Неперервна випадкова величина

Приклад 1. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{9} & \text{при } 0<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання в інтервал $(0;1)$, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

Розв'язання. Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(0;1)$:
$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=\dfrac{1}{9}-0=\dfrac{1}{9}\approx 0{,}11$.

Оскільки щільність розподілу $f(x)=F'(x)$, то

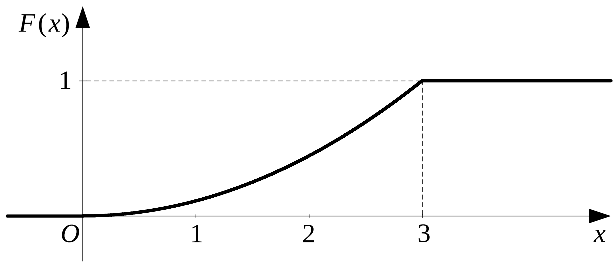
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \dfrac{2}{9}x & \text{при } 0<x\le 3,\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини X:
$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_0^3\frac{2}{9}x^2dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3=\frac{2\cdot 27}{27}=2.$$

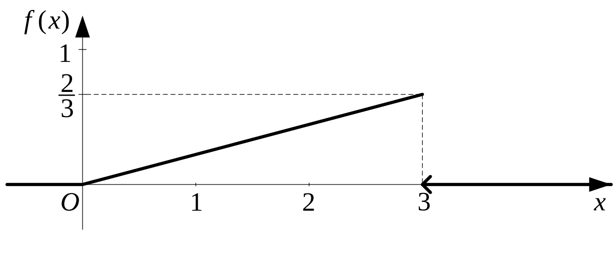
Визначимо дисперсію випадкової величини X:
$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\left[M(X)\right]^2=\int_0^3 x^2\frac{2}{9}xdx-2^2=\frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx-4=\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^3-4==\frac{2}{9}\cdot\frac{3^4}{4}-4=0{,}5.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(x)=\sqrt{D(x)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}71$.

Будуємо графік функції розподілу:



Будуємо графік щільності розподілу:



Розподіли: нормальний, рівномірний, показниковий, Пуассона

Приклад 2. Прилад для вимірювання деякої величини працює без систематичних похибок (це означає, що математичне сподівання випадкової величини – похибки вимірювання – дорівнює нулю).

Відомо, що похибка вимірювання має нормальний розподіл. Нехай її середнє квадратичне відхилення (ще кажуть, стандартне відхилення) дорівнює $\sigma=10$ од. Знайти ймовірність того, що вимірювання буде проведено з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною: а) 10 од.; б) 20 од.; в) 30 од.

Розв'язання. Ймовірність того, що значення нормально розподіленої випадкової величини X відхилиться від її математичного сподівання m (за абсолютною величиною) менше ніж на ε, знаходиться за формулою

$$P\left(\left|X-m\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right), \qquad (4)$$

де $\sigma=\sqrt{D(X)}$; $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

За формулою (4) маємо:

а) $P(|X|\le 10)=P(|X|<10)=2\Phi\left(\frac{10}{10}\right)=2\Phi(1)=2\cdot 0,3413=0,6826$, оскільки $\Phi(1)=0,3413$ (див. додаток 3);

б) $P(|X|\le 20)=2\Phi\left(\frac{20}{10}\right)=2\Phi(2)=0,9544$ $(\Phi(2)=0,4772)$;

в) $P(|X|\le 30)=2\Phi\left(\frac{30}{10}\right)=2\Phi(3)=0,9974$ $(\Phi(3)=0,4987)$.

При розв'язуванні задачі ми скористались тим, що неперервна випадкова величина X має властивість $P(X=x_0)=0$, де x_0 – довільне число, а тому $P\ \alpha\le X\le\beta\ =P\ \alpha<X<\beta$.

Приклад 3. Деталь виготовляється на верстаті. Довжина X цієї деталі є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом з середнім значенням 20 см і середнім квадратичним відхиленням 0,2 см.

Потрібно: а) знайти відсоток деталей, відхилення довжини яких у той чи інший бік від її середнього значення не перевищить 0,3 см; б) знайти відсоток деталей, довжина яких міститься в межах від 20 см до 20,5 см; в) знайти, яку точність довжини деталі можна гарантувати з ймовірністю 0,95; г) відповісти на питання: в яких межах за правилом "трьох сигм" практично буде знаходитись довжина деталі?

Розв'язання. а) Скористаємося формулою (4). В нашому випадку $m=20,\ \ \sigma=0,2,\ \varepsilon=0,3$. Тому

$$P(|X-20|<0,3)=2\Phi\left(\frac{0,3}{0,2}\right)=2\Phi(1,5)=0,8664,$$

оскільки за таблицею $\Phi(1,5)=0,4332$. Отже, приблизно 87 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 19,7 см і 20,3 см. Інші 13 % деталей матимуть більші відхилення довжини від середнього значення.

б) Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X набуде значення з інтервалу (α,β), знаходиться за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right).$$

В нашому випадку $\alpha=20$, $\beta=20,5$, $m=20,\ \ \sigma=0,2$. Тому

$$P(20<X<20,5)=\Phi\left(\frac{20,5-20}{0,2}\right)-\Phi\left(\frac{20-20}{0,2}\right)=$$

$$=\Phi(2,5)-\Phi(0)=0,4938-0=0,4938.$$

Отже, близько 50 % всіх деталей, виготовлених на верстаті, будуть мати довжину між 20 см і 20,5 см.

в) Розв'яжемо рівняння $P(|X-20|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right)=0,95$ або $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{0,2}\right)=0,475$ відносно ε. За таблицею додатку 3 знаходимо таке значення аргументу $\frac{\varepsilon}{0,2}$, для якого функція $\Phi(x)$ приймає значення 0,475: маємо $\frac{\varepsilon}{0,2}=1,96$ або $\varepsilon=0,392$. Отже, з ймовірністю 0,95 можна гарантувати, що відхилення довжини деталі від номіналу не перевищують 0,392 см.

г) Правило "трьох сигм" виражається формулою:

$$P(m-3\sigma<X<m+3\sigma)=0,9973.$$

У нашому випадку $m=20,\ \ \sigma=0,2$. Тому

$$3\sigma=3\cdot 0,2=0,6;$$

$$m-3\sigma=20-0,6=19,4;\qquad m+3\sigma=20+0,6=20,6.$$

Звідси випливає, що подія $\{19,4<X<20,6\}$ є практично вірогідною (можливі значення випадкової величини X належать інтервалу $(19,4,\ \ 20,6)$ з ймовірністю $0,9973$).

Приклад 4. Середній час безвідмовної роботи пристрою 15 год. Знайти ймовірність того, що пристрій пропрацює не менше 20 год, якщо тривалість безвідмовної роботи пристрою має показниковий розподіл.

Розв'язання. Нехай X – час безвідмовної роботи пристрою. За умовою випадкова величина X має показниковий розподіл. Це означає, що її функція розподілу

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{якщо } x\ge 0,\\ 0, & \text{якщо } x<0,\end{cases}$$

де параметр $\lambda>0$.

Для знаходження λ, скористаємося тим, що $M(X)=\frac{1}{\lambda}$. Оскільки за умовою $M(X)=15$, то $\lambda=\frac{1}{15}$.

Знайдемо шукану ймовірність:

$$P\left(X \geq 20\right)=1-P\left(X<20\right)=1-F\left(20\right)=1-\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)=e^{-\frac{20}{15}}\approx 0,264 .$$

Приклад 5. На автоматичну телефонну станцію надходить потік викликів, інтенсивність якого $\lambda = 0,8$ (викликів/хв). Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде рівно один виклик; в) надійде хоча б один виклик.

Розв'язання. Випадкова величина X – (число викликів за 2 хвилини) має розподіл Пуассона з параметром $\lambda t = 0,8 \cdot 2 = 1,6$.

Як відомо, ймовірність $P_t\left(m\right)$ того, що за час t відбудеться рівно m подій, знаходиться за формулою Пуассона

$$P_t\left(m\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^m}{m!}e^{-\lambda t} .$$

Тому маємо:

а) $P_0\left(2\right)=\frac{\left(\lambda t\right)^0}{0!}e^{-\lambda t}=e^{-\lambda t}=e^{-1,6}\approx 0,202$; б) $P_1\left(2\right)=\frac{\left(1,6\right)^1}{1!}e^{-1,6}\approx 0,323$;

в) $P\left(X \geq 1\right)=1-P\left(X=0\right)=1-P_0\left(2\right)\approx 0,798$.

Приклад 6. Ціна поділки шкали амперметра становить 0,1 А. Покази стрілки заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при визначенні сили струму буде зроблена похибка, що перевищує 0,02 А.

Розв'язання. Положення стрілки можна розглядати як випадкову величину, рівномірно розподілену на відрізку a, b , де a, b – дві сусідні поділки шкали.

Щільність рівномірного розподілу

$$f\left(x\right)=\begin{cases}0, & x \notin \left[a, b\right],\\ \frac{1}{b-a}, & x \in \left[a, b\right].\end{cases}$$

У нашому випадку можемо взяти відрізок $a, b = 0,\ 0,1$ і, отже, $b-a=0,1$. Тому $f(x)=\frac{1}{0,1}=10$, $x \in 0;\ 0,1$. Очевидно, що помилка перевищуватиме 0,02, якщо відбудеться випадкова подія $\left\{0,02<X<0,08\right\}$.

За формулою $P\left(x_1<X<x_2\right)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f\left(x\right)dx$ матимемо

$$P\left(0,02<X<0,08\right)=\int\limits_{0,02}^{0,08} 10\,dx=10x\Big|_{0,02}^{0,08}=10\left(0,08-0,02\right)=0,6 .$$