**Приклад 1.** Дано вибірку: 1, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3. Потрібно:

1) побудувати варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний розподіл вибірки;
3) побудувати полігон відносних частот;
4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

**Розв'язання.**

1) Побудуємо варіаційний ряд

1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5.

2) Порахуємо частоти з якими варіанти $x_i$ входять у вибірку та запишемо статистичний розподіл вибірки:

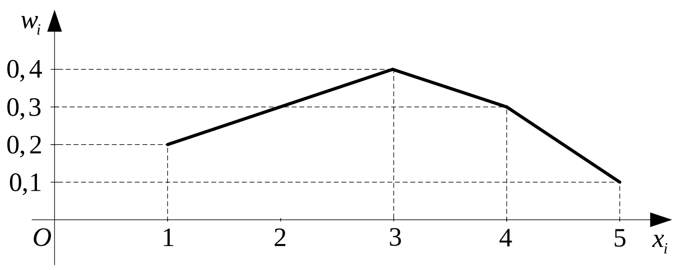
| $x_i$ | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 4 | 8 | 6 | 2 |

3) Знайдемо відносні частоти. Оскільки об'єм вибірки $n = 4+8+6+2 = 20$, то $w_1 = \frac{4}{20} = 0,2$; $w_2 = \frac{8}{20} = 0,4$; $w_3 = \frac{6}{20} = 0,3$; $w_4 = \frac{2}{20} = 0,1$.

Отже розподіл відносних частот має вигляд:

| $x_i$ | 1 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,1 |

На площині $(x_i; w_i)$ зобразимо точки з координатами (1;0,2), (3;0,4), (4;0,3), (5;0,1) та з'єднаємо їх відрізками. Отримаємо шуканий полігон відносних частот.




4) Емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ знаходимо за формулою:

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$; $x \in (-\infty; +\infty)$, де $n$ – об'єм вибірки ; $n_x$ – число варіант, які менші $x$. В даній задачі $n = 20$.

При $x \le 1$ $n_x = 0$, оскільки найменша варіанта $x_1 = 1$. Тому $F^*(x) = 0$, при $x \le 1$.

При $1 < x \le 3$ лише варіанта $x_1 = 1 < x$, причому $n_x = 4$. Тому $F^*(x) = \frac{4}{20} = 0,2$, при $1 < x \le 3$.

При $3 < x \le 4$ варіанти $x_1 = 1$ та $x_2 = 3$ менші *x*, причому $n_x = 4+8 = 12$. Тому $F^*(x) = \frac{12}{20} = 0,6$ при $3 < x \le 4$.

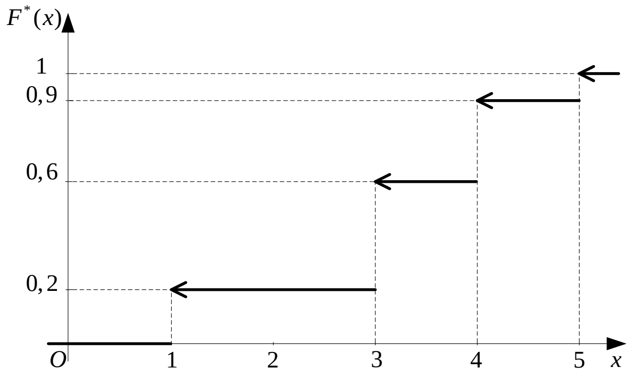
При $4 < x \le 5$ варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ та $x_3 = 4$ менші *x*, причому $n_x = 4+8+6 = 18$. Тому $F^*(x) = \frac{18}{20} = 0,9$ при $4 < x \le 5$.

При $x > 5$ $n_x = 20$ і отже $F^*(x) = 1$.

Таким чином емпірична функція розподілу має вигляд:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{п ри } x \le 1 \\ 0,2 & \text{п ри } 1 < x \le 3 \\ 0,6 & \text{п ри } 3 < x \le 4 \\ 0,9 & \text{п ри } 4 < x \le 5 \\ 1 & \text{п ри } x > 5 \end{cases}.$$

Будуємо графік цієї функції.




**Приклад 2.** Дано інтервальний варіаційний ряд

| $a_{i-1}-a_i$ | 1-3 | 3-5 | 5-7 | 7-9 | 9-11 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 7 | 10 | 20 | 8 | 5 |

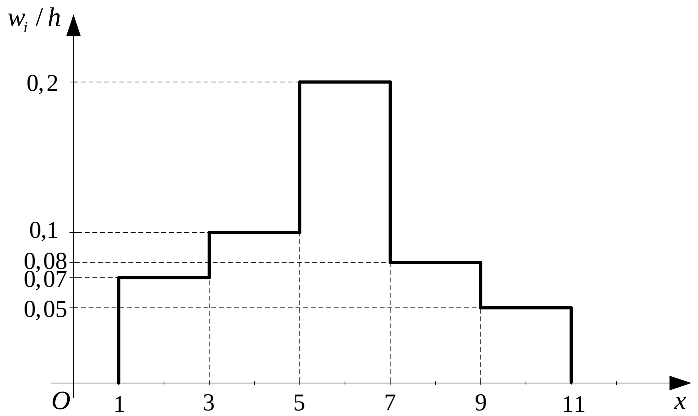
Побудувати гістограму відносних частот.

**Розв'язання.** Об'єм вибірки $n = 7+10+20+8+5 = 50$, довжина часткового інтервалу $h$ =2.

Знаходимо щільності відносних частот $w_i$ за формулою $\dfrac{w_i}{h}=\dfrac{n_i}{n\cdot h}$:

$\dfrac{w_1}{h}=\dfrac{7}{50\cdot 2}=0{,}07$; $\dfrac{w_2}{h}=\dfrac{10}{50\cdot 2}=0{,}1$; $\dfrac{w_3}{h}=\dfrac{20}{50\cdot 2}=0{,}2$; $\dfrac{w_4}{h}=\dfrac{8}{50\cdot 2}=0{,}08$; $\dfrac{w_5}{h}=\dfrac{5}{50\cdot 2}=0{,}05$.

Відкладемо на осі абсцис часткові інтервали $a_{i-1}-a_i$ і проведемо над цими інтервалами відрізки, які паралельні осі абсцис і знаходяться від неї на відстанях рівних відповідно $w_i/h$. Отримаємо шукану гістограму відносних частот.




**Приклад 3.**

1) Задано статистичний розподіл вибірки

| $x_i$ | 1 | 2 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 3 | 4 | 1 |

Знайти вибіркове середнє $\bar{x}$, вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$, виправлену вибіркову дисперсію $s^2$ і вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$.

2) Задано інтервальний варіаційний ряд

| $a_{i-1}-a_i$ | 2 - 4 | 4 - 6 | 6 - 8 | 8 - 10 | 10 - 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 42 | 73 | 154 | 205 | 26 |

Знайти вибіркове середнє $\bar{x}$ та вибіркову дисперсію $\sigma_в^2$.

**Розв'язання.** 1) Об'єм вибірки $n = 2+3+4+1 = 10$.

Вибіркове середнє $\bar{x}$ знаходимо за формулою

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i\cdot n_i .$$

Отримаємо: $\bar{x}=\dfrac{1}{10}\left(1\cdot 2+2\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 1\right)=3{,}4$.

Вибіркову дисперсію знаходимо за формулою

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot n_i - \left(\overline{x}\right)^2 .$$

Отримаємо: $\sigma_в^2 = \frac{1}{10}\left(1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 4 + 6^2 \cdot 1\right) - \left(3,4\right)^2 = 3,44$.

Знаходимо $s^2$ та $\sigma_в$: $s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_в^2 = \frac{10}{9} \cdot 3,44 \approx 3,82$,

$$\sigma_в = \sqrt{\sigma_в^2} = \sqrt{3,44} \approx 1,85 .$$

2) Знаходимо середини часткових інтервалів: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$, $x_4 = 9$, $x_5 = 11$. Аналогічно попередньому отримаємо: $\overline{x} = \frac{1}{500}\left(3 \cdot 42 + 5 \cdot 73 + 7 \cdot 154 + 9 \cdot 205 + 11 \cdot 26\right) = 7,4$;

$$\sigma_в^2 = \frac{1}{500}\left(3^2 \cdot 42 + 5^2 \cdot 73 + 7^2 \cdot 154 + 9^2 \cdot 205 + 11^2 \cdot 26\right) - \left(7,4\right)^2 = 4,24$$