Симплексний метод

Нехай задано задачу ЛП в канонічній формі

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max \qquad (2.7.)$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases} \qquad (2.8.)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\ , \qquad (2.9.)$$

Нехай ранг матриці системи (2.8.) рівний m, тобто система складається з m лінійно незалежних рівнянь (ні одне з них не є лінійною комбінацією інших). Тоді методом Жордана-Гауса послідовного виключення змінних можна виразити m змінних через інші $n-m$ змінні, тобто знайти загальний розв'язок системи (2.8.). Розглянемо цей процес на прикладі.

Приклад(1). Методом Жордана-Гауса знайти загальний розв'язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22 \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38 \end{cases}$$

Виключимо x_1 з другого та третього рівняння. Для цього помножимо I рівняння на (-2) і додамо почленно до II-го, помножимо I рівняння на (-3) і додамо до III-го. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4 \\ \quad x_2 - 2x_3 + 15x_4 \qquad = 30 \\ \quad x_2 - \ x_3 + 11x_4 + 5x_5 = 50 \end{cases}$$

Тепер виключимо x_2 з I та III рівнянь. Для цього додамо почленно II-ге рівняння до I-го і віднімемо почленно від III-го II-ге рівняння. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 26 \\ \quad x_2 - 2x_3 + 15x_4 \qquad = 30 \\ \qquad\qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

Виключимо x_3 з I-го та II-го рівнянь. Для цього помножимо III-тє рівняння на 2 і додамо до II-го, і віднімемо почленно від I-го рівняння III-тє. Отримуємо:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad\quad x_4 - 3x_5 = 6 \\ \quad x_2 + \quad 7x_4 + 10x_5 = 70 \\ \qquad x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 6 - x_4 + 3x_5 \\ x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5 \\ x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Система (2.10) є одним із загальних розв'язків системи. Змінні x_1, x_2, x_3, відносно цього розв'язку є <u>базисними</u> і складають його базис, а x_4, x_5 - вільними або небазисними. Зробивши базисними іншу трійку змінних отримаємо інший загальний розв'язок. Кількість різних наборів базисних змінних або <u>базисів</u> обмежена, так як обмежена кількість змінних. Зокрема, для заданої системи кількість загальних розв'язків із різними базисами $C_5^3 = 10$.

Введемо поняття <u>**базисний розв'язок**</u>. Якщо всім вільним змінним надати значення нуль, а значення базисних змінних обчислити з отриманого загального розв'язку, то отриманий набір значень змінних називається базисним розв'язком системи для відповідного базису.

Наприклад для розв'язку (2.10) покладемо $x_4 = 0;\ x_5 = 0.$ тоді $x_1 = 6,\ x_2 = 70,\ x_3 = 20.$ Базисний розв'язок $X = \left(6;\ 70;\ 20;\ 0;\ 0\right)$.

Якщо до системи, що розглянули додати умову невід'ємності змінних: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, то виключивши змінні x_1, x_2, x_3 із (2.10) отримаємо еквівалентну систему

$$\begin{cases} 6 - \ x_4 \ + 3x_5 \geq 0 \\ 70 - 7x_4 - 10x_5 \geq 0 \\ 20 + 4x_4 - 5x_5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6 \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70 \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20 \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \qquad\qquad x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Розв'язок цієї системи – деякий многокутник на площині в системі координат X_4OX_5. Отже, якщо загальний розв'язок системи (2.8) містить дві вільні змінні, то задача (2.7) – (2.9) зводиться до задачі $ЛП$ із двома змінними, яку можна розв’язати графічним способом. Встановлено, що кожній вершині многокутника допустимих розв’язків відповідає один із базисних розв’язків системи обмежень, записаної в канонічному вигляді. Очевидно, що у випадку двох змінних, якщо лінійна функція має екстремальне значення, то воно досягається в одній з вершин області допустимих розв’язків.

Доведено в загальному випадку, що якщо функція (2.7) має екстремальне значення, то воно досягається при деякому базисному розв’язку системи (2.8). А так як кількість базисних розв’язків обмежена, то розв’язання задачі *ЛП* зводиться до обчислення лінійної функції $F(2.7)$ для всіх базисних розв’язків системи обмежень (2.8). Зрозуміло, що цей процес об’ємний і складний. Необхідно мати такий алгоритм переходу від одного базисного розв’язку до іншого, при кожному кроці якого б значення F максимально наближувалось до шуканого екстремального значення. Такий алгоритм закладений у симплекс-методі.

Розв’язання задачі (2.7) – (2.9) розпочинається із знаходження будь-якого базисного розв’язку системи (2.8). Це можна зробити способом, показаним у прикладі (1). Але може виявитись, що в отриманому базисному розв’язку деякі базисні змінні будуть від’ємними, що суперечить умові (2.9).

Будемо називати базисний розв’язок допустимим, якщо значення всіх змінних задовольняють умови невід’ємності. Перейти від не допустимого базисного розв’язку до допустимого (якщо такий існує) можна за допомогою методу штучного базису. Цей метод будується на основі симплекс-методу, який поки що не розглянутий, тому буде показаний пізніше.

Саму ідею симплекс методу найкраще розглянути на прикладі. Нехай вдалося отримати деякий допустимий базисний розв’язок системи обмежень. Тоді лінійну функцію F необхідно виразити тільки через вільні змінні. Нехай при цьому задача набула вигляду:

$$F = -x_4 + x_5 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{cases} \qquad (2.10)$$

$$x_i \ge 0 \;\; (i = 1 \div 5)$$

Для знайденого розв’язку системи змінні x_1, x_2, x_3 - базисні, x_4, x_5 - вільні. Базисний розв’язок $X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (1; 2; 3; 0; 0)$. Значення F для цього розв’язку $F = 0$. Розглянемо вираз $-x_4 + x_5$. Так як $x_4 \ge 0$ і перед x_4 стоїть знак „ - ’’, то із збільшенням значення цієї змінної значення F зменшується, тобто F буде найбільшим при $x_4 = 0$. Перед змінною x_5 стоїть знак “ + ”, тому із збільшенням x_5 значення F зростає. Встановимо до якого значення можна збільшити x_5, враховуючи систему обмежень. Перше рівняння: при $x_4 = 0$ збільшення x_5 залишає змінну x_1 додатною. Отже, це рівняння не обмежує x_5 зверху. Друге рівняння: при $x_4 = 0$ збільшення x_5 до 2 залишає x_2 додатною, при $x_5 = 2$ $\;x_2 = 0$, при $x_5 > 2$ $\;x_2 < 0$, що суперечить умові задачі. Отже, друге рівняння дозволяє збільшити x_5 лише до 2. Аналогічно третє рівняння дозволяє збільшити x_5 до 3. Остаточно встановлюємо, що x_5 можна збільшити до 2, зробивши її базисною, а x_2 вільною $(x_2 = 0)$. Для цього виразимо x_5 з другого рівняння і підставимо в F та в перше і третє рівняння:

$$F = -x_4 + 2 - x_2 + 2x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2(2 - x_2 + 2x_4) \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - (2 - x_2 + 2x_4) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_i \ge 0 \;\; (i = 1 \div 5)$$

$$F = 2 - x_2 + x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2x_2 + 3x_4 \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4 \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0 \;\; (i = 1 \div 5)$$

Тепер базисні змінні x_1, x_3, x_5, вільні - x_2 та x_4. Базисний розв’язок $X = (5; 0; 1; 0; 2)$, $F = 2 > 0$. Провівши аналогічні міркування встановлюємо, що F можна збільшити тільки за рахунок збільшення x_4. Перше та друге рівняння системи при $x_2 = 0$ не обмежує x_4 зверху, третє дозволяє збільшити лише до $\frac{1}{5}$. Введемо x_4 в базис замість x_3, виразивши x_4 з третього рівняння і підставивши в F та перше і друге рівняння. Отримаємо:

$$F=\frac{11}{5}-\frac{1}{5}x_3-\frac{4}{5}x_2\to\max$$

$$\begin{cases} x_1=\frac{28}{5}-\frac{3}{5}x_3-\frac{7}{5}x_2 \\ x_5=\frac{12}{5}-\frac{2}{5}x_3-\frac{3}{5}x_2 \\ x_4=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}x_3+\frac{1}{5}x_2 \end{cases}$$

$$x_i\ge 0\quad (i=1\div 5)$$

Тепер з виразу для F випливає, що із збільшенням x_3 та x_2 значення F зменшується. Тобто максимальне значення функції F рівне $\frac{11}{5}$ при $x_2=0$, $x_3=0$. Базисний розв'язок при якому функція цілі досягає екстремальне значення називається оптимальним. В даному випадку розв'язок $X=\left(\frac{28}{5};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$ є оптимальним.

Остаточна відповідь для задачі, що розглянули: $F_{\max}=\frac{11}{5}$ при $X=\left(\frac{28}{5};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$.

Приклад 2. Нехай система обмежень та лінійна форма F приведені до вигляду:

$$F=x_1+x_2\to\max$$

$$\begin{cases} x_3=1+x_1-x_2 \\ x_4=2-x_1+2x_2 \end{cases}$$

$$x_i\ge 0\quad (i=1\div 4)$$

Базисний розв'язок $X=(0;0;1;2)$, $F=0$. Збільшимо F за рахунок $x_1\,(x_2=0)$. З другого рівняння видно, що x_1 можна збільшити лише до 2, що дає $x_3=3$, $x_4=0$. Ввівши в базис x_1 замість x_4 отримаємо:

$$F=2-x_4+3x_2$$

$$\begin{cases} x_3=3-x_4+x_2 \\ x_1=2-x_4+2x_2 \end{cases}$$

$$x_i\ge 0\ \ (i=1\div 4)$$

Новий базисний розв'язок $X=(2;0;3;0)$, $F=2$. З виразу для F встановлюємо, що із збільшенням значення змінної x_2 значення F зростає. Але із рівнянь видно, що x_2 можна збільшувати необмежено, не порушуючи невід'ємності x_3 та x_1. Отже, F необмежена зверху, і оптимального розв'язку не існує.

Для виконання розглянутих перетворень використовують так звані симплекс-таблиці. Для цього, наприклад, задача (2.10) приводиться до вигляду:

$$\begin{cases} x_1+x_4-2x_5=1 \\ x_2-2x_4+x_5=2 \\ x_3+3x_4+x_5=3 \end{cases}$$

$$F+x_4-x_5=0$$

Відповідна симплекс-таблиця №1 матиме вигляд:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Вільні члени
x_1	1	0	0	1	-2	1
x_2	0	1	0	-2	1	2
x_3	0	0	1	3	1	3
F	0	0	0	1	-1	0

В стовпчиках x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 записуємо коефіцієнти при цих змінних в рівняннях обмежень та формі F. В стовпчику "базис" записуємо базисні змінні для відповідних рівнянь. В останньому стовпчику записуємо вільні члени рівнянь та форми F. Очевидно, що базисний розв'язок, що відповідає симплекс-таблиці отримується наступним чином: значення змінних, що не ввійшли до базису рівні 0, значення базисних змінних та F рівні значенням відповідних вільних членів. Для записаної таблиці базисний розв'язок $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=0$, $x_5=0$, $F=0$.

Із розглянутих двох прикладів можна зробити такі висновки:

Алгоритм застосування симплекс-методу наступний:

1. Знаходиться будь-який допустимий базисний розв’язок, F виражається через вільні (небазисні) змінні і записується 1-ша симплекс-таблиця. Назвемо елементи рядочка F крім останнього (тобто коефіцієнти при змінних для лінійної форми) оцінками.

2. Якщо всі оцінки невід’ємні, то знайдений розв’язок оптимальний.

3. Якщо є хоча б одна від’ємна оцінка – знайдений розв’язок не оптимальний. Нехай оцінка від’ємна в стовпчику x_j. Розглядаються інші елементи цього стовпчика. Якщо серед них немає додатних, то $F_{\max} = +\infty$, задача розв’язку немає.

4. Нехай в стовпчику, що розглядається є додатні елементи. Для кожного з них розглянемо відношення відповідних вільних членів до цих елементів і виберемо серед них найменше. Нехай мінімальне відношення буде для елемента із рядочка x_i.

5. Переходимо до нового базису, виключаючи із старого x_i введенням замість неї x_j. Для цього з рівняння, що містить x_i виражаємо x_j і отриманий вираз підставляємо в інші рівняння і F.

Далі повертаємося до пункту 2, але вже в новому базисі.

Встановимо правила переходу від однієї симплекс-таблиці до іншої, що відповідає переходу від одного базису до іншого. В записаному алгоритмі стовпчик x_j називають розв’язувальним стовпчиком, рядочок x_i - розв’язувальним рядочком. Елемент, що знаходиться на перетині розв’язувального рядочка і стовпчика називають розв’язувальним елементом. Неважко встановити, що відповідно до пункту 5 елементи нової таблиці отримуємо за такими правилами: (*)

1. елемент. Елементи розв’язувального рядочка ділимо на розв’язувальний
2. В розв’язувальному стовпчику крім отриманої одиниці ставимо нулі.
3. Всі інші елементи таблиці замінюємо по правилу прямокутника:

		$a_{rк}$		a_{rj}			$r-$ий рядочок
		$a_{iк}$		$\boxed{a_{ij}}$			$i-$ий рядочок
		$к-$ий стовпчик		$j-$ий стовпчик			

Замість елемента $a_{rк}$ ставимо $a'_{rк}$, де

$$a'_{rк} = a_{rк} - \frac{a_{iк} \cdot a_{rj}}{a_{ij}}. \qquad (2.11)$$

Тобто елемент, що замінюємо ($a_{rк}$) умовно з’єднуємо по прямій з розв’язувальним елементом (a_{ij}). Вважаючи отриманий відрізок діагоналлю прямокутника, встановлюємо його дві інші вершини (a_{rj}, $a_{iк}$). Добуток елементів, що стоять в цих вершинах ділимо на розв’язувальний елемент і результат віднімаємо від елемента, що замінюємо. Отримане значення ставимо в нову таблицю на місце елемента, що замінювали.

Розглянемо застосування симплекс-методу на прикладі наступної задачі економічного змісту.

На виготовлення двох видів продукції - Π_1 і Π_2 витрачається три види ресурсів - P_1, P_2, P_3. Виробництво забезпечене ресурсами P_1 в кількості 801 одиниця, ресурсами P_2 - 807 одиниць, P_3 - 768 одиниць. На виробництво однієї одиниці продукції Π_i витрачається 9 одиниць ресурсу P_1, 6 одиниць P_2 і 3 одиниці ресурсу P_3. На виробництво однієї одиниці продукції Π_2 витрачається 4 одиниці ресурсу P_1, 7 одиниць P_2 і 8 одиниць ресурсу P_3. Прибуток від реалізації однієї одиниці продукції Π_4 складає 3 грошові одиниці, від Π_2 - 2 грошові одиниці. За допомогою симплекс-методу (шляхом перетворення симплекс таблиць) знайти такий план виробництва, який би забезпечував найбільший прибуток.

<u>*Розв’язання*</u>. Складемо математичну модель задачі.

Нехай x_1 - кількість продукції Π_1, x_2 - кількість продукції Π_2, що буде вироблено. Тоді обмеження на ресурси трьох видів відповідно матимуть вигляд:

$9x_1 + 4x_2 \le 801$

$6x_1 + 7x_2 \le 807$

$3x_1 + 8x_2 \le 768$

Так як x_1, x_2 - кількість, то $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Нехай F - прибуток від реалізації продукції Π_1 та Π_2. Згідно з умовою:

$F = 3x_1 + 2x_2$.

Отже, отримали математичну модель задачі:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \le 801 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 807 \\ 3x_1 + 8x_2 \le 768 \\ x_1,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

Приведемо її до канонічного виду ввівши додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 + x_3 = 801 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_4 = 807 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_5 = 768 \\ x_i \ge 0,\ (i = 1 \div 5) \end{cases}$$

$F - 3x_1 - 2x_2 = 0 \to \max$

Очевидно, що значення x_3, x_4, x_5 є не що іншим, як залишками ресурсів P_1, P_2, P_3 відповідно після виробництва x_1 та x_2 одиниць продукцій $П_1$ та $П_2$. Базисний розв'язок системи обмежень з базисними змінними x_3, x_4, x_5 є допустимим. Складаємо першу симплекс-таблицю.

$\downarrow$

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$в_i$
x_3	$\boxed{9}$	4	1	0	0	801
x_4	6	7	0	1	0	807
x_5	3	8	0	0	1	768
F	-3	-2	0	0	0	0

Відповідний базисний розв'язок

$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 801,\ x_4 = 807,\ x_5 = 768,\ F = 0$.

В останньому рядочку є від'ємні елементи (оцінки). Отже, знайдений розв'язок не оптимальний. Економічний зміст розв'язку: жодні ресурси не використовуються, продукція не виробляється, прибуток відповідно нуль.

Виберемо стовпчик з більшою по модулю від'ємною оцінкою (-3) за розв'язувальний (стовпчик x_1). З економічної точки зору ми плануємо виробляти дорожчу продукцію $П_1$. Розглянемо відношення вільних членів до додатних елементів розв'язувального стовпчика і виберемо серед них мінімальне. Так як $\min\left\{\frac{801}{9}; \frac{807}{6}; \frac{768}{3}\right\} = \min\{89; 134,5; 256\} = 89$, то перший рядочок, якому відповідає мінімальне відношення вибираємо за розв'язувальний. Економічний підтекст цього вибору: так як на одну одиницю продукції $П_1$ витрачається 9 одиниць ресурсу P_1, якого в запасі маємо 801 одиниці, то ресурс P_1 дозволяє виготовити $\frac{801}{9} = 89$ одиниць продукції $П_1$. Аналогічно встановлюємо, що ресурси P_2 та P_3 дозволяють виготовити відповідно 134,5 та 256 одиниць цієї продукції. Очевидно, що враховуючи всі види ресурсів можна виготовити не більше, як 89 одиниць $П_1$. На перетині розв'язувальних рядочка та стовпчика знаходиться розв'язувальний елемент. Обведемо його прямокутною рамкою, а розв'язувальні рядочок та стовпчик вкажемо стрілочками. Перейдемо до нової симплекс-таблиці за встановленими вище правилами (*).

Отже, всі елементи рядочка x_3 ділимо на 9. В стовпчику x_1 крім отриманої 1 ставимо всі нулі. Записуємо в базис замість змінної x_3 змінну x_1. Всі інші елементи замінюємо по правилу прямокутника. Наприклад: елемент 7 замінюємо на $7 - \frac{4 \cdot 6}{9} = \frac{39}{9} = \frac{13}{3}$, так як відповідний прямокутник має вигляд:

$$\begin{matrix} \boxed{9} & \cdots & 4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 6 & \cdots & 7 \end{matrix}$$

Варто зазначити, що якщо елемент в розв'язувальному рядочку рівний нулю, то відповідний стовпчик залишається без змін. Після перерахунків отримуємо:

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$в_i$
x_1	1	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	0	89

x_4	0	$\frac{13}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	273
x_5	0	$\frac{20}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	501
F	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	267

Отриманій таблиці відповідає розв'язок:

$x_1 = 89$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 273$, $x_5 = 501$. Тобто виробляється 89 одиниць продукції $П_1$, продукція $П_2$ не виробляється, ресурс P_1 вичерпується повністю залишок ресурсів P_2 та P_3 – 273 та 501 одиниця відповідно. Так як знову є від'ємна оцінка розв'язок (план виробництва) не оптимальний.

Аналогічно, як і для I–ої таблиці визначимо розв'язувальний елемент і перейдемо до нової таблиці за вказаними вище правилами. Стовпчик (x_2) з від'ємною оцінкою $\left(-\frac{2}{3}\right)$ буде розв'язувальним. Так як min

$$\left\{\frac{89}{\frac{4}{9}};\frac{273}{\frac{13}{3}};\frac{501}{\frac{20}{3}}\right\}=\frac{273}{\frac{13}{3}}=63$$ для II- го рядочка, то саме він буде

розв'язувальним. Отже, розв'язувальний

елемент $-\frac{13}{3}$. Після відповідних розрахунків отримуємо:

Таблиця 3.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$в_i$
x_1	1	0	$\frac{7}{39}$	$-\frac{4}{39}$	0	61
x_2	0	1	$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	63
x_5	0	0	$-\frac{9}{13}$	$-\frac{20}{13}$	1	81
F	0	0	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	309

Отриманій таблиці відповідає розв'язок: $x_1 = 61,\ x_2 = 63,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 81$. Так як в останньому рядочку немає від'ємних оцінок, то знайдений розв'язок є оптимальним. Тобто можна стверджувати наступне: максимально можливий прибуток складає 309 грошових одиниць $(F_{\max} = 309)$. Досягається він при такому плані виробництва: виготовляється 61 одиниця продукції $П_1(x_1 = 61)$ і 63 одиниці продукції $П_2(x_2 = 63)$. При цьому ресурси P_1 і P_2 вичерпаються $(x_3 = x_4 = 0)$, а ресурс P_3 залишиться у кількості 81 одиниця $(x_5 = 81)$. Поставлену задачу розв'язано.