Лінійне програмування

Найбільше вивченими та дослідженими є задачі лінійного програмування. Тому найдетальніше розглянемо саме цей вид задач. Загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \qquad (2.1)$$

або

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ \{\le, \ge, =\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ \{\le, \ge, =\} b_k \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$\text{і } x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 . \qquad (2.3)$$

Тобто, необхідно серед усіх наборів значень змінних $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, що задовольняють умови (2.2) і (2.3) знайти такий, при якому цільова функція F прийме своє максимальне (мінімальне) значення.

На місці виразу $\{\le, \ge, =\}$ може стояти один із трьох записаних в дужках знаків.

Значення змінних $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ можна розглядати як координати точки в просторі R^n. Точка $X\left(x_1,\ x_2, \ldots, x_n\right)$ простору R^n, координати якої задовольняють умови (2.2) та (2.3) називають допустимим розв’язком задачі. Сукупність усіх допустимих розв’язків утворює область (множину) допустимих розв’язків задачі.

Розглянемо ряд властивостей задачі лінійного програмування.

1. Задача знаходження максимуму цільової функції F (2.1) еквівалентна задачі знаходження мінімуму функції $\left(-F\right)$, причому

$$\max F = -\min\left(-F\right).$$

Наприклад:

$$F = 3x_1 - 2x_2 \to \max \Leftrightarrow F^* = -F = -3x_1 + 2x_2 \to \min .$$

2. Обмеження у вигляді нерівності із знаком “$\ge$” можна подати у вигляді нерівності із знаком “$\le$”, помноживши обидві частини нерівності на –1.

Наприклад:

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 6 \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le -6 .$$

3. Обмеження у вигляді нерівності можна подати у вигляді рівності, ввівши додаткову невід’ємну змінну

Наприклад:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}.$$

4. Обмеження у вигляді рівності можна замінити системою двох відповідних нерівностей із знаком “$\le$” та “$\ge$”.

Наприклад:

$$4x_1 + 2x_2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 3 \end{cases}..$$

5. Якщо на якусь змінну x_i не накладаємо умову невід’ємності вона подається у вигляді різниці двох додаткових невід’ємних змінних $x_i = x_i'' - x_i'$, $x_i'' \ge 0$, $x_i' \ge 0$.

Наприклад:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3'' - x_3' = 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3'' \ge 0,\ x_3' \ge 0. \end{cases}.$$

Отже одну й ту ж задачу лінійного програмування можна записати у різних формах.

Вважатимемо, що задача записана в канонічній формі, якщо вона формулюється так:

знайти максимум функції:

$$F = C_0 + C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n \to \max$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0\ ,$$

де a_{ij}, b_i, c_j - задані постійні величини, причому $b_i \ge 0$.

Використовуючи перелічені властивості, будь-яку задачу ЛП можна записати в канонічному вигляд.

Наприклад. Записати в канонічній формі задану задачу ЛП:

$$F = 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 110 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 90 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0\ .$$

Нехай $F^* = -F$.

Помножимо перше рівняння на (–1) і введемо відповідно допоміжні невід'ємні змінні x_4 та x_5 для другого та третього обмеження. Отримали задану задачу в канонічній формі:

$$F^* = -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 110 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 90 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0\ .$$

2.1. Графічний метод розв'язування задач ЛП.

Найпростішим методом розв'язування задач ЛП є графічний, але його можна застосовувати лише у випадку, коли в математичну модель входять тільки дві змінні. І хоча такі задачі на практиці зустрічаються рідко (типова задача ЛП, як правило містить тисячі змінних), ідеї графічного методу розв'язування покладені в основу побудови загального методу розв'язування задачі ЛП.

Нехай необхідно знайти мінімум та максимум функції

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 \to \max(\min) \qquad (2.4)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \le b_k \end{cases} \qquad (2.5)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0\ . \qquad (2.6)$$

Нагадаємо, що знак "$\ge$" можна замінити на "$\le$" шляхом домноження нерівності на "-1".

Ототожнимо кожну пару значень змінних x_1 і x_2 з точкою прямокутної декартової системи координат X_1OX_2 на площині з відповідними координатами.

Перший етап знаходження розв'язку – побудова множини допустимих розв'язків задачі, тобто області в системі координат X_1OX_2 , координати всіх точок якої (і тільки їх) задовольняють обмеження (2.5) та (2.6).

Геометричним місцем точок, координати яких задовольняють умову $ax_1 + bx_2 = c$ є пряма. Для побудови цієї прямої досить знайти дві точки, що їй належать. Для цього надають два рази довільне значення одній із змінних і визначають з рівняння прямої значення другої змінної. Пряма розбиває всю координатну площину на дві півплощини, причому для координат точок однієї з них виконується умова $ax_1 + bx_2 < C$, а для другої $ax_1 + bx_2 > C$. Отже множиною розв'язків обмеження $ax_1 + bx_2 \le C$ будуть точки прямої $ax_1 + bx_2 = C$ і точки тієї (однієї з двох півплощин відносно прямої $ax_1 + bx_2 = C$, координати якої задовольняють умову $ax_1 + bx_2 < C$. Для її визначення досить підставити координати однієї будь-якої точки, що не належить прямій в задану нерівність. Якщо нерівність виконується, то півплощина, що містить цю точку є розв'язком, якщо ні - то інша. На рисунку будемо позначати вибрану півплощину частковою штриховою.

Отже, розв'язком системи обмежень (2.5), (2.6) буде перетин (спільна частина) півплощин, що відповідають відповідними нерівностями. Це може бути опуклий обмежений чи необмежений многокутник, вироджений многокутник – точка, відрізок, промінь, або взагалі порожня множина.

Після знаходження множини допустимих розв'язків переходять до наступного етапу розв'язання задачі – знаходження екстремального значення F.

Геометричне місце точок в яких лінійна функція (2.4) набуває фіксованого значення α є прямою лінією, що визначається рівнянням $c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$, яку ще називають лінією рівня. Надаючи параметру α всіх можливих значень від $-\infty$ до $+\infty$, отримуємо сімейство паралельних прямих, які займуть всю площину. Всі ці прямі перпендикулярні до нормального вектора, який співпадає із градієнтом функції F, що визначає напрям її найшвидшого зростання, $\vec{N} = \overline{\text{grad}}\, F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2}\right) = \left(\overrightarrow{c_1; c_2}\right)$. Тому перехід від однієї прямої сімейства до іншої у напрямку вектора $\vec{N}$ веде до збільшення значення лінійної функції, у протилежному (у напрямку антиградієнта $-\vec{N} = \left(-c_1; -c_2\right)$) – до його зменшення.

Для знаходження екстремального значення функції (2.4) будують одну з ліній рівня, як правило поклавши $\alpha = 0$, тобто пряму $c_1x_2 + c_2x_2 = 0$. Далі, переміщуючи її паралельно вздовж вектора $\vec{N}\left(c_1; c_2\right)$ чи, при потребі в напрямку $-\vec{N}\left(-c_1; -c_2\right)$ визначаємо положення коли лінія рівня буде опорною до області допустимих значень (пряма називається опорною до опуклої області, якщо область лежить по один бік прямої і пряма має з нею хоча б одну спільну точку). Очевидно, що якщо лінія рівня є опорною до області допустимих значень і ця область лежить в одній півплощині з вектором $\vec{N}$, то спільна точка прямої і області є точкою мінімуму, якщо в іншій, то максимуму. Щоб обчислити екстремальне значення функції F необхідно підставити координати точки екстремуму в (2.4).

Розглянемо застосування графічного методу для розв'язування деяких економічних задач.

Приклад 1.

Розв'язати графічно задачу лінійного програмування

$$f = 3x_1 + 2x_2 \to extr$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 6x_1 - x_2 \ge 22 \\ 5x_1 - 9x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 20 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Зобразимо на площині $\left(x_1,\ x_2\right)$ множину допустимих розв'язків U даної задачі - опуклий многокутник. Для цього побудуємо графіки, які відповідають рівнянням прямих ліній $x_1 + x_2 = 4$, $6x_1 - x_2 = 22$, $5x_1 - 9x_2 = 2$, $x_1 + x_2 = 20$, здобутих з нерівностей, що задають обмеження, заміною знаків нерівностей на знаки рівностей. Далі визначимо для кожної такої прямої напрямок розміщення прилеглої до неї півплощини, яка збігається з нею вздовж своєї межі і задається відповідною нерівністю. Для цього підставимо у відповідні нерівності значення $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ і оцінимо їх виконання. Якщо нерівність задовольняється, беремо півплощину, яка проходить через початок координат, якщо це не так, беремо іншу півплощину. яка не проходить через початок координат.

Таким чином, маємо

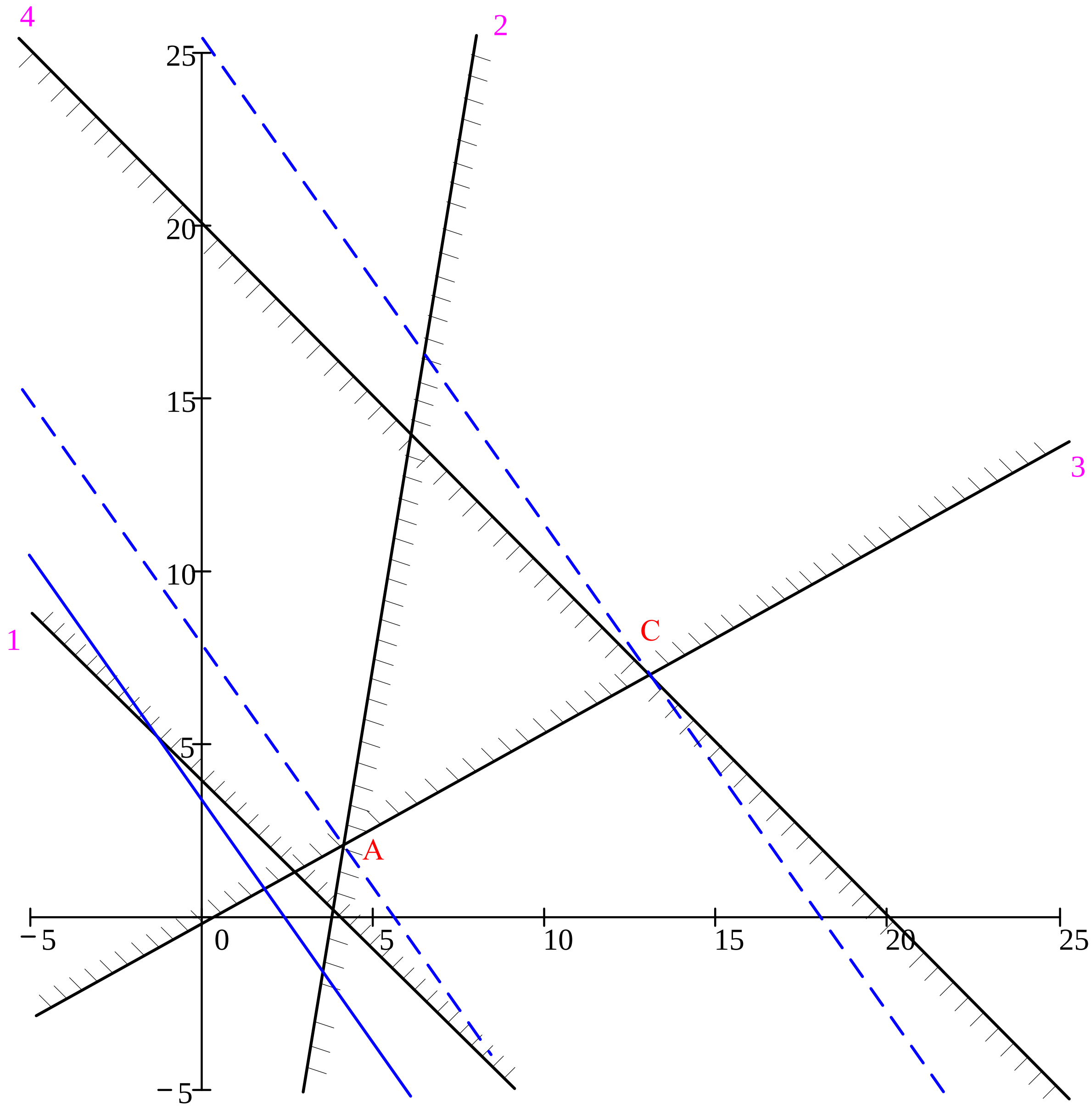
$\left\{x_1\ +\ x_2\ \ge\ 4\right\} \cap \left\{0\ \ge\ 4\right\}$ => нерівність не задовольняється,

$\left\{6x_1\ -\ x2\ \ge\ 22\right\} \cap \left\{0\ \ge\ 22\right\}$ => нерівність не задовольняється,

$\left\{5x_1\ -\ 9x_2\ \le\ 2\right\} \cap \left\{0\ \le\ 2\right\}$ => нерівність задовольняється,

$\{ x_1 + x_2 \le 20\} \cap \{0 \le 20\}$ => нерівність задовольняється,

На рисунку зобразимо частковою штриховкою відповідні півплощини, їх переріз визначає множину U допустимих розв'язків нашої задачі – трикутник ABC. Побудуємо також одну з ліній рівня $3x_1 + 2x_2 = C$ цільової функції $f = 3x_1 + 2x_2$, наприклад лінію, яка задана рівнянням $3x_1 + 2x_2 = 6$.



Далі визначимо напрямок зростання цільової функції $f(x)$. Його вказує вектор градієнту $N = f'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = (3\,;\,2)$. Здійснюючи паралельне перенесення лінії рівня вздовж напрямку $N = (3\,;\,2)$, знаходимо її крайнє положення, коли ця пряма ще має хоч би одну спільну точку з множиною допустимих розв'язків U. В цьому положенні пряма

$3x_1 + 2x_2 = C$ проходить через вершину С трикутника АВС. Тому цільова функція $f\left(x\right)$ набуває максимального значення в точці С.

Координати точки С є розв'язком системи рівнянь, яку отримуємо як перетин третьої і четвертої прямих

$$\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 20 \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 13$; $x_2 = 7$.

$$f^*_{max} = f(\mathrm{C}) = f\left(13\ ;\ 7\right) = 43$$

Аналогічно, здійснюючи паралельне перенесення лінії рівня вздовж напрямку спадання $-N = \left(-3\ ;\ -2\right)$ знаходимо іншу крайню точку — вершину А.

Координати точки А є розв'язком системи рівнянь, яку отримуємо як перетин другої та третьої прямих

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 = 22 \\ 5x_1 - 9x_2 = 2 \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$.

В ній цільова функція $f\left(x\right)$ набуває мінімального значення

$$f^*_{\min} = f(A) = f\left(4\ ;\ 2\right) = 16$$

Відповідь: $F_{\min} = 16$ (при $x_1 = 4$; $x_2 = 2$);

$F_{\max} = 43$ (при $x_1 = 13$; $x_2 = 7$).

Можливий випадок, коли лінія рівня є опорною до області допустимих розв’язків, а їх спільна частина не точка, а відрізок або навіть промінь. В таких випадках F приймає своє екстремальне значення в усіх точках цього відрізка чи променя.