

## Дискретний випадковий вектор

**Приклад.** За даним законом розподілу двовимірною дискретного випадкового вектора  $X, Y$  знайти:

- а) закони розподілу компонент  $X$  та  $Y$  (безумовні);
- б) математичні сподівання, дисперсії і коефіцієнт кореляції компонент;
- в) умовні закони розподілу величини  $X$  при  $Y = 2$  і величини  $Y$  при  $X = 1$ ;
- г) умовні математичні сподівання величини  $X$  при  $Y = 2$  і величини  $Y$  при  $X = 1$ .

$X$	$Y$			
	0	2	7	10
1	0,01	0,04	0,03	0,02
4	0,03	0,2	0,1	0,06
7	0,04	0,13	0,11	0,06
8	0,02	0,06	0,06	0,03

**Розв'язання.** а) Додаючи ймовірності “по рядках”, запишемо закон розподілу випадкової величини  $X$  :

$X$	1	4	7	8
$p_i$	0,1	0,39	0,34	0,17

Додаючи ймовірності “по стовпчиках”, запишемо закон розподілу випадкової величини  $Y$  :

$Y$	0	2	7	10
$p_j$	0,1	0,43	0,3	0,17

б) Обчислимо числові характеристики випадкової величини  $X$  :

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,39 + 7 \cdot 0,34 + 8 \cdot 0,17 = 5,4 ;$$

$$D(X) = D_x = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i - [M(X)]^2 =$$

$$= 1^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,39 + 7^2 \cdot 0,34 + 8^2 \cdot 0,17 - (5,4)^2 = 4,72.$$

Аналогічно для випадкової величини  $Y$  маємо:

$$M(Y) = m_y = \sum_{j=1}^4 y_j p_j = 0 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,43 + 7 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,17 = 4,66 ;$$

$$D(Y) = D_y = \sum_{j=1}^4 y_j^2 p_j - [M(Y)]^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,43 + 7^2 \cdot 0,3 + 10^2 \cdot 0,17 - (4,66)^2 = 11,70.$$

Коефіцієнт кореляції випадкових величин  $X$  та  $Y$  знаходиться за формулою

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}},$$

де  $K_{xy}$  – коваріація випадкових величин  $X$  та  $Y$ .

Обчислимо коваріацію:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - m_x m_y =$$

$$= 1 \cdot (0 \cdot 0,01 + 2 \cdot 0,04 + 7 \cdot 0,03 + 10 \cdot 0,02) +$$

$$+ 4 \cdot (0 \cdot 0,03 + 2 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,1 + 10 \cdot 0,06) +$$

$$+ 7 \cdot (0 \cdot 0,04 + 2 \cdot 0,13 + 7 \cdot 0,11 + 10 \cdot 0,06) +$$

$$+ 8 \cdot (0 \cdot 0,02 + 2 \cdot 0,06 + 7 \cdot 0,06 + 10 \cdot 0,03) - 5,4 \cdot 4,66 =$$

$$= 25,42 - 5,4 \cdot 4,66 = 0,256.$$

Отже, коефіцієнт кореляції випадкових величин  $X$  та  $Y$  :

$$r_{xy} = \frac{0,256}{\sqrt{4,72 \cdot 11,7}} = 0,03.$$

в) Знайдемо умовні ймовірності можливих значень випадкової величини  $X$  за умови, що складова  $Y$  набула значення  $Y = y_2 = 2$  :

$$p(x_1 | y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,04}{0,43} = \frac{4}{43}, \quad p(x_2 | y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,2}{0,43} = \frac{20}{43},$$

$$p(x_3 | y_2) = \frac{p(x_3, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,13}{0,43} = \frac{13}{43}, \quad p(x_4 | y_2) = \frac{p(x_4, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0,06}{0,43} = \frac{6}{43}.$$

Запишемо шуканий умовний закон розподілу  $X$  :

$X$	1	4	7	8
$p(X y_2)$	$\frac{4}{43}$	$\frac{20}{43}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{6}{43}$

Аналогічно знаходимо умовний закон розподілу  $Y$  при  $X = x_1 = 1$  :

$Y$	0	2	7	10
$p(Y x_1)$	0,1	0,4	0,3	0,2

г) Знайдемо умовні математичні сподівання випадкової величини  $X$  при  $Y = 2$  і випадкової величини  $Y$  при  $X = 1$  :

$$M[X | y_2] = \sum_i x_i p(x_i | y_2) = 1 \cdot \frac{4}{43} + 4 \cdot \frac{20}{43} + 7 \cdot \frac{13}{43} + 8 \cdot \frac{6}{43} = 5,19 ,$$

$$M[Y | x_1] = \sum_j y_j p(y_j | x_1) = 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,2 = 4,9 .$$