Приклад 4. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,99$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності *X*, якщо $\sigma = 2$, $\bar{x} = 15,35$ і $n = 16$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд

$$\bar{x} - \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (2)$$

де t_γ – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, при якому $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$.

Знаходимо t_γ зі співвідношення $\Phi\left(t_\gamma\right) = \frac{0,99}{2} = 0,495$: за таблицею значень функції Лапласа (додаток 2) маємо $t_\gamma = 2,58$.

Підставляючи $\sigma = 2$, $\bar{x} = 15,35$, $n = 16$, $t_\gamma = 2,58$ в (2), отримаємо надійний інтервал: 14,06 < a < 16,64.

Приклад 5. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,95$ невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності *X*, якщо $s=0,7$ і $n=20$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд:

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q)\text{, якщо } q<1;$$
$$0<\sigma<s(1+q)\text{, якщо } q\geq 1; \qquad (3)$$

де $q=q(\gamma,n)$ знаходиться за таблицею додатку 3 за заданими γ і n.

При $\gamma=0,95$ і $n=20$ за таблицею знаходимо $q=0,37$.

Підставляючи $q=0,37$, $s=0,7$, $n=20$ в (3), отримаємо надійний інтервал: $0,441<\sigma<0,959$.

Приклад 6. Знайти вибіркове рівняння прямої регресії $y=ax+b$ за даними шести спостережень $x_i; y_i$: (1,5;1,3), (2;2), (3;2,1), (3,5;2,7), (4,5;2,6), (5;3,3). Зробити рисунок, на якому вказати експериментальні дані та побудувати пряму регресії.

Розв'язання. Невідомі параметри регресії a і b знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \qquad (4)$$

З умови задачі знаходимо: $n=6$,

$\sum_{i=1}^{6} x_i = 1,5+2+3+3,5+4,5+5 = 19,5$,

$\sum_{i=1}^{6} y_i = 1,3+2+2,1+2,7+2,6+3,3 = 14$,

$\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 1,5^2+2^2+3^2+3,5^2+4,5^2+5^2 = 74,75$,

$\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 1,5\cdot 1,3+2\cdot 2+3\cdot 2,1+3,5\cdot 2,7+4,5\cdot 2,6+5\cdot 3,3 = 49,9$.

Підставляючи в (4), одержимо систему рівнянь

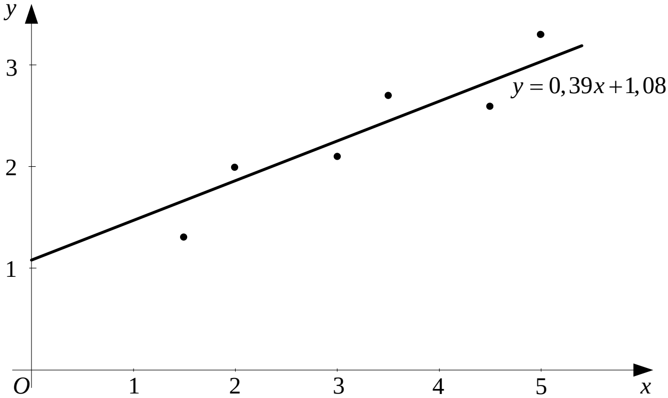
$$\begin{cases} 74,75a+19,5b = 49,9; \\ 19,5a+6b = 14. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, отримуємо $a \approx 0,39$ і $b \approx 1,08$.

Запишемо шукане рівняння прямої лінії регресії:

$$y = 0,39x+1,08.$$

Зробимо рисунок, на якому вкажемо експериментальні дані та побудуємо пряму регресії.


y
3
2
1
O
1
2
3
4
5
x
y = 0,39x + 1,08

ДОДАТКИ

Додаток 1. Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0045
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034

Додаток 2. Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,52	0,1985	1,04	0,3508	1,56	0,4406	2,16	0,4846
0,01	0,0040	0,53	0,2019	1,05	0,3531	1,57	0,4418	2,18	0,4854
0,02	0,0080	0,54	0,2054	1,06	0,3554	1,58	0,4429	2,20	0,4861
0,03	0,0120	0,55	0,2088	1,07	0,3577	1,59	0,4441	2,22	0,4868
0,04	0,0160	0,56	0,2123	1,08	0,3599	1,60	0,4452	2,24	0,4875
0,05	0,0199	0,57	0,2157	1,09	0,3621	1,61	0,4463	2,26	0,4881
0,06	0,0239	0,58	0,2190	1,10	0,3643	1,62	0,4474	2,28	0,4887
0,07	0,0279	0,59	0,2224	1,11	0,3665	1,63	0,4484	2,30	0,4893
0,08	0,0319	0,60	0,2257	1,12	0,3686	1,64	0,4495	2,32	0,4898
0,09	0,0359	0,61	0,2291	1,13	0,3708	1,65	0,4505	2,34	0,4904
0,10	0,0398	0,62	0,2324	1,14	0,3729	1,66	0,4515	2,36	0,4909
0,11	0,0438	0,63	0,2357	1,15	0,3749	1,67	0,4525	2,38	0,4913
0,12	0,0478	0,64	0,2389	1,16	0,3770	1,68	0,4535	2,40	0,4918
0,13	0,0517	0,65	0,2422	1,17	0,3790	1,69	0,4545	2,42	0,4922
0,14	0,0557	0,66	0,2454	1,18	0,3810	1,70	0,4554	2,44	0,4927
0,15	0,0596	0,67	0,2486	1,19	0,3830	1,71	0,4564	2,46	0,4931
0,16	0,0636	0,68	0,2517	1,20	0,3849	1,72	0,4573	2,48	0,4934
0,17	0,0675	0,69	0,2549	1,21	0,3869	1,73	0,4582	2,50	0,4938
0,18	0,0714	0,70	0,2580	1,22	0,3888	1,74	0,4591	2,52	0,4941
0,19	0,0753	0,71	0,2611	1,23	0,3907	1,75	0,4599	2,54	0,4945
0,20	0,0793	0,72	0,2642	1,24	0,3925	1,76	0,4608	2,56	0,4948
0,21	0,0832	0,73	0,2673	1,25	0,3944	1,77	0,4616	2,58	0,4951
0,22	0,0871	0,74	0,2704	1,26	0,3962	1,78	0,4625	2,60	0,4953
0,23	0,0910	0,75	0,2734	1,27	0,3980	1,79	0,4633	2,62	0,4956
0,24	0,0948	0,76	0,2764	1,28	0,3997	1,80	0,4641	2,64	0,4959
0,25	0,0987	0,77	0,2794	1,29	0,4015	1,81	0,4649	2,66	0,4961
0,26	0,1026	0,78	0,2823	1,30	0,4032	1,82	0,4656	2,68	0,4963
0,27	0,1064	0,79	0,2852	1,31	0,4049	1,83	0,4664	2,70	0,4965
0,28	0,1103	0,80	0,2881	1,32	0,4066	1,84	0,4671	2,72	0,4967
0,29	0,1141	0,81	0,2910	1,33	0,4082	1,85	0,4678	2,74	0,4969
0,30	0,1179	0,82	0,2939	1,34	0,4099	1,86	0,4686	2,76	0,4971
0,31	0,1217	0,83	0,2967	1,35	0,4115	1,87	0,4693	2,78	0,4973
0,32	0,1255	0,84	0,2995	1,36	0,4131	1,88	0,4699	2,80	0,4974
0,33	0,1293	0,85	0,3023	1,37	0,4147	1,89	0,4706	2,82	0,4976
0,34	0,1331	0,86	0,3051	1,38	0,4162	1,90	0,4713	2,84	0,4977
0,35	0,1368	0,87	0,3078	1,39	0,4177	1,91	0,4719	2,86	0,4979
0,36	0,1406	0,88	0,3106	1,40	0,4192	1,92	0,4726	2,88	0,4980
0,37	0,1443	0,89	0,3133	1,41	0,4207	1,93	0,4732	2,90	0,4981
0,38	0,1480	0,90	0,3159	1,42	0,4222	1,94	0,4738	2,92	0,4982
0,39	0,1517	0,91	0,3186	1,43	0,4236	1,95	0,4744	2,94	0,4984
0,40	0,1554	0,92	0,3212	1,44	0,4251	1,96	0,4750	2,96	0,4985
0,41	0,1591	0,93	0,3238	1,45	0,4265	1,97	0,4756	2,98	0,4986
0,42	0,1628	0,94	0,3264	1,46	0,4279	1,98	0,4761	3,00	0,49865
0,43	0,1664	0,95	0,3289	1,47	0,4292	1,99	0,4767	3,20	0,49931
0,44	0,1700	0,96	0,3315	1,48	0,4306	2,00	0,4772	3,40	0,49966
0,45	0,1736	0,97	0,3340	1,49	0,4319	2,02	0,4783	3,60	0,499841
0,46	0,1772	0,98	0,3365	1,50	0,4332	2,04	0,4793	3,80	0,499928
0,47	0,1808	0,99	0,3389	1,51	0,4345	2,06	0,4803	4,00	0,499968
0,48	0,1844	1,00	0,3413	1,52	0,4357	2,08	0,4812	4,50	0,499997
0,49	0,1879	1,01	0,3438	1,53	0,4370	2,10	0,4821	5,00	0,499997
0,50	0,1915	1,02	0,3461	1,54	0,4382	2,12	0,4830		
0,51	0,1950	1,03	0,3485	1,55	0,4394	2,14	0,4838		

Додаток 3.

Таблиця значень функції $q = q(\gamma, n)$

n	γ		
	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29

Додаток 4.

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи r	Рівень значущості α		
	0,01	0,025	0,05
1	6,6	5,0	3,8
2	9,2	7,4	6,0
3	11,3	9,4	7,8
4	13,3	11,1	9,5
5	15,1	12,8	11,1
6	16,8	14,4	12,6
7	18,5	16,0	14,1
8	20,1	17,5	15,5
9	21,7	19,0	16,9
10	23,2	20,5	18,3
11	24,7	21,9	19,7
12	26,2	23,3	21,0
13	27,7	24,7	22,4
14	29,1	26,1	23,7
15	30,6	27,5	25,0
16	32,0	28,8	26,3
17	33,4	30,2	27,6
18	34,8	31,5	28,9
19	36,2	32,9	30,1
20	37,6	34,2	31,4
21	38,9	35,5	32,7
22	40,3	36,8	33,9
23	41,6	38,1	35,2
24	43,0	39,4	36,4
25	44,3	40,6	37,7