0; 5/3; 2/3)$, $\min Z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$.

Умова $\min Z = \max F = 14/3$ виконується, і тому $X^* = (0; 5/3; 2/3)$; $Y^* = (-2/3; 4/3)$ є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Приклад 3. Визначити, чи є оптимальними такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$\min Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3$;

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

а) $X = (8/7; 3/7; 0)$; б) $X = (0; 1/5; 8/5)$; в) $X = (1/3; 0; 1/3)$.

Розв'язання. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та, допускаючи, що відповідний план X є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій будуть однаковими за величиною, то припущення правильне. Протилежне можна висновувати в таких випадках:

1. Якщо запропонований план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2. Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3. Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції F не дорівнює значенню функції Z, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

max $F = y_1 + 2y_2$;

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12; \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4; \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in]-\infty; \infty[,\ y_2 \ge 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 8/7 - 3 \cdot 3/7 + 0 = 1; \\ 8/7 + 2 \cdot 3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються, і тому $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$ є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді розрахуємо для нього величину цільової функції:

$Z = 12 \cdot 8/7 - 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 та y_2:

$$\begin{cases} 2\acute{o}_1 + \acute{o}_2 = 12; \\ -3\acute{o}_1 + 2\acute{o}_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \acute{o}_1 = 4; \\ \acute{o}_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі:

$$y_1 + y_2 \le 2;$$

$$4 + 4 = 8 > 2.$$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $y = (4;\ 4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Внаслідок цього наше допущення, що $X = (8/7;\ 3/7;\ 0)$ є оптимальним планом прямої задачі, виявилося помилковим.

2. $X = (0;\ 1/5;\ 8/5)$. Підставимо цей план у систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий, і для нього $Z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_2 та x_3 додатні, то друге і третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3\acute{o}_1 + 2\acute{o}_2 = -4; \\ \acute{o}_1 + \acute{o}_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \acute{o}_1 = 8/5; \\ \acute{o}_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, чи виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$. Отже, перше обмеження виконується, і тому $y = (8/5; 2/5)$ є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього

$F = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = Z$.

З огляду на викладене можна зробити висновок, що $Y^* = (8/5; 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0; 1/5; 8/5)$ – оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. $X = (1/3; 0; 1/3)$. Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \neq 2. \end{cases}$$

Оскільки $X = (1/3; 0; 1/3)$ є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати:

а) ні;

б) так, $X^* = (0; 1/5; 8/5)$, $\min Z = 12/5$;

в) ні.