

### Неперервна випадкова величина

Випадкова величина  $X$  має функцію розподілу  $F(x)$ . Знайти: а) ймовірність того, що  $X$  набуде значення з інтервалу  $(\alpha; \beta)$ ; б) щільність розподілу; в) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення. Побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

**10.1.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$\alpha = -1; \beta = 2,5.$

**10.2.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{x^2 - x}{2}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$\alpha = -1; \beta = 1,5.$

**10.3.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2 - \frac{4}{x}, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 2; \beta = 3.$

**10.4.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{9(x^2 - 4)}{5x^2}, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

$\alpha = 0; \beta = 2,5.$

**10.5.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0; \beta = 0,5.$

**10.6.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{(x+1)^2}{16}, & -1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$\alpha = 0; \beta = 1.$

**10.7.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ (x-3)^3, & 3 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 3,5; \beta = 4.$

**10.8.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2 + x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0,2; \beta = 1.$

**10.9.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ -\frac{2}{x} - 1, & -2 < x \leq -1, \\ 1, & x > -1. \end{cases}$$

$\alpha = -2; \beta = 0.$

**10.10.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$\alpha = -2; \beta = 0,25.$

**10.11.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{x}{2} - 1, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = -2; \beta = 3.$

**10.12.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4, \\ \frac{(x-4)^2}{25}, & 4 < x \leq 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

$\alpha = 5; \beta = 6.$

**10.13.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt{x^3}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0; \beta = 0,5.$

**10.14.**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{(x+2)^2}{4}, & -2 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$\alpha = -1; \beta = 0.$

$$10.15. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right), & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$\alpha = 1,5; \beta = 2,5.$

$$10.16. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2} \sqrt{x}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 1; \beta = 2.$

$$10.17. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt[4]{x^3}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0,5; \beta = 2,5.$

$$10.18. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 2 - \frac{2}{x}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$\alpha = 0; \beta = 1,5.$

$$10.19. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x^2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = -1; \beta = 0,5.$

$$10.20. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, & -1 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0; \beta = 2.$

$$10.21. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$\alpha = 1; \beta = 1,5.$

$$10.22. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 1 - \sqrt[3]{x^4}, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$\alpha = -0,5; \beta = 1.$

$$10.23. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{8} \sqrt{x^3}, & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 2; \beta = 3.$

$$10.24. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{1}{9}(x-2)^2, & 2 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

$\alpha = 3; \beta = 4.$

$$10.25. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 2; \beta = 3,5.$

$$10.26. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \sqrt{x} - 1, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 1; \beta = 2.$

$$10.27. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x^4}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$\alpha = 0,5; \beta = 2.$

$$10.28. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3, \\ \frac{(x-3)^2}{4}, & 3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

$\alpha = 3; \beta = 4,5.$

$$10.29. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^3}{8}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$\alpha = 1; \beta = 1,5.$

$$10.30. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{1}{7}(\sqrt{x^3} - 1), & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$\alpha = 1; \beta = 3.$

## Задача 11

### Розподіли: нормальний, рівномірний, показниковий, Пуассона

**11.1.** Автомат штампує деталі. Контрольований розмір деталі є випадковою величиною  $X$ , що має нормальний розподіл з параметрами  $a = 50$ ,  $\sigma = 0,02$ . Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини  $X$ . Знайти відсоток бракованих деталей, якщо деталь вважається придатною, коли її розмір міститься в межах від 49,96 до 50,04.

**11.2.** Жирність молока корів у Житомирській області ( $y$  %) можна розглядати як нормально розподілену випадкову величину з математичним сподіванням рівним 4 % і середнім квадратичним відхиленням 0,03 %. Обчислити ймовірність того, що в навмання взятій пробі жирність молока буде: а) більшою 4 %; б) меншою 4 %; в) від 3,95 % до 4,05 %. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.

**11.3.** Вага однієї плитки шоколаду є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 100 г і середнім квадратичним відхиленням 2 г. Знайти відсоток коробок, вага яких: а) більша 100 г; б) міститься у межах від 99 г до 101 г.

**11.4.** Зріст студентів першого курсу можна описати нормальним розподілом з математичним сподіванням 170 см і середнім квадратичним відхиленням 7 см. Визначити відсоток студентів першого курсу, що мають зріст: а) більше 170 см; б) менше 170 см; в) від 170 см до 180 см. Розв'язок пункту в) зобразити схематично на графіку щільності розподілу.

**11.5.** Зміна індексу цінних паперів на фондовій біржі може бути змодельована як нормально розподілена випадкова величина з параметрами  $a = 1$  і  $\sigma^2 = 0,01$ . Знайти ймовірність того, що на наступних торгах індекс цінних паперів буде: а) більшим 1; б) меншим 1; в) від 0,98 до 1,02. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу ймовірностей даної випадкової величини.

**11.6.** Середній відсоток виконання плану підприємствами галузі складає 103 %, середнє квадратичне відхилення 2 %. Припускаючи, що виконання плану підприємствами має нормальний розподіл, визначити відсоток підприємств, що виконують план: а) більше 103 %; б) менше 103 %; в) від 99 % до 107 %. Розв'язок пункту в) схематично зобразити на графіку щільності розподілу.

**11.7.** Діаметр деталей, виготовлених цехом, є випадковою величиною, що має нормальний розподіл з математичним сподіванням  $a = 5$  см і дисперсією  $\sigma^2 = 0,0004$ . У яких межах за правилом "трьох сигм" можна практично гарантувати діаметр деталей? Знайти відсоток деталей, діаметр яких міститься у межах від 4,96 до 5,04 см.

**11.8.** На автоматі виготовляють заклепки. Діаметр заклепок можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 3 мм і середнім квадратичним відхиленням 0,1. Які розміри діаметра заклепки можна гарантувати з ймовірністю: а) 0,95; б) 0,9973?

**11.9.** Контрольований розмір деталі є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами  $a = 150$  мм та  $\sigma = 2$  мм. а) Знайти ймовірність браку, якщо допустимі розміри повинні бути  $150 \pm 3$  мм. б) Яку точність контрольованого розміру можна гарантувати з ймовірністю 0,97? в) За які межі за правилом "трьох сигм" практично не вийде контрольований розмір деталі?

**11.10.** Вага окремої коробки цукерок є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 500 г і середнім квадратичним відхиленням 10 г. Знайти відсоток коробок, вага яких: а) більша 500 г; б) знаходиться в межах  $500 \pm 15$  г.

**11.11.** Масу тіла курсантів військового інституту можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 60 кг і середнім квадратичним відхиленням 2 кг. Визначити відсоток курсантів, що мають масу: а) більшу 60 кг; б) меншу 70 кг; в) від 58 кг до 62 кг. Розв'язок пункту в) зобразити схематично на графіку щільності розподілу.

**11.12.** Вважаючи, що курс акцій компанії протягом одних біржових торгів – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням 8 грн та середнім квадратичним відхиленням 1 грн, знайти: а) ймовірність того, що курс акцій міститься в межах від 4 до 9 грн; б) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення  $X$  від середнього курсу виявиться меншою 2 грн.

**11.13.** Середній відсоток споживання енергоресурсів підприємствами галузі складає 105 % від запланованого, середнє квадратичне відхилення 2 %. Припускаючи, що споживання енергоресурсів підприємствами має нормальний розподіл, визначити відсоток підприємств, що споживають енергоресурси відносно плану: а) більше 103 %; б) менше 105 %; в) від 100 % до 110 %. Розв'язок пункту в) схематично зобразити на графіку щільності розподілу.

**11.14.** Діаметр вала є нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами  $a = 200$  мм та  $\sigma = 3$  мм. а) Знайти відсоток деталей, діаметр яких лежить в межах від 196 до 204 мм. б) Яку точність діаметра деталі можна гарантувати з ймовірністю 0,97? в) За які межі за правилом "трьох сигм" практично не вийде діаметр деталі?

**11.15.** Випадкова величина  $X$  – час безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл, причому відомо, що середній час безвідмовної роботи елемента дорівнює 1,5 доби. Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та наступні ймовірності: а)  $P(X < 1)$ ; б)  $P(1,4 < X < 1,6)$ .

**11.16.** Хвилинка стрілка годинника переміщується стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник покаже час, що відрізняється від справжнього не більше ніж на 15 секунд.

**11.17.** Випадкова величина  $X$  – число викликів, що надходять на пульт диспетчера станції швидкої допомоги протягом години, має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda = 10$  (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірності наступних подій: а)  $P(X = 0)$ ; б)  $P(X > 6)$ .

**11.18.** На торговельну базу у середньому приїздить 5 вантажних авто за добу. Випадкова величина  $X$  – число вантажних авто, що прибули на базу протягом доби, має розподіл Пуассона. Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірності наступних подій: а)  $P(X \geq 2)$ ; б)  $P(X \leq 6)$ .

**11.19.** Випадкова величина  $X$  – час безвідмовної роботи приладу має показниковий розподіл, причому відомо, що середній час безвідмовної роботи елемента дорівнює 15 діб. Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та наступні ймовірності: а)  $P(X < 10)$ ; б)  $P(14 < X < 16)$ .

**11.20.** Координата точки, що навмання вибирається на відрізьку  $[1, 5]$ , є рівномірно розподіленою випадковою величиною  $X$ . Записати функцію розподілу та щільність розподілу, побудувати їх графіки. Обчислити числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірність  $P(X \in (3, 4))$ .

**11.21.** Випадкова величина  $X$  – число повідомлень, що надходять на пульт диспетчера протягом години, має розподіл Пуассона з параметром  $\lambda = 5$  (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірності наступних подій: а)  $P(X = 0)$ ; б)  $P(X > 3)$ .

**11.22.** У порт приходить у середньому 2,5 судна за добу. Випадкова величина  $X$  – число суден, що зайшли в порт протягом доби, має розподіл Пуассона. Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірності наступних подій: а)  $P(X \geq 1)$ ; б)  $P(X \leq 3)$ .

**11.23.** Інтервали часу між приходами в порт суден розподілені за показниковим законом з параметром  $\lambda = 5$ . Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  – часу між приходами двох суден. Обчислити: а)  $P(X \in (1, 2))$ ; б)  $P(X \in (4, 6))$ .

**11.24.** Випадкова величина  $X$  – час між двома повідомленнями, що надходять на торгову площадку, має показниковий розподіл з параметром  $\lambda = 0,5$ . Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та наступні ймовірності: а)  $P(X < 0,2)$ ; б)  $P(0,3 < X < 0,7)$ .

**11.25.** Середнє число викликів, що надходять на пульт диспетчера таксі протягом хвилини, дорівнює трьом. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини: а) не надійде жодного виклику; б) надійде чотири виклики; в) надійде менше трьох викликів.

**11.26.** Випадкова величина  $X$  – час обслуговування клієнтів у майстерні має показниковий розподіл з функцією розподілу  $F(x) = 1 - e^{-3x}$  (відлік часу проводиться в годинах). Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та наступні ймовірності: а)  $P(X < 0,5)$ ; б)  $P(0,2 < X < 0,4)$ .

**11.27.** Автобуси деякого маршруту рухаються з інтервалом 10 хв. Випадкова величина  $X$  – час, протягом якого пасажиру доведеться чекати автобус, має рівномірний розподіл. Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірність того, що пасажир буде чекати автобус більше 3 хвилин.

**11.28.** Випадкова величина  $X$  – має рівномірний розподіл на відрізьку  $[2, 6]$ . Записати функцію розподілу та щільність розподілу. Знайти числові характеристики випадкової величини  $X$  та ймовірність  $P(X \in (3, 4))$ .

**11.29.** Шкала лабораторної ваги має ціну поділки 1 грам. При зважуванні вага заокруглюється в найближчий бік. Яка ймовірність того, що випадкова величина  $X$  – абсолютна помилка визначення маси: а) буде міститись між  $\sigma(X)$  і  $2\sigma(X)$ ? б) буде меншою 0,2 грама?

**11.30.** Тривалість роботи приладу вважають нормально розподіленою випадковою величиною з параметрами  $a = 1000$  год і  $\sigma = 30$  год. Знайти ймовірність того, що тривалість роботи приладу складе: а) більше 1000 год; б) менше 1000 год; в) від 940 до 1060 год. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини і зобразити розв'язок пункту в) на графіку щільності розподілу.